А. А. Осиновская, И. Д. Супруненко, Представления алгебраических групп типа D_n в характеристике 2 с малыми кратностями весов, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2009, том 365, 182–195

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 365, 2009 г.

А. А. Осиновская, И. Д. Супруненко

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП ТИПА D_n В ХАРАКТЕРИСТИКЕ 2 С МАЛЫМИ КРАТНОСТЯМИ ВЕСОВ

Введение

Получены нижние оценки максимальных кратностей весов в неприводимых представлениях алгебраических групп типа D_n в характеристике 2. Пусть K – алгебраически замкнутое поле характеристики 2 и $G_n = D_n(K)$. Рассматриваются только рациональные G_n-модули и представления. Далее, M^μ – весовое пространство веса μ в G_n-модуле M, $\Lambda(M)$ – множество весов модуля M, символ $\omega(M)$ обозначает старший вес простого G_n-модуля M и $L(\omega)$ – простой G_n-модуль со старшим весом ω. Обозначим через $\operatorname{wdeg} M$ максимальную размерность весового подпространства в M, т.е.

$$\operatorname{wdeg} M = \max_{\mu \in \Lambda(M)} \dim M^\mu.$$

Для классических групп простые модули M без кратных весов, для которых $\operatorname{wdeg} M = 1$, классифицированы в [4, 8]. Этот результат использовался при описании максимальных подгрупп классических алгебраических групп в [8]. В [1] получены нижние оценки максимальных кратностей весов в неприводимых представлениях алгебраических групп типов B_n и D_n в нечетной характеристике и типа C_n в характеристике > 7. Оказалось, что при $n \geq 8$ либо такая кратность не меньше $n - 4 - [n]_4$, где $[n]_4$ – вычет числа n по модулю 4, либо все кратности весов равны 1. В этой статье получена аналогичная оценка для $D_n(K)$ при $p = 2$. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_n$ – фундаментальные веса группы G_n, занумерованные, как в [2, таблица IV]. Напомним, что вес $\sum_{i=1}^n a_i\omega_i$ называется 2-ограниченным, если все $a_i = 0$ или 1. Для алгебраической группы G над полем K обозначим символом $\Omega(G)$ множество всех доминантных весов ω группы G, таких, что $\operatorname{wdeg} L(\omega) = 1$, и символом $\Omega_2(G)$ – подмножество всех

Работа выполнена в рамках проекта Ф08-011 Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований .

2-ограниченных весов в $\Omega(G)$. Согласно [4, предложение 2], при $n \geq 4$

$$\Omega_2(G_n) = \{0, \omega_1, \omega_{n-1}, \omega_n\}$$

и

$$\Omega(G_n) = \left\{ \sum_{j=0}^{s} 2^j \lambda_j \mid \lambda_j \in \Omega_2(G_n) \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть $n \geq 8$, $p = 2$ и $G_n = D_n(K)$. Пусть M – простой G_n-модуль, для которого $\omega(M) \notin \Omega(G_n)$. Тогда* $\operatorname{wdeg} M \geq n - 4 - [n]_4$, *где $[n]_4$ – вычет числа n по модулю 4. В частности,* $\operatorname{wdeg} M \geq n - 7$.

Результаты статьи [1] и теорема 1 показывают, что в соответствующих случаях простые модули M, для которых $\operatorname{wdeg} M = 1$, составляют класс модулей с малыми кратностями весов, который в определенном смысле нельзя расширить.

Из доказанной в §2 леммы 7 следует, что для нечетных n существует 2-ограниченный G_n-модуль M, у которого $\operatorname{wdeg} M = n - 1$, а для четных n существует такой модуль с $\operatorname{wdeg} M = n - 2$. Следовательно, оценки в теореме 1 асимптотически точны.

Мотивировка рассматриваемой задачи приведена в [1]. Там обсуждается ее связь с известной проблемой о бесконечномерных простых модулях с ограниченными кратностями весов для конечномерных комплексных простых алгебр Ли; отмечено, что полученные результаты могут быть использованы для распознавания линейных групп, содержащих матрицы с малыми кратностями собственных значений.

2. Обозначения и предварительная информация

Пусть G – простая алгебраическая группа над полем K. Обозначим символом $\operatorname{Irr} G$ множество всех рациональных неприводимых представлений (или простых модулей) группы G с точностью до эквивалентности и символом $\operatorname{Irr}_2 G \subset \operatorname{Irr} G$ – подмножество 2-ограниченных представлений. Пусть M – G-модуль. Далее $\operatorname{Irr} M \subset \operatorname{Irr} G$ – множество композиционных факторов модуля M (без учета их кратностей); $\Lambda(M)$ – множество всех весов модуля M; $\omega(M)$ – старший вес модуля M, M^μ – весовое пространство веса μ в M. Ниже $L(\omega)$ – простой G-модуль со старшим весом ω; v^+ всегда обозначает ненулевой вектор старшего веса в соответствующем модуле.

Далее $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ – множества целых и неотрицательных целых чисел; символы $\Lambda(G)$ и $R(G)$ обозначают множество весов и систему корней группы G соответственно, $R^+(G) \subset R(G)$ – множество положительных корней (относительно фиксированного максимального тора $T \subset G$ и фиксированного базиса системы корней $R(G)$); $\langle \lambda, \alpha \rangle$ – значение веса $\lambda \in \Lambda(G)$ на корне $\alpha \in R(G)$. Для корня $\alpha \in R(G)$ символы X_α и $\mathcal{X}_\alpha$ обозначают корневой элемент алгебры Ли группы G и корневую подгруппу в G, ассоциированную с α. Если $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, то $X_{\alpha,k}$ – это элемент гипералгебры группы G, ассоциированный с парой $(\alpha,\, k)$. Подгруппа группы G, порожденная подгруппами $\Gamma_1, \dots, \Gamma_i$, и подпространство линейного пространства L, порожденное векторами $v_1, \dots, v_i$, обозначаются символами $\langle \Gamma_1, \dots, \Gamma_i \rangle$ и $\langle v_1, \dots, v_i \rangle$ соответственно. Для $\beta_1, \dots, \beta_j \in R^+(G)$ положим

$$G(\beta_1, \dots, \beta_j) = \langle \mathcal{X}_{\beta_1}, \dots, \mathcal{X}_{\beta_j}, \mathcal{X}_{-\beta_1}, \dots, \mathcal{X}_{-\beta_j} \rangle.$$

Во всех случаях, когда рассматриваются подгруппы вида $H = G(\beta_1, \dots, \beta_j)$, корни $\beta_1, \dots, \beta_j$ выбираются таким образом, что подгруппа H полупроста и эти корни образуют базис системы корней $R(H)$. В этой ситуации фундаментальные веса подгруппы H определяются относительно этого базиса. Пересечение $T \cap H$ является максимальным тором подгруппы H. Если $\omega \in \Lambda(G)$, то $\omega|H$ – это ограничение веса ω на $T \cap H$. В дальнейшем $\omega(v)$ – вес весового вектора v из G-модуля M, положим $\omega_H(v) = \omega(v)|H$. Если $\alpha \in R(G)$ и $t \in K$, то ввиду [6, предложение 5.13] для корневого элемента $x_\alpha(t) \in \mathcal{X}_\alpha$

$$x_\alpha(t)v = \sum_{d=0}^{\infty} t^d X_{\alpha,d} v. \tag{1}$$

Фиксируем базис $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ системы корней $R(G_n)$, фундаментальные веса рассматриваются относительно этого базиса. Далее ε_j при $1 \leq j \leq n$ – веса естественной реализации группы G_n, нумерация корней α_i и весов ε_j стандартна и соответствует [2, гл. VI, §4] и [3, гл. VIII, §13]. Положим $X_{\pm i} = X_{\pm\alpha_i}$ и аналогично определим $\mathcal{X}_{\pm i}$ и $X_{\pm i,k}$. Положим $G_n(i_1, \dots, i_j) = G_n(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_j})$ и $b_i(\mu) = \langle \mu, \alpha_i \rangle$ для веса $\mu \in \Lambda(G_n)$. Если $H = G_n(\beta_1, \dots, \beta_j)$, $\alpha_i \in R(H)$ и $\mu' = \mu|H$, аналогично определим $b_i(\mu')$.

Ниже $M^{[k]}$ обозначает G-модуль M, трансформированный k-ой степенью морфизма Фробениуса. Следующий факт установлен в [1, лемма 2.1].

Лемма 1. *Пусть* M_1 *и* M_2 – G*-модули. Тогда*

$$\mathrm{wdeg}\,(M_1^{[k_1]} \otimes M_2^{[k_2]}) \geq \mathrm{wdeg}\, M_1 \cdot \mathrm{wdeg}\, M_2.$$

Пусть $M \in \mathrm{Irr}G$. Предположим, что $\omega(M) = \sum_{k=0}^{s} 2^k \lambda_k$ с 2-ограниченными весами λ_k. Положим $M_k = L(\lambda_k)$. По теореме Стейнберга о тензорном произведении [10]

$$M \cong \otimes_{k=0}^{s} M_k^{[k]}. \tag{2}$$

Поэтому по лемме 1 $\mathrm{wdeg}\, M \geq \mathrm{wdeg}\, M_0 \cdot \ldots \cdot \mathrm{wdeg}\, M_s$.

Лемма 2 ([6, лемма 5.14], [8, 1.5] и [11, 2.1])**.** (i) *Для операторов* $X_{\alpha,d}$ *справедливы следующие равенства:*

$$X_{-\alpha} X_{\alpha,d} = X_{\alpha,d} X_{-\alpha} - H_\alpha X_{\alpha,d-1} + (d-1) X_{\alpha,d-1},$$

$$X_{\alpha,d} X_\beta = X_\beta X_{\alpha,d} + \sum_{t=1}^{d} c_t X_{t\alpha+\beta} X_{\alpha,d-t}, \quad c_t \in \mathbb{Z}$$

$$(c_t = 0, \quad \textit{если} \;\; t\alpha + \beta \notin R(G))$$

(здесь $H_\alpha = [X_\alpha, X_{-\alpha}]$*). В частности,* $X_{i,k} X_{-j,d} = X_{-j,d} X_{i,k}$ *при* $i \neq j$.

(ii) *Пусть* V – G*-модуль,* $\mu \in \Lambda(G)$, $v \in V_\mu \setminus \{0\}$, $\alpha \in R(G)$, $X_{\alpha,b} v = 0$ *при* $b > 0$ *и* $\langle \mu, \alpha \rangle = c \geq 0$*. Тогда* $X_\alpha X_{-\alpha,b} v = (c - b + 1) X_{-\alpha,b-1} v$ *и* $X_{-\alpha,c} v \neq 0$*. В частности,* $X_{-\alpha} v \neq 0$ *при* $c = 1$.

Лемма 3 (Янцен [7], Смит [9])**.** *Пусть* $H = G_n(i_1, \ldots, i_j) \subset G_n$*. Тогда* $KHv^+ \subset L(\omega)$ – *простой* H*-модуль со старшим весом* $\omega_H(v^+)$ *и он является прямым слагаемым* H*-модуля* $L(\omega)$.

Пусть $H = G(\beta_1, \ldots, \beta_j) \subset G$ и M – G-модуль. Положим $U^+(H) = \langle \mathcal{X}_\alpha \mid \alpha \in R^+(H) \rangle$. Напомним, что вектор $v \in M$ называется примитивным относительно H, если v – ненулевой весовой вектор и $U^+(H)$ фиксирует v.

Лемма 4 (частный случай [11, лемма 2.9])**.** *Пусть* $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i \omega_i$ – *доминантный вес группы* G_n *и* $M = L(\omega)$*. Предположим, что* $1 \leq i, j < n$ *и* $a_j = 1$*. Фиксируем* v^+ *и определим вектор* $v(i,j)$ *следующим образом. При* $i = j$ *положим* $v(i,j) = X_{-i} v^+$*. В противном случае пусть* $d_j = 1$*. Если* $i > j$*, положим* $d_k = a_k + d_{k-1}$ *при* $i \geq k > j$*. Если* $i < j$*, возьмем* $d_k = a_k + d_{k+1}$ *при* $i \leq k < j$*. Теперь определим*

$$v(i,j) = X_{-i,d_i} \ldots X_{-k,d_k} \ldots X_{-j} v^+.$$

Тогда $v(i,j) \neq 0$ *и* $X_{l,b} v(i,j) = 0$ *для* $l \neq i$ *и* $b > 0$*. Следовательно, группа* $\mathcal{X}_l$ *фиксирует* $v(i,j)$.

Лемма 5. *В условиях леммы 4 пусть $m = v(i,j)$, $l = i-1$ при $i < j$, $l = i+1$ при $j < i < n-2$, $l \in \{n-1, n\}$ при $j < i = n-2$, $l \in \{i-1, i+1\}$ при $i = j < n-2$ и $l \in \{n-3, n-1, n\}$ при $i = j = n-2$. Предположим, что $\langle \omega(m), \alpha_l \rangle = 2$. Тогда вектор $X_{-l}m \neq 0$ и неподвижен относительно подгрупп $\mathcal{X}_k$ с $k \neq i$.*

Доказательство. Положим $t = X_{-l}m$. Неравенство $t \neq 0$ – это частный случай [11, лемма 2.10]. Очевидно, что $\mathcal{X}_k$ фиксирует t при $k \neq i, l$, поскольку группа $\mathcal{X}_k$ коммутирует с X_{-l}. Из леммы 2 следует, что $X_l t = 0$, а значит, группа $\mathcal{X}_l$ фиксирует t.

□

Приведенные ниже предложение 1 и лемма 6 были доказаны в [1] для всех p, включая $p = 2$.

Предложение 1 ([1, предложение 2.7])**.** *Пусть $\Gamma = G_n(i_1, \dots, i_t)$, $M \in \mathrm{Irr} G_n$ и $N \in \mathrm{Irr}(M|\Gamma)$. Тогда $\mathrm{wdeg}\, N \leq \mathrm{wdeg}\, M$.*

Лемма 6 ([1, лемма 2.8])**.** *Пусть $G = A_n(K)$, $1 \leq j < k \leq n$ и $\omega = \sum_{s=j}^{k} a_s \omega_s$ – доминантный p-ограниченный вес группы G, для которого a_j и $a_k \neq 0$. Тогда*

$$\mathrm{wdeg}\, L(\omega) \geq k - j.$$

Лемма 7. *Пусть M – неприводимый G_n-модуль со старшим весом ω_2 и $n > 2$. Тогда $\mathrm{wdeg}\, M = n - 1$ для нечетного n и $n - 2$ для четного n.*

Доказательство. Известно, что $\Lambda(M)$ содержит только два доминантных веса: ω_2 и 0. Следовательно, $\dim M^{\lambda} = 1$ для $\lambda \in \Lambda(M) \setminus \{0\}$. Положим $H_n = C_n(K)$. Тогда модуль M изоморфен ограничению на группу G_n неприводимого H_n-модуля M_+ со старшим весом ω_2 [8, теорема 4.1]. Более того, легко видеть, что $\dim M^0 = \dim M_+^0$. Обозначим символом L_n алгебру Ли типа C_n над полем комплексных чисел. Пусть V и M_0 – модуль Вейля для H_n и неприводимый L_n-модуль со старшим весом ω_2 и $d = \dim V^0$. Мы утверждаем, что $d = n - 1$. Обозначим через $\wedge^2$ внешний квадрат стандартного L_n-модуля. Легко видеть, что размерность подпространства нулевого веса в $\wedge^2$ равна n. Из описания фундаментальных L_n-модулей в [3, гл. VIII, §13.3] следует, что $\wedge^2$ изоморфен прямой сумме M_0 и тривиального модуля. Отсюда вытекает наше утверждение, поскольку кратности весов в модулях V и M_0 совпадают. Из [5, теорема 2.4] вытекает, что $V \cong M_+$ для нечетного n и что модуль V имеет два композиционных фактора: M_+ и тривиальный – для четного n. Лемма доказана. □

3. Доказательство теоремы 1

В дальнейшем $n \geq 8$ и $M \in \mathrm{Irr} G_n$ – модуль со старшим весом $\omega = \sum_{i=1}^n a_i\omega_i$. Предположим, что $\omega \notin \Omega(G_n)$. Будем рассматривать подгруппу $H \subset G_n$ следующего типа: $H = H_1 \times H_2$, где $H_1 = G_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$ при $\beta = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$ и $H_2 = G_n(5, \dots, n)$.

Как и для нечетного p, сведем задачу к случаю, когда $n = 4k$ и $M \in \mathrm{Irr}_2 G_n$.

В доказательстве существенно используются следующие леммы.

Лемма 8 ([1, лемма 3.3]). *Пусть* $n \equiv 0 \pmod 4$. *Если* $n > 8$, *предположим, что теорема* 1 *справедлива для группы* G_{n-4}. *Пусть* $M \in \mathrm{Irr} G_n$ *и ограничение* $M|H$ *имеет композиционный фактор* $N_1 \otimes N_2$, *для которого* $N_i \in \mathrm{Irr} H_i$ *и* $\omega(N_i) \notin \Omega(H_i)$. *Тогда* $\operatorname{wdeg} M \geq n - 4$.

Лемма 9 ([1, лемма 3.5]). *Предположим, что для всех целых чисел* l *с* $8 \leq l = 4k \leq n$ *теорема* 1 *справедлива для групп* $G_l = D_l(K)$ *и модулей* $M \in \mathrm{Irr}_2 G_l$. *Тогда она справедлива для* G_n *и* M.

Подчеркнем, что доказательства лемм 8 и 9, приведенные в [1], остаются справедливыми и при $p = 2$.

Для завершения доказательства основной теоремы остается доказать

Предложение 2. *Пусть* $n \geq 8$ *и* $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$. *Предположим, что* $M \in \mathrm{Irr}_2 G_n$ *и* $\omega(M) \notin \Omega_2(G_n)$. *Тогда* $\operatorname{wdeg} M \geq n - 4$.

Доказательство. Общая схема доказательства такая же, как в нечетной характеристике, но необходимы значительные технические изменения.

Положим $\Gamma = G_n(1, \dots, n-2, n)$. Тогда $\Gamma \cong A_{n-1}(K)$. Доказательство основано на анализе ограничений $M|H$ и $M|\Gamma$. Напомним, что $H = H_1 \times H_2$, где

$$\begin{aligned} H_1 &= G_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) \cong D_4(K), \\ H_2 &= G_n(5, \dots, n) \cong D_{n-4}(K), \\ \beta &= \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = \alpha_3 + 2\alpha_4 + \ldots + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n. \end{aligned}$$

Для веса $\mu \in \Lambda(H)$ мы пишем $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, если $\mu_i = \mu|H_i$. Назовем вес μ *специальным*, если по крайней мере один из $\mu_i \in \Omega(H_i)$. В противном случае вес μ *неспециален*.

Если $n > 8$, используем индукцию по n, предполагая, что теорема 1 верна для G_{n-4}. Корректность такого расширенного предположения индукции, когда мы предполагаем, что не только наше предложение, но и теорема 1 выполняется для группы G_{n-4}, следует из леммы 9. Теперь из леммы 8 вытекает, что $\operatorname{wdeg} M \geq n-4$, если ограничение $M|H$ имеет композиционный фактор N с неспециальным весом $\omega(N)$.

Для построения нужного фактора $N \in \operatorname{Irr}(M|H)$ используется следующая схема. Положим $\omega_H = \omega|H$. Если вектор $m \in M$ примитивен относительно H, очевидно, что он порождает неразложимый H-модуль со старшим весом $\omega_H(m)$ и, следовательно, $L(\omega_H(m)) \in \operatorname{Irr}(M|H)$. Легко видеть, что вектор m примитивен относительно H, если его фиксируют подгруппы $\mathcal{X}_i$ с $i \neq 4$ и $\mathcal{X}_\beta$. Очевидно, что ненулевой вектор старшего веса порождает неразложимый H-модуль со старшим весом ω_H и поэтому $L(\omega_H) \in \operatorname{Irr}(M|H)$. При $j < n$ и $a_j = 1$ построим вектор $m = v(4, j)$. Положим $\mu = \omega_H(m)$. По лемме 4 подгруппа $\mathcal{X}_i$ сохраняет m при $i \neq 4$. Поскольку $\beta = \alpha_3 + 2\alpha_4 + \ldots + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n$, группа $\mathcal{X}_\beta$ также фиксирует m. Следовательно, вектор m примитивен относительно H, а значит, $L(\mu) \in \operatorname{Irr}(M|H)$. Сначала мы выясним, когда вес ω_H неспециален, и решим вопрос в этом случае. Затем попытаемся построить вектор m с неспециальным весом μ. Часто не удается построить подходящие векторы этого вида и приходится использовать более сложные конструкции, чтобы получить примитивные для H векторы с неспециальными весами. Некоторые из этих конструкций основаны на лемме 5. Мы находим вектор $m = v(4, j)$ с $\langle \omega(m), \alpha_3 \rangle = 2$, если $j \geq 4$, и с $\langle \omega(m), \alpha_5 \rangle = 2$, если $j \leq 4$ (подчеркнем, что при $j = 4$ возможны оба варианта). Затем положим $t = X_{-3}m$ или $X_{-5}m$ соответственно. По лемме 5 вектор $t \neq 0$ и подгруппы $\mathcal{X}_k$ при $k \neq 4$ его сохраняют. Поскольку $j < n$, очевидно, что $\mathcal{X}_\beta$ тоже фиксирует t. Следовательно, t примитивен для H. Положим $\delta = \omega_H(t)$. Если вес δ неспециален, то все доказано. В некоторых случаях используются технически более сложные рассуждения.

Из наших предположений о нумерации фундаментальных весов групп $G_n(i_1, \ldots, i_k)$ следует, что $\omega_n|\Gamma = \omega_{n-1}$. В некоторых случаях мы строим композиционный фактор $F \in \operatorname{Irr}(M|\Gamma)$ с $\operatorname{wdeg} F \geq n-4$ и применяем предложение 1. По лемме 4, если $1 \leq k \leq n-1$ и $a_k = 1$, то вектор $u = v(n-1, k) \neq 0$ и подгруппы $\mathcal{X}_l$ с $l < n-1$ сохраняют его. Очевидно, что $\mathcal{X}_n$ фиксирует u. Поэтому вектор u примитивен для Γ. Положим $\nu = \omega_\Gamma(u)$. Тогда $L(\nu) \in \operatorname{Irr}(M|\Gamma)$. Из предложения 1 следует, что $\operatorname{wdeg} M \geq \operatorname{wdeg} L(\nu)$. Обозначения m, μ, t, δ, u и ν сохраняются до конца доказательства.

Сначала рассмотрим один частный случай. Предположим, что $\omega = \omega_i$ при $2 \leq i \leq 4$. Пусть $u = v(n-1, i)$. Тогда $\nu = \omega_{i-1} + \omega_{n-1}$. Из леммы 6 следует, что $\operatorname{wdeg} L(\nu) \geq n - i$. Значит, $\operatorname{wdeg} M \geq n - 4$.

Теперь пусть $\omega \neq \omega_i$ с $i \leq 4$. Здесь в большинстве случаев мы строим композиционный фактор $N \in \operatorname{Irr}(M|H)$ с неспециальным весом $\omega(N)$, но иногда мы рассматриваем ограничение $M|\Gamma$ и применяем лемму 6 и предложение 1, как выше.

Положим $\lambda = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3$ и $\lambda' = \sum_{i=5}^n a_i\omega_i$. Тогда $\omega = \lambda + a_4\omega_4 + \lambda'$. Заметим, что вес ω_H неспециален, если не выполняется следующее условие:

$$\lambda \in \{0, \omega_1, \omega_3\} \quad \text{или} \quad \lambda' \in \{0, \omega_5, \omega_{n-1}, \omega_n\}. \tag{3}$$

Значит, мы можем и будем предполагать, что справедлива формула (3). Заметим, что λ и λ' не могут оба равняться 0, поскольку $\omega \neq 0$ или ω_4. Так как графовый морфизм не изменяет $\operatorname{wdeg} M$, можно считать, что

$$a_{n-1} \geq a_n. \tag{4}$$

Поэтому $\lambda' \neq \omega_n$.

Необходимость нахождения специального доказательства предложения в характеристике 2 связана, главным образом, со следующими обстоятельствами. При доказательстве аналогичного факта в [1, предложение 4.1] после сведения к случаю, когда справедлива формула (3), во многих ситуациях строился описанный выше вектор m с $b_l(\mu) = 2$ для некоторого $l \in \{3, 5 \ldots, n-1, n\}$. В нечетной характеристике из этого сразу же следует, что $\omega_{H_i}(m) \notin \Omega(H_i)$ для $i = 1$ или 2. Но это не так при $p = 2$.

I. Пусть $a_4 = 1$.

1. Предположим, что $\lambda = 0$. Тогда $\omega = \omega_4 + \sum_{i=5}^n a_i\omega_i$. Выберем минимальный индекс $i > 4$, для которого $a_i = 1$. Ввиду предположения (4) $i \neq n$. Положим $m = v(4, i)$. Заметим, что $b_3(\mu) = 2$, и положим $t = X_{-3}m$. Тогда $b_2(\delta) = 1$. Для $i < n-2$ вес δ неспециален, поскольку $b_{i+1}(\delta) \neq 0$.

Пусть $i = n-2$. Согласно (4), имеем $\omega = \omega_4 + \omega_{n-2} + \rho$, где $\rho \in \{0, \omega_{n-1}, \omega_{n-1} + \omega_n\}$. Поэтому $b_5(\delta) = 1$; $b_n(\delta) = 1$ при $\rho = 0$ или ω_{n-1}; и $b_{n-1}(\delta) = b_n(\delta) = 2$ при $\rho = \omega_{n-1} + \omega_n$. Следовательно, при $i = n-2$ вес δ неспециален во всех случаях.

Теперь предположим, что $i = n-1$, т.е. $\omega = \omega_4 + \omega_{n-1} + \rho$ при $\rho \in \{0, \omega_n\}$. Если $\rho = 0$, то $b_5(\delta) = b_n(\delta) = 1$, а значит, вес δ неспециален. При $\rho = \omega_n$ положим $m = X_{-4}v^+$. Тогда вес μ неспециален, поскольку $b_3(\mu) = 1$, $\langle \mu, \beta \rangle = 3$ и $b_5(\mu) = b_n(\mu) = 1$.

2. Пусть $\lambda = \omega_1$. Согласно (4), $\lambda' \neq \omega_5 + \omega_n$.

(a) Сначала предположим, что $\lambda' \notin \{0, \omega_5, \omega_5+\omega_{n-1}, \omega_5+\omega_{n-1}+\omega_n\}$. Выберем m, как выше. Число $b_1(\mu) = b_3(\mu) = 1$. Из наших предположений относительно λ' вытекает, что $\mu_2 \notin \Omega(H_2)$ (отдельно рассмотрим случаи $a_5 = 0$ и $a_5 = 1$). Следовательно, вес μ неспециален.

(b) Пусть $\omega = \omega_1 + \omega_4 + \omega_5$, $\omega_1 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_{n-1}$ или $\omega_1 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_{n-1} + \omega_n$. Положим $t = X_{-5}X_{-4}v^+$. Вес δ неспециален, поскольку $b_1(\delta) = b_3(\delta) = b_6(\delta) = 1$.

(c) Предположим, что $\omega = \omega_1 + \omega_4$. Положим $u = v(n-1, 4)$. Тогда $\nu = \omega_\Gamma(u) = \omega_1+\omega_3+\omega_{n-1}$. Из леммы 6 следует, что $\operatorname{wdeg} L(\nu) \geq n-4$. Используя рассуждения об ограничении $M|\Gamma$ в начале доказательства, заключаем, что $\operatorname{wdeg} M \geq n-4$.

3. Затем пусть $\omega = \omega_3$.

(a) Предположим, что $a_5 = 1$. Положим

$$s = X_{-4,3}X_{-3}X_{-5}v^+$$

и $\sigma = \omega_H(s)$. Вектор s не равен нулю по лемме 2. Легко видеть, что $\sigma + \alpha_3$ и $\sigma + \alpha_5 \notin \Lambda(M)$. Следовательно, вектор s примитивен для H. Поскольку $b_2(\sigma) \neq 0$ и $b_6(\sigma) \neq 0$, вес σ неспециален.

(b) Пусть $a_5 = 0$. Положим $m = v(4,3)$ и $t = X_{-5}m$. Тогда вес δ неспециален, так как $b_2(\delta)$ и $b_6(\delta) \neq 0$.

Теперь можно считать, что $\lambda \notin \{0, \omega_1, \omega_3\}$, поскольку эти веса уже были рассмотрены.

4. Пусть $\lambda' = 0$.

(a) Если $a_3 = 1$, рассуждаем, как в пункте 3(b).

(b) Пусть $a_3 = 0$. Отсюда следует, что $\omega = \omega_2 + \omega_4$ или $\omega_1 + \omega_2 + \omega_4$. Положим $m = v(4,2)$ и $t = X_{-5}m$. Тогда $b_3(\delta) = \langle \delta, \beta \rangle = b_6(\delta) = 1$. Следовательно, вес δ неспециален.

5. Предположим, что $\lambda' = \omega_5$. Положим $m = v(4,5)$. Тогда $b_6(\mu) \neq 0$. Если $a_3 = 0$, то $a_2 = 1$ ввиду предположений о λ. Отсюда следует, что $b_2(\mu) = 3$. Если $a_3 = 1$, то $b_3(\mu) = 3$ и $b_i(\mu) = 1$ при $i = 1$ или 2. В обоих случаях заключаем, что вес μ неспециален.

6. Пусть $\lambda' = \omega_{n-1}$. Предположим сначала, что $\lambda \neq \omega_1 + \omega_3$. Положим $m = X_{-4}v^+$. Тогда $b_5(\mu) = b_{n-1}(\mu) = 1$. Если $a_3 = 0$, то $b_1(\mu)$ или $b_2(\mu) = 1$ и $b_3(\mu) = 1$. Если $a_3 = 1$, то $a_2 = 1$ и $b_2(\mu) = 1$. В обоих случаях вес μ неспециален.

Если $\omega = \omega_1 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_{n-1}$, рассуждаем, как в пункте 3(b).

Итак, при $a_4 = 1$ все возможности рассмотрены.

II. Теперь пусть $a_4 = 0$. Тогда $\lambda \neq 0$, если $\lambda' = 0$ или ω_{n-1}, так как $\omega \notin \Omega_2(G_n)$.

1. Предположим, что $\lambda = 0$. Выберем минимальный индекс i, для которого $a_i = 1$. Заметим, что $i \geq 5$.

(a) Сначала пусть $\omega = \omega_i$. Тогда $i < n - 1$. Положим $m = v(4, i)$. Имеем $b_3(\mu) = \langle \mu, \beta \rangle = b_{i+1}(\mu) = 1$ и $b_{n-1}(\mu) = b_n(\mu) = 1$ при $i = n-2$. Значит, во всех случаях вес μ неспециален.

Теперь пусть $\omega \neq \omega_i$. Фиксируем индекс $j > i$, такой, что $a_j = 1$ и $a_k = 0$, если $i < k < j$.

(b) Предположим, что $i < n-2$. Тогда $\omega = \omega_i + \omega_j + \dots$. Согласно (4), $j < n$. Положим $m = v(4, j)$ и $t = X_{-3}m$. Имеем $b_2(\delta) = b_{i+1}(\delta) = 1$. Следовательно, вес δ неспециален.

(c) Если $i = n-2$, то $j = n-1$. Предположим, что $\omega = \omega_{n-2} + \omega_{n-1}$. Пусть $m = v(4, j)$ и $s = X_{-n}X_{-3}m$. Из лемм 2 и 4 следует, что

$$X_n X_{n-1} X_{n-2} \dots X_4 s = v(3, n-2) \neq 0.$$

Значит, $s \neq 0$. Поскольку подгруппа $\mathcal{X}_\beta$ коммутирует с X_{-n}, заключаем, что $\mathcal{X}_\beta$ фиксирует s. Применяя лемму 2, получаем $X_3 s = X_n s = 0$. Из леммы 4 следует, что подгруппа $\mathcal{X}_k$ сохраняет s при $k \neq 3, 4, n$, так как $\mathcal{X}_k$ коммутируют с X_{-n} и X_{-3}. Поэтому вектор s примитивен относительно H. Положим $\sigma = \omega_H(s)$. Тогда $b_2(\sigma) = b_{n-2}(\sigma) = 1$. Следовательно, σ неспециален.

(d) Пусть $\omega = \omega_{n-2} + \omega_{n-1} + \omega_n$. Положим

$$l = X_{-4,3} \dots X_{-(n-2),3} X_{-(n-1)} X_{-n} v^+.$$

Применяя несколько раз лемму 2, получаем, что $l \neq 0$. Очевидно, что $\mathcal{X}_\beta$ сохраняет l. Мы утверждаем, что группы $\mathcal{X}_k$ при $k \neq 4$ фиксируют l. При $k < 4$ это очевидно. Пусть $5 \leq k \leq n$. Достаточно доказать, что веса $\tau_{k,d} = \omega(l) + d\alpha_k \notin \Lambda(M)$ при $d > 0$. Сначала предположим, что $k \leq n - 2$. Пусть

$$\rho_{k,d} = \omega - \alpha_n - \alpha_{n-1} - 3\alpha_{n-2} - \dots - 3\alpha_{k-1} + d\alpha_k.$$

Легко заметить, что веса $\tau_{k,d}$ и $\rho_{k,d}$ лежат в одной орбите относительно группы Вейля группы G_n. Число $\langle \rho_{k,d}, \alpha_{k-1}\rangle < -3$. Теперь очевидно, что $\rho_{k,d} \notin \Lambda(M)$, а значит, $\tau_{k,d} \notin \Lambda(M)$.

При $k = n-1$ или n рассуждения аналогичны. Здесь достаточно предполагать, что $d = 1$. Легко видеть, что веса $\omega(l) + \alpha_k$ и

$$\rho_k = \omega - \alpha_n - \alpha_{n-1} - 3\alpha_{n-2} + \alpha_k.$$

лежат в одной орбите относительно действия группы Вейля. Имеем $\langle \rho_k, \alpha_{n-2}\rangle = -4$ и заключаем, что $\rho_k \notin \Lambda(M)$. Это завершает доказательство утверждения о подгруппах $\mathcal{X}_k$.

Следовательно, вектор l примитивен относительно H. Вес $\theta = \omega_H(l)$ неспециален, так как $b_3(\theta) = 3$, $\langle \theta, \beta\rangle = 1$ и $b_{n-1}(\theta) = b_n(\theta) = 2$.

(e) Наконец, пусть $\omega = \omega_{n-1} + \omega_n$. Положим

$$w = X_{-4,2} \dots X_{-(n-2),2} X_{-(n-1)} X_{-n} v^+.$$

Рассуждая, как в пункте (d), можно показать, что подгруппы $\mathcal{X}_\beta$ и $\mathcal{X}_k$ при $k \neq 4$ фиксируют вектор w. Положим $s = X_{-3}w$. Используя леммы 2 и 3 и применяя лемму 4 к неприводимому Г-модулю, порожденному v^+, получаем, что

$$X_{n-1}X_{n-2} \dots X_4 s = X_{-3}X_{-4} \dots X_{-(n-2)} X_{-n} v^+ \neq 0.$$

Поэтому $s \neq 0$. По лемме 2 $X_3 s = 0$. Группы $\mathcal{X}_\beta$ и $\mathcal{X}_k$ при $k \neq 3, 4$ фиксируют s, поскольку они коммутируют с X_{-3}. Следовательно, вектор s примитивен для H. Положим $\sigma = \omega_H(s)$. Тогда $b_2(\sigma) = b_{n-1}(\sigma) = b_n(\sigma) = 1$. Поэтому вес σ неспециален.

2. Предположим, что $\lambda = \omega_1$. Тогда $\omega = \omega_1 + \sum_{k=5}^n a_k\omega_k$. Выберем минимальный индекс $i > 4$, для которого $a_i = 1$.

(a) Если $i < n-2$ или $\omega = \omega_1 + \omega_{n-2}$, положим $m = v(4, i)$. Вес μ неспециален, так как $b_1(\mu) = b_3(\mu) = 1$, $b_{i+1}(\mu) \neq 0$ и $b_{n-1}(\mu) = b_n(\mu) = 1$, если $\omega = \omega_1 + \omega_{n-2}$.

(b) Теперь пусть $i \geq n-2$ и $\omega \neq \omega_1 + \omega_{n-2}$. Тогда $a_{n-1} = 1$ согласно (4). Применяя предложение 1 и леммы 3 и 6, заключаем, что $\operatorname{wdeg} M \geq n-2$.

3. Пусть $\lambda = \omega_3$. Как и выше, выберем минимальный индекс $i > 4$, для которого $a_i = 1$. Согласно (4), $i < n$. Положим

$$s = X_{-4,2} \dots X_{-(i-1)} X_{-i} X_{-3} v^+$$

и $\sigma = \omega_H(s)$. По леммам 2 и 4 вектор $X_3X_4s = v(4,i) \neq 0$. Следовательно, $s \neq 0$. Заметим, что

$$\langle \sigma + \alpha_3, \alpha_4 \rangle = \langle \sigma + \alpha_5, \alpha_4 \rangle = -3.$$

Поэтому $\sigma + \alpha_3, \sigma + \alpha_5 \notin \Lambda(M)$, а значит, $\mathcal{X}_3$ и $\mathcal{X}_5$ фиксируют s. При $5 < k \leq i$ заключаем, что

$$X_k X_{-(k-1)} X_{-k} \dots X_{-i} X_{-3} v^+ = 0,$$

так как вес этого вектора не принадлежит $\Lambda(M)$. Следовательно, $X_k s = 0$ и $\mathcal{X}_k$ сохраняет s. Отсюда следует, что вектор s примитивен относительно H. Число $b_2(\sigma) = 1$. При $i < n-2$ вес σ неспециален, поскольку $b_{i+1}(\sigma) = 1$. Если $i = n-2$ и $a_{n-1} = 0$, то $b_5(\sigma) = b_{n-1}(\sigma) = 1$ и вес σ неспециален. Если $a_{n-1} = 1$, из предложения 1 и лемм 3 и 6 следует, что $\operatorname{wdeg} M \geq n-4$.

Наконец, предположим, что $\lambda \notin \{0, \omega_1, \omega_3\}$. Тогда согласно (3) и (4), $\lambda' \in \{0, \omega_5, \omega_{n-1}\}$.

4. Пусть $\lambda' = 0$. Тогда $\omega = \sum_{i=1}^{3} a_i \omega_i$ и можно считать, что $\omega \neq \omega_i$, так как такие веса уже были рассмотрены.

(a) Предположим, что $a_3 = 1$. Если $a_2 = 1$, возьмем $m = v(4,2)$. Если $a_2 = 0$, то $a_1 = 1$, положим $m = v(4,1)$. В обоих случаях пусть $t = X_{-5}m$. Тогда $b_5(\mu) = 2$ и $b_2(\delta) = b_6(\delta) = 1$. Следовательно, δ неспециален.

(b) Пусть $a_3 = 0$. Тогда $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Положим $w = v(n-1,1)$ и $s = X_{-n}w$. Применяя леммы 3 и 4 к Г-модулю, порожденному v^+, заключаем, что

$$X_1 X_2 \dots X_{n-2} s = X_{-n} X_{-(n-2)} \dots X_{-3} X_{-2} v^+ \neq 0.$$

Следовательно, $s \neq 0$. По лемме 4 вектор w примитивен относительно Г. Значит, группы $\mathcal{X}_k$ при $k \leq n-2$ фиксируют s, так как они коммутируют с X_{-n}. По лемме 2 $X_n s = 0$. Поэтому подгруппа $\mathcal{X}_n$ сохраняет s и s примитивен относительно Г. Из леммы 6 следует, что $\operatorname{wdeg} M \geq n-3$, так как $\omega_\Gamma(s) = \omega_1 + \omega_{n-2}$.

5. Предположим, что $\omega = \sum_{i=1}^{3} a_i \omega_i + \omega_5$.

При $a_2 = 1$ положим $m = v(4,5)$. Тогда вес μ неспециален, поскольку $b_2(\mu) = b_6(\mu) = 1$.

Если $a_2 = 0$, то $\omega = \omega_1 + \omega_3 + \omega_5$. Положим

$$s = X_{-4,2}X_{-3}X_{-5}v^+$$

и $\sigma = \omega_H(s)$. Несколько раз применяя лемму 2, получаем, что $w \neq 0$. Так как $\omega - \alpha_3 - 2\alpha_4$ и $\omega - \alpha_5 - 2\alpha_4 \notin \Lambda(M)$, то $X_3 w = X_5 w = 0$. Теперь очевидно, что вектор w примитивен относительно H. Поскольку $b_2(\sigma) = b_6(\sigma) = 1$, вес σ неспециален.

6. Если $\omega = \sum_{i=1}^{3} a_i\omega_i + \omega_{n-1}$, то из предложения 1 и лемм 3 и 6 следует, что wdeg $M \geq n-4$. Предложение доказано. $\square$

Это завершает доказательство теоремы 1.

Литература

1. А. А. Баранов, А. А. Осиновская, И. Д. Супруненко, *Модулярные представления классических групп с малыми кратностями весов.* — Современная математика и ее приложения (алгебра), Ин-т Кибернетики АН Грузии, Тбилиси **60** (2008), 163–175.
2. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Гл. IV–VI, М., Мир, 1972.
3. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Гл. VII–VIII, М., Мир, 1978.
4. А. Е. Залесский, И. Д. Супруненко, *Представления размерностей* ($p^n \pm 1$) *симплектической группы степени* $2n$ *над конечным полем.* — Вести АН БССР, сер. физ.-мат. наук no. 6 (1987), 9–15.
5. A. A. Baranov, I. D. Suprunenko, *Branching rules for modular fundamental representations of symplectic groups.* — Bull. London Math. Soc. **32** (2000), 409–420.
6. A. Borel, *Properties and linear representations of Chevalley groups.* — In: Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups (eds. A. Borel et al.), Lect. Notes Math. **131** (1970), 1–55.
7. J. C. Jantzen, *Darstellungen halbeinfacher algebraischer Gruppen und zugeordnete kontravariante Formen.* — Bonner Math. Schr. **67** (1973).
8. G. M. Seitz, *The maximal subgroups of classical algebraic groups.* — Memoirs of the AMS **365** (1987), 1–286.
9. S. Smith, *Irreducible modules and parabolic subgroups.* — J. Algebra **75** (1982), 286–289.
10. R. Steinberg, *Representations of algebraic groups.* — Nagoya Math. J. **22** (1963), 33–56.
11. I. D. Suprunenko, *On Jordan blocks of elements of order p in irreducible representations of classical groups with p-large highest weights.* — J. Algebra **273** (1997), 589–627.

Osinovskaya A. A., Suprunenko I. D. Representations of algebraic groups of type D_n in characteristic 2 with small weight multiplicities.

Lower estimates for the maximal weight multiplicities in irreducible representations of the algebraic groups of type D_n in characteristic 2 are

found. If $n \geq 8$, then either such multiplicity is at least $n-4-[n]_4$, where $[n]_4$ is the residue of n modulo 4, or all weight multiplicities are equal to 1. For groups of types B_n and D_n in odd characteristic and of type C_n in characteristic > 7 similar results were obtained earlier.

Институт математики НАН Беларуси
E-mail: anna@im.bas-net.by

Поступило 20 марта 2009 г.

E-mail: suprunenko@im.bas-net.by