



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Безверхний, А. Е. Устьян, Обобщения теорем В. Магнуса и М. Д. Гриндлин-
гера,
Чебышевский сб., 2013, том 14, выпуск 3, 20–33

<https://www.mathnet.ru/cheb285>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

21 апреля 2025 г., 04:57:27



ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 3 (2013)

УДК 519.14

ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМ В. МАГНУСА
И М. Д. ГРИНДЛИНГЕРА

В. Н. Безверхний, А. Е. Устьян (г. Тула)

Аннотация

В настоящей работе получены обобщения известной теоремы В. Магнуса об изоморфизме групп с одним определяющим соотношением и теоремы Гриндлингера об изоморфизме групп с условием $C'(\frac{1}{6})$ на группы $C(6)$; $C(4)$ и $T(4)$ и $C(3)$, $T(6)$.

Из доказанной теоремы получены следствия на группе с малым сокращением.

Ключевые слова: симметризованное множество, определяющие соотношения, изоморфизм.

GENERALIZATIONS OF THEOREMS
OF MAGNUS AND GREENDLINGER

V. N. Bezverkhniy, A. E. Ustyan (Tula)

Abstract

We obtain the generalizations of the well-known Magnus theorem on isomorphism of groups with one defining relation and Greendlinger's theorem on isomorphism of groups with condition $C'(\frac{1}{6})$ on the groups $C(6)$; $C(4)$ and $T(4)$, $C(3)$ and $T(6)$.

Key words: symmetrized set, defining relations, isomorphism.

Пусть G — группа, заданная системой образующих a_i ($i = 1, \dots, n$) и множеством \mathfrak{R} определяющих слов R_j ($j = 1, \dots, m$).

Множество \mathfrak{R} предполагается симметризованным, то есть в \mathfrak{R} все определяющие слова попарно различны, циклически несократимы и для любого определяющего слова все его циклические перестановки, а также обратные к ним слова принадлежат \mathfrak{R} .

Слово U назовем куском относительно \mathfrak{R} , если существуют два определяющих слова R_i, R_j , $i \neq j$ из \mathfrak{R} , что $R_i = UX$, $R_j = UY$ ($=$ - графическое равенство), где X, Y - некоторые слова в алфавите группы G .

Будем говорить, что конечно определенная группа G :

$$G = \langle a_1, \dots, a_n | R_1, R_2, \dots, R_m \rangle \quad (1)$$

с симметризованным множеством определяющих соотношений $\mathfrak{R} = \{R_j | j = \overline{1, m}\}$ удовлетворяет условию $C(p)$, если каждое определяющее соотношение из \mathfrak{R} может быть представлено произведением минимум p -кусков.

Будем говорить, что G удовлетворяет условию $T(q)$, если для любых R_1, R_2, \dots, R_h , $3 \leq h < q$, таких, что R_i, R_{i+1} , ($1 \leq i < h - 1$) и R_h, R_1 , — не взаимно обратны, по крайней мере, одно из произведений: $R_1 R_2, R_2 R_3, \dots, R_{h-1} R_h, R_h R_1$ — приведено.

В дальнейшем будем рассматривать группы G , удовлетворяющие условию $C(6)$, либо $C(4)$ и $T(4)$, либо $C(3)$ и $T(6)$.

Будем говорить, что группа G , заданная на множестве образующих $\{a_j | j = \overline{1, n}\}$ с симметризованным множеством определяющих соотношений $\mathfrak{R} = \{R_j | j = \overline{1, m}\}$ удовлетворяет условию $C'(\lambda)$, если для любого $R \in \mathfrak{R}$, $R = UX$, где U — кусок, $|U| < \lambda|R|$, где $|w|$ — длина слова w в свободной группе $F = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

В. Магнус для групп с одним определяющим соотношением доказал следующую теорему [3]:

ТЕОРЕМА 1. (Магнус). Пусть $G = \langle a_1, \dots, a_n; R \rangle$ и $H = \langle a_1, \dots, a_n; S \rangle$ группы с одним определяющим соотношением. Отображение $a_i \rightarrow a_i$, ($i = \overline{1, n}$) определяет изоморфизм группы G на группу H тогда и только тогда, когда слова R и S^ε ($\varepsilon = \pm 1$) сопряжены в свободной группе $F = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

М. Д. Гриндлинер [2] получил обобщение этой теоремы на случай групп с условием $C'(1/6)$.

ТЕОРЕМА 2. (Гриндлинер). Пусть группы G и H с условием $C'(1/6)$, заданные в одном алфавите a_1, a_2, \dots, a_n с симметризованным множеством \mathfrak{R} и \mathfrak{S} определяющих слов соответственно. Тогда отображение $a_i \rightarrow a_i$, ($i = \overline{1, n}$), определяет изоморфизм G на H в том и только в том случае, когда $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$.

В статье [4] Е. В. Кашенцевым доказана

ТЕОРЕМА 3. (Кашенцев). Пусть G и H группы, заданные на одном алфавите a_1, a_2, \dots, a_n симметризованным множеством определяющих соотношений, удовлетворяющих одновременно условию $C'(1/5)$ либо $C'(1/3)$ и $T(4)$. Тогда отображение $a_i \rightarrow a_i$, ($i = \overline{1, n}$), определяет изоморфизм G на H в том и только в том случае, когда $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$.

В [4] приведены примеры группы с условием $\lambda = 1/5$ и группы с условием $\lambda = 1/3$ и $T(4)$, для которых теорема 3 несправедлива.

Основной целью данной статьи — обобщение теоремы Магнуса на группы с условием $C(6)$, $C(4)$ и $T(4)$, и $C(3)$ и $T(6)$.

Пусть $G = \langle a_i, i = \overline{1, n} | R_j, j = \overline{1, m} \rangle$, где $\mathfrak{R} = \{R_j, j = \overline{1, m}\}$ - симметризованное множество, удовлетворяющее условию $C(6)$ либо $C(4)$ и $T(4)$, либо $C(3)$ и $T(6)$.

Предполагаем, что понятие планарной карты, диаграммы, обозначаемой в дальнейшем M , приведенной диаграммы, последовательной части границы диаграммы M , компоненты диаграммы M , границы области D из M — известны [3].

Обозначим через ∂M — граничный цикл M , через ∂D — граничный цикл области D , через $\varphi(\partial M)$ — метку граничного цикла диаграммы M , $\varphi(\partial D)$ — метку области D .

Будем говорить, что диаграмма M рассматривается над $\mathfrak{R} = \{R_i, i = \overline{1, m}\}$, где \mathfrak{R} — симметризованное множество, $\mathfrak{R} \subset F = \langle a_i, i = \overline{1, n} \rangle$ (F — свободная группа), если метка каждой области D — $\varphi(\partial D)$ принадлежит \mathfrak{R} .

Если области D_1, D_2 из M пересекаются по ребру e , $\partial D_1 \cap \partial D_2 = e$ то $\varphi(e)$ есть кусок каждого из соотношений: $(\varphi(\partial D_1))^*$, $(\varphi(\partial D_2))^*$, $(\varphi(\partial D_i))^* \in \mathfrak{R}$, $i = 1, 2$; через W^* обозначается циклическая перестановка слова W .

Через $d(D)$ обозначим число ребер в граничном цикле ∂D , меткой каждого ребра является кусок определяющего соотношения $\varphi(\partial D)$.

Очевидно, что $d(D) \geq p$. Область D является граничной в M , если $\partial D \cap \partial M \neq \emptyset$.

Граничная область D называется простой, если $\partial D \cap \partial M$ — связное множество, являющееся последовательной частью границы ∂M .

Вершина, ребро или область из M , не являющиеся граничными, называются внутренними.

Через $i(D)$ обозначим число внутренних ребер области D .

Определим граничные ребра диаграммы M следующим образом:

Разобьем ∂M на отрезки, высекаемые на ней граничными областями.

Меткой каждого из этих отрезков является подслово $\varphi(\partial M \cap \partial D)$ определяющего соотношения $\varphi(\partial D)$, которое представляем в виде произведения минимального числа кусков, поставим в соответствие им ребра пути $\partial M \cap \partial D$, получим разбиения ∂M на ребра, связное с множеством \mathfrak{R} . Через $|\partial M|$ — будем обозначать число ребер в граничном цикле ∂M . Если ℓ произвольный путь в M , то через $|\ell|$ — будем обозначать число ребер в ℓ , через $\|\varphi(\partial M)\|$ — число равное $|\partial M|$ и назовем его слоговой длиной граничного цикла диаграммы M .

Пусть $W = 1$ в G , $G = \langle a_i, i = \overline{1, n} | \mathfrak{R} \rangle$, W — циклически несократимое слово в свободной группе $F = \langle a_i, i = \overline{1, n} \rangle$ и пусть $W = 1$ в G . Тогда на основании теоремы ван Кампена [3] существует связная односвязная диаграмма M над \mathfrak{R} с граничной меткой W .

§1. Пусть $G = \langle a_i, i = \overline{1, n} | R_j, j = \overline{1, m} \rangle$ конечно определенная группа, $\mathfrak{R} = \{R_j, j = \overline{1, m}\}$ — симметризованное множество, удовлетворяющее условию $C(6)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. [5]. Граничная область D в диаграмме M называется

деновской, если

а) $\partial D \cap \partial M$ - связное множество, является последовательной частью границы ∂M ;

б) $i(D) \in \{0, 1, 2\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. [5]. Поддиаграмма $\Pi = \bigcup_{i=1}^k D_i$ диаграммы M называется полосой, если

i) множество $\partial D_i \cap \partial M, i = \overline{1, n}$, связано и является последовательной частью границы ∂M ;

ii) множество $\partial \Pi \cap \partial M$ связно и является последовательной частью границы ∂M ;

iii) $i(D_1) = i(D_k) = 3$;

iv) при $k > 2, i(D_j) = 4, j = 2, 3, \dots, k - 1$;

v) $\partial D_i \cap \partial D_{i+1}$ - ребро, $i = 1, 2, \dots, k - 1$;

vi) $\partial D_i \cap \partial D_j = \emptyset$ при $|i - j| > 1$.

ЛЕММА 1. [5] Если связная односвязная диаграмма M над \mathfrak{R} , \mathfrak{R} - симметризованное множество с условием $C(6)$, не содержащий деновских областей, то она содержит минимум три непересекающиеся полосы.

ЛЕММА 2. Пусть M связная односвязная приведенная диаграмма над $\mathfrak{R} = \{R_i, i = \overline{1, t}\}$, \mathfrak{R} - симметризованное множество, удовлетворяющее условию $C(6)$ и содержащее более одной области. Тогда слоговая длина граничного цикла ∂M диаграммы M больше слоговой длины граничного цикла любой области D из M .

Доказательство. Если M состоит из двух областей, то утверждение леммы очевидно. Допустим, что M гомеоморфно кругу и утверждение леммы справедливо для любого k , где k - число областей диаграммы $M, 1 < k \leq r - 1$. Пусть M содержит r -областей.

Для граничных областей диаграммы M , удовлетворяющих условию $C(6)$, пересечение которых с ∂M есть связное множество, являющееся последовательной частью в ∂M , имеет место неравенство [3]:

$$\sum_M^* = (4 - i(D)) \geq 6 \tag{2}$$

Пусть M содержит деновскую область D_1 . Тогда $i(D_1) \in \{0, 1, 2\}$.

Допустим, что $i(D_1) = 0$. Так как M содержит более одной области, то удалив область D_1 , получим диаграмму M_1 , слоговая длина ∂M_1 больше слоговой длины любой области из D из M_1 , поэтому $|\partial D_1| < |\partial M|$ и в данной случае лемма справедлива.

Пусть $i(D_1) = 1$ либо $i(D_1) = 2$. Из неравенства (2) следует, что M может содержать деновскую область D_2 с $i(D_2) = 1$ либо $i(D_2) = 2$. Так как $d(D_1) \geq 6, d(D_2) \geq 6$, то $|\partial D_2 \cap \partial M| \geq 4$, поэтому $|\partial D_1| < |\partial M|$. Удалим

из M область D_1 , получим диаграмму M_1 , для которой в силу индуктивного предположения справедливо утверждение леммы. Поэтому из неравенства: $|\partial M_1| < |\partial M|$ следует, что для любой области $D \in M$: $|\partial D| < |\partial M|$.

Допустим, что диаграмма M содержит только одну деновскую область D_1 . Тогда из неравенства (2) следует, что M содержит граничную область D_2 с $i(D_2) = 3$, так как $d(D_2) \geq 6$, и $|\partial D_2 \cap \partial M| \geq 3$, то $|\partial D_1| < |\partial M|$.

Удалив из M область D_1 , получим диаграмму M_1 , содержащую число областей $r - 1$. В результате свели рассматриваемый случай к предыдущему.

Пусть диаграмма M не содержит деновских областей. Тогда она содержит минимум три непересекающихся полосы (лемма 1). Рассмотрим две из них: $\Pi_1 = \{D'_i, i = \overline{1, m_1}\}$, $\Pi_2 = \{D''_i, i = \overline{1, m_2}\}$. Из определения полосы следует, что $i(D'_1) = 3$, $|\partial \Pi_2 \cap \partial M| \geq 6$. Поэтому $|\partial D'_1| < |\partial M|$.

Удалив из M область D'_1 , получим диаграмму M_1 , содержащую число областей $r - 1$, и следовательно, удовлетворяющую заключению леммы. Поэтому, так как $|\partial M_1| < |\partial M|$, для любой области $D \in M$ имеем $|\partial D| < |\partial M|$.

Допустим, что M состоит из нескольких компонентов K_j , $j = \overline{1, \ell}$. Каждая компонента гомеоморфна кругу. Рассмотрим произвольную компоненту, обозначим ее через K . Пусть V_1, V_2, \dots, V_q , $1 \leq q \leq \ell - 1$ вершины принадлежащие ∂K , из которых выходят пути γ_i , $i = \overline{1, q}$, соединяющие K соответственно с компонентами K'_i , $1 \leq i \leq q$. Если K является областью D , то $|\partial D| \leq |\partial K|$, так как некоторые ребра области D могут делиться в K точками V_j . Пусть K содержит более чем одну область. Удалим отмеченные точки V_j , $j = \overline{1, q}$, получим диаграмму K' , для любой области D , которой $|\partial D| < |\partial K'|$, и так как $|\partial K'| \leq |\partial K|$ и M содержит более одной области, то $\forall D, D \in M$: $|\partial D| < |\partial M|$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $G = \langle X | \mathfrak{R} \rangle$, где $\mathfrak{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$ – симметризованное множество определяющих соотношений группы G . Обозначим через $K(\mathfrak{R})$ – множество всевозможных кусков соотношений \mathfrak{R} .

Пусть $G = \langle a_1, \dots, a_n; \mathfrak{R} \rangle$, где $\mathfrak{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$ – симметризованное множество определяющих соотношений и $H = \langle a_1, \dots, a_n; \mathfrak{F} \rangle$, где $\mathfrak{F} = \{S_1, S_2, \dots, S_p\}$ – симметризованное множество определяющих соотношений.

ТЕОРЕМА 4. Пусть G и H группы заданные в одном алфавите a_1, a_2, \dots, a_n симметризованным множеством, соответственно, \mathfrak{R} и \mathfrak{F} определяющих соотношений, удовлетворяющих условию $C(6)$ и пусть отображение $\varphi : a_i \rightarrow a_i$, $i = \overline{1, n}$, определяет изоморфизм группы G на H .

Тогда $\mathfrak{R} = \mathfrak{F}$, если и только если $K(\mathfrak{R}) = K(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathfrak{R} = \mathfrak{F}$, то отображение $\varphi : a_i \rightarrow a_i$, $i = \overline{1, n}$, очевидно является изоморфизмом группы G на H и $K(\mathfrak{R}) = K(\mathfrak{F})$.

Пусть $K(\mathfrak{R}) = K(\mathfrak{F})$ и отображение $\varphi : a_i \rightarrow a_i$, $i = \overline{1, n}$ может быть продолжено до изоморфизма φ^* групп G на H . Покажем, что $\mathfrak{R} = \mathfrak{F}$.

Введем обозначения: $Z = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{F}$, $T_1 = \mathfrak{R} \setminus Z$, $T_2 = \mathfrak{F} \setminus Z$. Очевидно, что каждое из этих множеств является симметризованным.

Каждое из определяющих соотношений $R_i \in \mathfrak{R}$ группы G при изоморфизме $\varphi^* : a_i \rightarrow a_i$, $i = \overline{1, n}$ в группе H является словом равным единице; каждое определяющее соотношение $S_j \in \mathfrak{F}$ группы H в группе G также является словом равным единице в данной группе.

Поэтому каждому соотношению $R_i \in T_1$ по теореме ван Кампена [3] соответствует диаграмма $M_{R_i}(\mathfrak{F})$ над \mathfrak{F} с граничной меткой $\varphi(\partial M_{R_i}(\mathfrak{F}))$ равной R_i со слоговой длиной $|\partial M_{R_i}(\mathfrak{F})|$ с метками из \mathfrak{F} .

Аналогично, каждому $S_j \in T_2$ в группе G соответствует диаграмма $M_{S_j}(\mathfrak{R})$ над \mathfrak{R} с граничной меткой $\varphi(\partial M_{S_j}(\mathfrak{R})) = S_j$, имеющей слоговую длину $|\partial M_{S_j}(\mathfrak{R})|$ с метками из \mathfrak{R} .

Выбираем в множестве $T_1 \cup T_2$ соотношение наименьшей слоговой длины. Пусть это будет R , $M_R(\mathfrak{F})$ – диаграмма, соответствующая R в H .

Рассмотрим случай (а), когда $|\partial R| = |\partial M_R(\mathfrak{F})|$.

Очевидно, что $M_R(\mathfrak{F})$ содержит более одной области с метками из \mathfrak{F} , так как, в противном случае, существует $S_j \in \mathfrak{F}$ такое, что $R = S_j$. Однако это невозможно ввиду того, что в этом случае $R \in Z$.

Пусть $M_R(\mathfrak{F})$ содержит области D'_1, D'_2, \dots, D'_p , $p > 1$, соответственно с метками $\varphi(D'_j) = S_j$, $1 \leq j \leq p$, $S_j \in \mathfrak{F}$. Из леммы 2 следует, что $\forall j, |\partial D'_j| < |\partial M_R(\mathfrak{F})|$, поэтому слоговая длина каждого из соотношений S_j , является меткой области D'_j , $D'_j \in M_R(\mathfrak{F})$ меньше слоговой длины R . поэтому эти соотношения принадлежат Z , а следовательно множеству \mathfrak{R} . Так как $M_R(\mathfrak{F})$ – связанная односвязанная диаграмма, то она содержит либо деновскую область D'_0 с $|\partial D'_0 \cap \partial M(\mathfrak{F})| \geq 4$, либо минимум три непересекающиеся полосы (лемма 1) с областями $D'_1, D'_2, D'_3, D'_4, D'_5, D'_6$ с $i(D'_j) = 3$ и $|\partial D'_j \cap \partial M_R(\mathfrak{F})| \geq 3$ и так как $K(\mathfrak{R}) = K(\mathfrak{F})$, то $\varphi(D'_j) = R_S$, $0 \leq S \leq 6$, и $R_S \in \mathfrak{R}$. Получим, что каждое из соотношений R_S , $0 \leq S \leq 6$, имеет пересечение с соотношением R не менее чем по трем кускам, что невозможно. Поэтому $R \in Z$.

Случай (б). $|\partial R| \leq |\partial M_R(\mathfrak{F})|$. Разбиение R в H содержит больше кусков чем в G . Пусть $M_R(\mathfrak{F})$ содержит деновскую область D'_0 , $\varphi(D'_0) = S_0 \in \mathfrak{F}$. Если $iD'_0 \in \{0, 1, 2\}$, то из соотношения (2) следует, что $M_R(\mathfrak{F})$ содержит либо деновскую область D' с $i(D') \in \{0, 1, 2\}$, либо, по меньшей мере две области D'' , D''' с $i(D'' = 3)$ и $i(D''' = 3)$. Так как $K(\mathfrak{R}) = K(\mathfrak{F})$, то область D'_0 пересекается с шестью кусками R , если $i(D_0) = 0$, с пятью кусками R , если $i(D_0) = 1$ и с четырьмя кусками R , если $i(D_0) = 2$. Аналогично имеем, если D' – деновская. В случае, когда D'' и D''' области с $i(D) = 3$, каждая из них пересекается с тремя кусками M_R . В результате слоговая длина $\varphi(D'_0)$ меньше слоговой длины R . Следовательно соотношение S_0 , является меткой D'_0 , принадлежащей Z и $S_0 = R_0 \in \mathfrak{R}$. Получим, что R и R_0 имеет общее пересечение, содержащее более одного куска, что невозможно. Поэтому $R_0 = R$ и $R \in Z$.

Если диаграмма $M_R(\mathfrak{F})$ не содержит деновских областей, то согласно лемме 1, $M_R(\mathfrak{F})$ содержит минимум три непересекающиеся полосы, а следовательно

минимум шесть областей D'_1, D'_2, \dots, D'_6 с $i(D'_j) = 3 \ j = \overline{1, n}$. но каждая из них пересекается минимум по трем кускам с соотношением R . Поэтому слоговая длина $\varphi(D'_1)$ меньше слоговой длины R и следовательно принадлежит Z . Получили выше рассмотренный случай. Теорема доказана.

Пример 1.

Рассмотрим группу G с системой образующих:

$$X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \ c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, \ t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$$

и с системой определяющих соотношений \mathfrak{R} :

$$\begin{aligned} R_0 &= c_1 b_1 a_1 c_6 b_6 a_6 c_5 b_5 a_5 c_4 b_4 a_4 c_3 b_3 a_3 c_2 b_2 a_2, \\ R_1 &= t_1 a_1 b_2 c_1 t_6^{-1} a_1^{-1} b_1^{-1} c_1^{-1}, \\ R_2 &= t_6 a_6 b_3 c_6 t_5^{-1} a_6^{-1} b_6^{-1} c_6^{-1}, \\ R_3 &= t_5 a_5 b_6 c_5 t_4^{-1} a_5^{-1} b_5^{-1} c_5^{-1}, \\ R_4 &= t_4 a_4 b_5 c_4 t_3^{-1} a_4^{-1} b_4^{-1} c_4^{-1}, \\ R_5 &= t_3 a_3 b_4 c_3 t_2^{-1} a_3^{-1} b_3^{-1} c_3^{-1}, \\ R_6 &= t_2 a_2 b_1 c_2 t_1^{-1} a_2^{-1} b_2^{-1} c_2^{-1}; \end{aligned}$$

и группу H с системой образующих X и системой определяющих соотношений \mathfrak{F} :

$$R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, S_0,$$

где

$$S_0 = a_1 b_2 c_1 a_6 b_3 c_6 a_5 b_6 c_5 a_4 b_5 c_4 a_3 b_4 c_3 a_2 b_1 c_2.$$

Определяющие соотношения G и H удовлетворяют условию $C(6)$, данные группы изоморфны по отображению $\varphi : a_i \rightarrow a_i, b_i \rightarrow b_i, c_i \rightarrow c_i, t_i \rightarrow t_i, i = \overline{1, 6}$, но $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{F}$. Не выполняется условие теоремы 4: $K(\mathfrak{R}) \neq K(\mathfrak{F})$.

§2. Пусть $G = \langle a_i, i = \overline{1, n} | \mathfrak{R} \rangle$ конечно определенная группа, $\mathfrak{R} = \{R_i, i = \overline{1, m}\}$, \mathfrak{R} — симметризованное множество, удовлетворяющее условиям $C(4)$ и $T(4)$. Рассмотрим диаграммы над \mathfrak{R} , удовлетворяющих условиям $C(4)$ и $T(4)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. [5]. *Граничная область D диаграммы M называется де-новской, если*

- а) $\partial D \cap \partial M$ — связное множество, являются последовательной частью границы ∂M ;
- б) $i(D) \in \{0, 1\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. [5]. Поддиаграмма $\Pi = \bigcup_{i=1}^n D_i$ диаграммы M называется *полосой*, если

- i) множество $\partial \Pi \cap \partial M$, связно и является последовательной частью границы ∂M ;
- ii) множество $\partial D_j \cap \partial M$ связно и является последовательной частью границы ∂M , $1 \leq j \leq n$;
- iii) $i(D_1) = i(D_n) = 2$;
- iv) при $n > 2$, $i(D_j) = 3$, $i = 2, 3, \dots, n - 1$;
- v) $\partial D_i \cap \partial D_{i+1}$ — ребро, $i = 1, 2, \dots, n - 1$;
- vi) $\partial D_i \cap \partial D_j = \emptyset$ при $|i - j| > 1$.

ЛЕММА 3. [5] Если связная односвязная диаграмма M над \mathfrak{R} , \mathfrak{R} — симметризованное множество с условиями $C(4)$ и $T(4)$, не содержащий деновских областей, то она содержит минимум две непересекающиеся полосы.

ЛЕММА 4. Пусть M связанная односвязанная приведенная диаграмма над $\mathfrak{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}$, \mathfrak{R} — симметризованное множество, удовлетворяющее условиям $C(4)$ и $T(4)$ и содержащее более одной области. Тогда слоговая длина граничного цикла M больше слоговой длины граничного цикла любой области D из M .

Доказательство. Пусть M связная односвязная приведенная диаграмма, состоящая из двух областей. Тогда утверждения леммы справедливо.

Допустим, что M гомеоморфно кругу и утверждение леммы справедливо для любого числа k , где k — число областей диаграммы M , $2 \leq k \leq r - 1$. Пусть M содержит r областей.

Для граничных областей диаграммы M , удовлетворяющей условиям $C(4)$ и $T(4)$, пересечение которых с ∂M есть связное множество, являющееся последовательной частью в ∂M , имеет место неравенство [3]:

$$\sum_M^* (3 - i(D)) \geq 4 \tag{3}$$

Пусть M содержит деновскую область D_1 , $i(D_1) = 0$. Так как M содержит более одной области, то удалив из M область D_1 , получим диаграмму M_1 , слоговая длина ∂M_1 которой больше слоговой длины любой области из M_1 . Отсюда следует, что для любой области $D \in M$, $|\partial D| < |\partial M|$.

Пусть $i(D_1) = 1$ и допустим, что D_2 тоже деновская область с $i(D_2) = 1$. Так как $d(D_1) \geq 4$ и $d(D_2) \geq 4$ и $|\partial D_2 \cap \partial M| \geq 3$, то $|\partial D_1| < |\partial M|$. Удалим область D_1 из M получим диаграмму M_1 с числом областей $r - 1$, которая удовлетворяет индуктивному предположению, поэтому для любой области $D \in M_1$, $|\partial D| < |\partial M_1|$, и так как $|\partial M_1| < |\partial M|$, в данном случае утверждение леммы справедливо.

Допустим, что D_1 единственная деновская область в M , тогда в силу неравенства (3) диаграмма M содержит граничную область D_2 с $i(D_2) = 2$ и $|\partial D_2 \cap \partial M| \geq 2$. Поэтому $|\partial D_1| < |\partial M|$.

Удалив из M область D_1 , получим диаграмму M_1 с числом областей $r - 1$. Поэтому в силу индуктивного предположения $\forall D, D \in M_1, |\partial D| < |\partial M_1|$. Так как $|\partial M_1| < |\partial M|$, то для любой области $D \in M, |\partial D| < |\partial M|$.

Пусть диаграмма M не содержит деновских областей. Тогда она содержит минимум две непересекающиеся полосы

$$\Pi_1 = \bigcup_{j=1}^{S_1} D'_j \quad \text{и} \quad \Pi_2 = \bigcup_{j=1}^{S_2} D''_j.$$

Из определения полосы, следует что $i(D'_1) = i(D'_{S_1}) = i(D''_1) = i(D''_{S_2}) = 2$. Поэтому $|\partial D'_1| < |\partial M|$. Удалив из M область D'_1 , получим диаграмму M_1 , удовлетворяющую индуктивному предположению. Так как $|\partial M_1| \leq |\partial M|$, то для любой области $D \in M, |\partial D| < |\partial M|$.

Если допустить, что M состоит из нескольких компонент, то рассуждая в этом случае также, как в аналогичном случае при доказательстве леммы 2, убеждаемся в справедливости леммы 4.

Заметим, что лемма 4 справедлива для случаев, когда множество определяющих соотношений удовлетворяет условиям $C(5)$ и $T(4)$ либо $C(4)$ и $T(5)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть G и H – группы заданные в одном алфавите $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ симметризованными множествами \mathfrak{R} и \mathfrak{F} определяющих соотношений, удовлетворяющих условиям $C(4)$ и $T(4)$ и пусть отображение $\varphi : a_i \rightarrow a_i, i = \overline{1, n}$, определяет изоморфизм группы G на H . Тогда $\mathfrak{R} = \mathfrak{F}$, если и только если $K(\mathfrak{R}) = K(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathfrak{R} = \mathfrak{F}$, то отображение $\varphi : a_i \rightarrow a_i, i = \overline{1, n}$ является изоморфизмом групп G и H и $K(\mathfrak{R}) = K(\mathfrak{F})$.

Пусть $K(\mathfrak{R}) = K(\mathfrak{F})$ и отображение $\varphi : a_i \rightarrow a_i, i = \overline{1, n}$ может быть продолжено до изоморфизма φ^* группы G на H . Покажем, что $\mathfrak{R} = \mathfrak{F}$. Как и в теореме 4, обозначим $Z = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{F}, T_1 = \mathfrak{R} \setminus Z, T_2 = \mathfrak{F} \setminus Z$.

Выбираем в множестве $T_1 \cup T_2$ соотношение наименьшей слоговой длины. Пусть это будет $R \in \mathfrak{R}, M_R(\mathfrak{F})$ – диаграмма, соответствующая R в H .

Рассмотрим как и в теореме 4 случай (а), когда $|\partial R| = |\partial M_R(\mathfrak{F})|$. Если $M_R(\mathfrak{F})$ содержит одну область $S_j \in \mathfrak{F}$, то получаем, что $R = S_j$, то есть $R \in Z$, чего быть не может.

Пусть $M_R(\mathfrak{F})$ содержит области $\{D_i^i\}, i = \overline{1, p}, p > 1$, соответственно с метками $\varphi(D_j^i) = S_j, j = \overline{1, p}, S_j \in \mathfrak{F}$. из леммы 4 следует, что $\forall j, |\partial D_j^i| < |\partial M_R(\mathfrak{F})|$, поэтому слоговая длина $S_j, 1 \leq j \leq p$ меньше слоговой длины R и следовательно $S_j \in Z$, а значит $\mathfrak{R} = \mathfrak{F}$. $M_R(\mathfrak{F})$ – связанная односвязанная диаграмма, тогда она содержит либо деновскую область D_0^i с $|\partial D_0^i \cap \partial M(\mathfrak{F})| \geq 3$, либо минимум две

непересекающиеся полосы (лемма 3) с областями D'_1, D'_2, D'_3, D'_4 с $i(D'_j) = 2$, $1 \leq j \leq 4$, и $|\partial D'_j \cap \partial M_R(\mathfrak{F})| \geq 2$.

Так как $|\partial R| = |\partial M_R(\mathfrak{F})|$ и $K(\mathfrak{R}) = K(\mathfrak{F})$, то $\varphi(D'_S) = R_S$, $0 \leq S \leq 4$, $R_S \in \mathfrak{R}$. Получим, что каждые из соотношений R_S , $0 \leq S \leq 4$ пересекаются с R менее чем по двум кускам, что невозможно. Поэтому $R \in Z$.

Рассмотрим случай (б). $|R| < |M_R(\mathfrak{F})|$. Разбиение R в H содержит больше кусков чем в G .

Пусть $M_R(\mathfrak{F})$ содержит дневскую область D'_0 , $\varphi(D'_0) = S_0 \in \mathfrak{F}$. Если $i(D'_0) \in \{0, 1\}$, то из соотношения (3) следует, что $M_R(\mathfrak{F})$ содержит либо дневскую область D' с $i(D') \in \{0, 1\}$, либо, по меньшей мере, одну область D'' с $i(D'') = 2$. Так как $K(\mathfrak{R}) = K(\mathfrak{F})$, то область D'_0 пересекается с четырьмя кусками R , если $i(D'_0) = 0$, с тремя кусками R , если $i(D'_0) = 1$. Если $M_R(\mathfrak{F})$ содержит еще одну дневскую область D'_1 , то слоговая длина S_0 меньше $\|R\|$, поэтому $S_0 \in Z$ и $S_0 \in R$. Если кроме D'_0 $M_R(\mathfrak{F})$ содержит область D'' с $i(D'') = 2$, $\varphi(D'') = S'' \in F$, то S'' пересекается с R минимум по двум кускам. Поэтому $S_0 = \varphi(D'_0)$ имеет слоговую длину меньше слоговой длины R , поэтому $S_0 \in Z$ и следовательно $S_0 \in \mathfrak{R}$, $S_0 = R_0$. Но тогда R и R_0 имеют общее пересечение, содержащее более одного куска что невозможно. Поэтому $R_0 = R$ и $R = Z$.

Если диаграмма $M_R(\mathfrak{F})$ не содержит дневской областей, то согласно лемме 3, $M_R(\mathfrak{F})$ содержит минимум две непересекающиеся полосы, а следовательно, минимум четыре области D'_1, D'_2, D'_3, D'_4 с $i(D'_j) = 2$, $1 \leq j \leq 4$, $\varphi(D'_j) = S_j$, $S_j \in \mathfrak{F}$, каждая из которых пересекается с R минимум по двум кускам. Поэтому слоговая длина $\varphi(D'_1)$ меньше слоговой длины R и следовательно принадлежит Z . Получили ранее рассматриваемый случай.

Теорема доказана.

Пример 2.

Рассмотрим группу G с системой образующих:

$$X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4\}$$

и с системой определяющих соотношений \mathfrak{R} :

$$\begin{aligned} R_0 &= c_3 b_3 a_3 c_2 b_2 a_2 c_1 b_1 a_1 c_4 b_4 a_4, \\ R_1 &= a_4 b_3 c_4 a_3^{-1} b_3^{-1} c_3^{-1}, \\ R_2 &= a_3 b_2 c_3 a_2^{-1} b_2^{-1} c_2^{-1}, \\ R_3 &= a_2 b_1 c_2 a_1^{-1} b_1^{-1} c_1^{-1}, \\ R_4 &= a_1 b_4 c_1 a_4^{-1} b_4^{-1} c_4^{-1}; \end{aligned}$$

и группу H с системой образующих X и системой определяющих соотношений \mathfrak{F} :

$$R_1, R_2, R_3, R_4, S_0,$$

где

$$S_0 = a_4 b_3 c_4 a_3 b_2 c_3 a_2 b_1 c_2 a_1 b_4 c_1.$$

Определяющие соотношения G и H удовлетворяют условию $C(4)$ и $T(4)$. Данные группы изоморфны по отображению $\varphi : a_i \rightarrow a_i, b_i \rightarrow b_i, c_i \rightarrow c_i, i = \overline{1, 3}$, но $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{F}$. Не выполняется условие теоремы 5: $K(\mathfrak{R}) \neq K(\mathfrak{F})$.

Теорема 5 справедлива для случаев, когда системы определяющих соотношений группы G и H одновременно удовлетворяют условиям $C(4)$ и $T(5)$ или $C(5)$ и $T(4)$.

§3. Пусть $G = \langle a_i, i = \overline{1, n} | \mathfrak{R} \rangle$ — конечно определенная группа, $\mathfrak{R} = \{R_i, i = \overline{1, m}\}$ — симметризованное множество, удовлетворяющее условиям $C(3)$ и $T(6)$.

В данном параграфе рассматриваем диаграммы над \mathfrak{R} , удовлетворяющих условиям $C(3)$ и $T(6)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. [5]. *Граничная область D в диаграмме M называется деновской, если*

- а) $\partial D \cap \partial M$ — связное множество, являются последовательной частью границы ∂M ;*
- б) $i(D) \in \{0, 1\}$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. [5]. *Полосой в диаграмме M называется поддиаграмма $\Pi = \bigcup_{i=1}^k D_i$, если*

- i) множество $\partial \Pi \cap \partial M$ — связно и является последовательной частью граничного цикла ∂M ;*
- ii) множество $\partial D_i \cap \partial M$ связно и является последовательной частью в граничном цикле;*
- iii) при $k = 3, i(D_1) = i(D_2) = i(D_3) = 2$ причем соседние области пересекаются по ребру, и все три области имеют общую вершину;*
- iv) при $k > 3, k = 2\ell + 1, i(D_1) = i(D_2) = i(D_{2\ell}) = i(D_{2\ell+1}) = 2, i(D_3) = i(D_5) = \dots = i(D_{2\ell-3}) = 3, i(D_4) = i(D_6) = \dots = i(D_{2\ell-2}) = 2;$*
- v) $\partial D_i \cap \partial D_{i+1}$ — ребро, $i = 1, 2, \dots, k - 1;$*
- vi) $\partial D_i \cap \partial D_j$ при $|i - j| > 1$.*

ЛЕММА 5. [5] *Если связная односвязная диаграмма M над \mathfrak{R} , \mathfrak{R} — симметризованное множество с условиями $C(3)$ и $T(6)$, не содержащий деновских областей, то она содержит минимум две непересекающиеся полосы.*

ЛЕММА 6. . Пусть M связанная односвязанная приведенная диаграмма над \mathfrak{R} , \mathfrak{R} — симметризованное множество, удовлетворяющее условиям $C(3)$ и $T(6)$ и содержащее более одной области. Тогда слоговая длина граничного цикла M больше слоговой длины граничного цикла любой области D из M .

Доказательство. Допустим, что утверждение справедливо для любого $k, 2 \leq k \leq r - 1$, докажем лемму для $k = r$. Пусть M гомеоморфна кругу и M содержит r областей.

Для граничных областей диаграммы M , удовлетворяющей условиям $C(3)$ и $T(6)$, пересечение которых с ∂M есть связное множество, являющееся последовательной частью в ∂M , имеет место неравенство из [3]:

$$\sum_M^* = \left(\frac{5}{2} - i(D)\right) \geq 3 \tag{4}$$

Пусть M содержит деновскую область D , $i(D_1) \in \{0, 1\}$. Если $i(D_1) = 0$, то утверждение леммы справедливо.

Пусть $i(D_1) = 1$ и пусть D_2 тоже деновская область с $i(D_2) = 1$. Так как $d(D_1) \geq 3$, $d(D_2) \geq 3$, то $|\partial D_1| < |\partial M|$. Удалив из M область D_1 , получим диаграмму M_1 , для которой в силу индуктивного предположения для любой области $D \in M_1$ имеем $|\partial D| < |\partial M_1|$; и так как $|\partial M_1| < |\partial M|$, то любой области $D \in M$, имеем $|\partial D| < |\partial M|$.

Допустим, что D_1 единственная деновская область в M . Из неравенства (4) следует, что M должна содержать граничные области D_2, D_3 , пересечение которых с ∂M связное множество и $i(D_2) = i(D_3) = 2$. Так как $d(D_2) \geq 3$, $d(D_3) \geq 3$, то $|\partial D_1| < |\partial M|$. Удалив из M область D_1 , получим диаграмму M_1 , с числом областей $k = r - 1$, для которой в силу индуктивного предположения для любой области $D \in M_1$ имеем $|\partial D| < |\partial M_1|$. Но тогда, так как $|\partial M_1| < |\partial M|$, получаем, что для любой области $D \in M$: $|\partial D| < |\partial M|$.

Пусть M не содержит деновских областей. Тогда она содержит минимум две непересекающихся полосы Π_1, Π_2 . Пусть, к примеру, это будут полосы $\Pi_1 = \{D'_1, D'_2, \dots, D'_{2p+1}\}$ и $\Pi_2 = \{D''_1, D''_2, \dots, D''_{2p'+1}\}$, $i(D'_1) = i(D'_2) = 2$, $d(D'_1) \geq 3$, $d(D'_2) \geq 3$ и $|\partial \Pi_2 \cap \partial M| \geq 3$, поэтому $|\partial D'_1| < |\partial M|$ и $|\partial D'_2| < |\partial M|$. Удалим из M области D'_1, D'_2 , получим диаграмму M_1 , содержащую не менее четырех областей, поэтому для нее в силу индуктивного предположения для любой области $D \in M_1$ имеем $|\partial D| < |\partial M_1|$. Так как $|\partial M_1| \leq |\partial M|$, то для любой области $D \in M$ имеем $|\partial D| < |\partial M|$.

Если допустить, что M состоит из нескольких компонент, то нетрудно видеть, что в данном случае утверждения леммы справедливо.

В [6] доказано, что если $G = \langle X; \mathfrak{R} \rangle$ с условием $C(p) \& T(q)$ при $q > 4$, то длина любого куска равна 1.

ТЕОРЕМА 6. Пусть G и H — группы, заданные в одном алфавите a_1, a_2, \dots, a_n , симметризованным множеством \mathfrak{R} и \mathfrak{S} определяющих соотношений соответственно, удовлетворяющих условиям $C(3)$ и $T(6)$. Тогда отображение $a_i \rightarrow a_i, i = \overline{1, n}$, определяет изоморфизм группы G на группу H в том и только в том случае, когда $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$, то отображение $a_i \rightarrow a_i, i = \overline{1, n}$ определяет тождественный изоморфизм G на H .

Пусть $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{S}$. Введем обозначения: $Z = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}, T_1 = \mathfrak{R}/Z, T_2 = \mathfrak{S}/Z$. Очевидно, что каждое из этих множеств является симметризованным.

Каждое из определяющих соотношений $R_i \in \mathfrak{R}$ группы G при тождественном изоморфизме $a_i \rightarrow a_i$, $i = \overline{1, n}$ является словом равным единице в группе H , и наоборот, каждое определяющее соотношение $S_j \in \mathfrak{S}$ группы H при тождественном изоморфизме H на G в группе G является словом равным единице. Поэтому каждому определяющему соотношению $R_i \in T_1$ соответствует приведенная диаграмма M_{R_i} над \mathfrak{S} с граничной меткой $\varphi(\partial M_{R_i})$ равной R_i со слоговой длиной $|M_{R_i}|$ и с метками из \mathfrak{S} .

Упорядочим $R_i, R_i \in T_1$ по слоговым длинам, то есть, упорядочим диаграммы M_{R_i} по слоговым длинам их граничных меток.

Аналогично, каждому $S_j \in T_2$ в группе G соответствует диаграмма M_{S_j} над \mathfrak{R} с граничной меткой $\varphi(\partial M_{S_j})$ равной S_j , имеющей слоговую длину $|\partial M_{S_j}|$ с метками из \mathfrak{R} . Упорядочим $S_j \in T_2$ по слоговым длинам.

Выбираем в множестве $T_1 \cup T_2$ определяющее соотношение (диаграмму) наименьшей слоговой длины. Пусть это будет $R \in T_1$, являющееся граничной меткой диаграммы M_R над \mathfrak{S} .

Очевидно, что M_R содержит более одной области. Пусть M_R содержит области D_1, D_2, \dots, D_ℓ , $\ell > 1$, соответственно с метками $\varphi(D_j) = S_j$, $1 \leq j \leq \ell$, $S_j \in \mathfrak{S}$. Из леммы 6 следует, что для $\forall j$, $|\partial D_j| < |\partial M_R|$, поэтому слоговая длина каждого из соотношений S_j (разбиения на слоги рассматривается над \mathfrak{S}), являющегося меткой D_j , $D_j \in M_R$, меньше слоговой длины M_R с метками над \mathfrak{S} . Поэтому эти соотношения принадлежат Z , то есть множеству \mathfrak{R} . Рассмотрим разбиение каждой области $D_j \in M_R$, $1 \leq j \leq \ell$, на ребра с метками из \mathfrak{R} . В результате получим разбиение граничного цикла M_R областями D_j над \mathfrak{R} . Обозначим диаграмму M_R с разбиением граничного цикла над \mathfrak{R} через M'_R . Так как M'_R — связная односвязная диаграмма, то она содержит либо деновскую область D_1 , $|\partial D_1 \cap \partial M'_R| \geq 2$, либо минимум две полосы.

В первом случае метка пересечения D_1 должна быть куском, так как $\varphi(\partial D_1) = R_1$, $R_1 \in \mathfrak{R}$ и $\varphi(\partial M'_R) = R$, $R \in \mathfrak{R}$, однако это противоречит тому, что $|\partial D_1 \cap \partial M'_R| \geq 2$. Допустим, что M'_R не содержит деновских областей. Тогда M'_R содержит минимум две полосы. Пусть $\Pi_1 = \{D'_1, \dots, D'_{k'}\}$, $2 < k' < \ell$, $\Pi_2 = \{D''_1, \dots, D''_{k''}\}$, $2 < k'' < \ell$, искомые полосы из M'_R . Из определения полосы следует, что степень вершины v_1 , $v_1 = (\partial D'_1 \cap \partial D'_2) \cap \partial M'_R$ и вершины v_2 , $v_2 = (\partial D''_1 \cap \partial D''_2) \cap \partial M'_R$ равна трем.

Рассмотрим диаграмму M , образованную областями $\{R, D'_1, \dots, D'_{k'}, D''_1, \dots, D''_{k''}\}$, у которой внутренние вершины v_1, v_2 , имеют степень три, что противоречит условию $T(6)$. Теорема доказана.

Из Теоремы 6 получаем следующее:

СЛЕДСТВИЕ 1. . Пусть G и H группы, заданные в одном алфавите a_1, a_2, \dots, a_n симметризованным множеством определяющих соотношений \mathfrak{R} и \mathfrak{S} соответственно, удовлетворяющих условиям $C'(1/2)$ и $T(6)$. Тогда отображение $a_i \rightarrow a_i$, $i = \overline{1, n}$, определяет изоморфизм группы G и H в том и только в том случае, когда $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$.

В [4] доказана

ТЕОРЕМА 7. *Существуют две группы G и H с условиями $\lambda = 1/3$, T_4, T_5 изоморфные относительно тождественного отображения образующих, для которых $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{S}$.*

Из данной теоремы следует:

СЛЕДСТВИЕ 2. *Существуют группы G и H заданные в одном алфавите a_1, a_2, \dots, a_n с симметризованным множеством определяющих соотношений \mathfrak{R} и \mathfrak{S} соответственно, удовлетворяющих условиям $C'(1/2)$ и T_4 и $C'(1/2)$ и T_5 изоморфные относительно отображения $a_i \rightarrow a_i$, $i = \overline{1, n}$, для которых $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{S}$.*

Из теорем 3, 5 и [6] получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть G и H , заданные в одном алфавите a_1, a_2, \dots, a_n симметризованным множеством определяющих соотношений \mathfrak{R} и \mathfrak{S} соответственно, удовлетворяющих условию $C'(1/5)$, либо $C'(1/4)$ и $T(4)$, либо $C'(1/3)$ и $T(4)$, либо $C'(1/3)$ и $T(5)$. Тогда отображение $a_i \rightarrow a_i$, $i = \overline{1, n}$ определяет изоморфизм группы G на H в том и только в том случае, когда $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
2. Greendlinger M. An analogue of theorem of Magnus // Archiv. Math. 1902. Vol. 12. P. 94–96.
3. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
4. Кашенцев Е. В. Аналоги одной теоремы Магнуса для групп с малым сокращением и невозможности их усиления // Математические заметки. 1985. Т. 38, № 4. С. 494–502.
5. Безверхний В. Н. О нормализаторах элементов в $C(p) \& T(q)$ -группах // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 1994. С. 4–58.
6. Gersten S.M., Short H. Small cancellation theory and automatic groups // Invent. Math. 1990. Vol. 102. P. 305–334.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Поступило 18.09.2013