И. Н. Демшин, В. А. Шлык, Критерии устранимых множеств для весовых пространств гармонических функций, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2002, том 286, 62–73

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 286, 2002 г.

И. Н. Демшин, В. А. Шлык

КРИТЕРИИ УСТРАНИМЫХ МНОЖЕСТВ ДЛЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В работе изучаются точные функциональные, емкостные, метрические характеристики нуль-множеств для весовых пространств гармонических функций $FD^{p,\omega}$ с весом ω, удовлетворяющим A_p-условию Макенхаупта. В идейном плане данная статья следует работе Л. Хедберга [1] и продолжает исследования по теории устранимых множеств в [2–5]. Основные результаты были анонсированы в [6].

1. Введем следующие обозначения: G – ограниченное открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве R^n, $n \geqslant 2$; $\mathcal{H}_k$, $\mathcal{L}_k$ – соответственно k-мерные меры Хаусдорфа и Лебега; A_p, $p \in (1,\infty)$, – класс локально интегрируемых функций $\omega : R^n \to (0,\infty)$, удовлетворяющих условию Макенхаупта [7]

$$\sup \frac{1}{\mathcal{L}_n(Q)} \int\limits_Q \omega\, dx \left\{ \frac{1}{\mathcal{L}_n(Q)} \int\limits_Q \omega^{\frac{1}{1-p}}\, dx \right\}^{p-1} < \infty, \tag{1}$$

где sup берется по всем координатным кубам $Q \subset R^n$. Замыкание множества F в R^n будем обозначать $\overline{F}$. Рассмотрим пространство $L^1_{p,\omega}(G)$ функций $u : G \to (-\infty,\infty)$, локально интегрируемых в G, имеющих обобщенные частные производные и таких, что $\int_G |\operatorname{grad} u|^p \omega\, dx < \infty$. В $L^1_{p,\omega}(G)$ введем полунорму

$$\|u\|_{L^1_{p,\omega}} = \|u\| = \left(\int\limits_G |\operatorname{grad} u|^p \omega\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Через $FD^{p,\omega}(G)$ обозначим класс всех гармонических функций $u \in L^1_{p,\omega}(G)$ таких, что $\int_\sigma \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0$ для всех $(n-1)$-мерных циклов $\sigma \subset G$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00028) и программы “Университеты России” (грант УР.04.01.016).

Положим для компакта $E \subset G$

$$C_E^\infty(G) = \{u \in C_0^\infty(G) : \operatorname{grad} u = 0 \ \text{ в некоторой окрестности компакта } E\},$$

$$C_E^\infty(R^n) = C_E^\infty.$$

Пусть $\overset{\circ}{L}{}^1_{p,\omega}(G) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{cl}(C_0^\infty(G))$ в $L^1_{p,\omega}(G)$. Через $\mathcal{L}_k^p(G)$ обозначим класс всех вектор-функций $u = (u_1, \dots u_k)$, для которых

$$\|u\|_{\mathcal{L}_k^p(G)} = \left(\int\limits_G \left(\sum_{i=1}^k u_i^2(x)\right)^{\frac{p}{2}} dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Пусть $T : f \to K * f$ – сингулярный интегральный оператор свертки с ядром K, удовлетворяющим стандартным условиям

$$\|\widehat{K}\|_\infty \leqslant C, \quad |K(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^n}, \quad |K(x) - K(x-y)| \leqslant \frac{C|y|}{|x|^{n+1}}$$

для $|y| < \frac{|x|}{2}$. Известен результат Р. Койфмана и К. Феффермана [8] для $\omega \in A_p$ и $f\omega^{\frac{1}{n}} \in \mathcal{L}_1^p(R^n)$:

$$\int\limits_{R^n} |Tf(x)|^p \omega \, dx \leqslant C_p \int\limits_{R^n} |f(x)|^p \omega \, dx, \tag{2}$$

где C_p – положительная постоянная, выбор которой зависит только от p, n, ω.

Под конденсатором будем понимать набор $(F_0, F_1, G/F) = (G/F)$, где $F_0, F_1 \subset \overline{G}$ – непустые непересекающиеся компакты, F – компакт в G. Определим p-емкость с весом $\omega \in A_p$ конденсатора (G/F) как величину

$$C_{p,\omega}(G/F) = C_{p,\omega}(F_0, F_1, G/F) = \inf \int\limits_G |\operatorname{grad} u|^p \omega \, dx,$$

где inf берется по всем функциям u таким, что $u|_G \in C^\infty(G) \cap L^1_{p,\omega}(G)$, $u = j$ в некоторой окрестности компакта F_j, $j = 0, 1$, $u = \text{const} = c(u, \alpha)$ в некоторой окрестности каждой компоненты α множества F. Класс таких функций обозначим

$$\operatorname{Adm}_{p,\omega}(G/F) = \operatorname{Adm}_{p,\omega}(F_0, F_1, G/F).$$

Пусть $u_0 = \lim\limits_{n\to\infty} u_k$ в $L^1_{p,\omega}(G)$, где $u_k \in \mathrm{Adm}_{p,\omega}(G)$ и

$$\int\limits_G |\operatorname{grad} u_0|^p \omega\, dx = C_{p,\omega}(G/F).$$

Тогда u_0 назовем экстремальной функцией для $C_{p,\omega}(G/F)$.

Компакт $E \subset R^n$ назовем гладким, если он ограничен конечным числом непересекающихся гладких $(n-1)$-мерных многообразий.

Пусть $\tau = \tau(a,b) \subset R^n$ – континуум, соединяющий две различные точки $a, b \in R^n$ и неприводимый между ними [9], и пусть существуют последовательности $\{a(k), b(k)\}$, извлеченные из $\tau \setminus E$ и такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} a(k) = a$, $\lim\limits_{k\to\infty} b(k) = b$. Тогда множество $\gamma = \gamma(a,b) = (\tau\setminus E)\setminus\{a,b\}$ назовем составной кривой, соединяющей точки a, b. Совокупность всех составных кривых, каждая из которых соединяет в указанном смысле какие-нибудь две различные точки из R^n, обозначим через $\Gamma(E)$. Если при этом $\tau \setminus \{a,b\} \subset G$, $a \in F_0$, $b \in F_1$, $F_0, F_1 \subset \overline{G}$, $F_0 \cap F_1 = \varnothing$, то будем также говорить, что кривая $\gamma = (\tau \setminus E) \setminus \{a,b\}$ соединяет в G множества F_0 и F_1. Семейство всех таких составных кривых обозначим через $\Gamma(F_0, F_1, G/E) = \Gamma(G/E)$. Определим p-модуль с весом ω (иначе, (p,ω)-модуль) семейства $\Gamma \subset \Gamma(E)$ как величину

$$m_{p,\omega}(\Gamma) \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \inf \int\limits_{R^n} \rho^p \omega\, dx,$$

где $\omega \in A_p$ и inf берется по всем борелевским функциям $\rho\colon R^n \to [0,\infty]$ таким, что $\int_{R^n} \rho^p \omega\, dx < \infty$ и $\int_\gamma \rho\, d\mathcal{H}_1 \geqslant 1$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Класс всех таких допустимых метрик ρ будем обозначать через $\mathrm{adm}_{p,\omega}(\Gamma)$. Для семейства $\Gamma(G/E)$ положим

$$\mathrm{adm}_{p,\omega}(\Gamma(G/E)) = \mathrm{adm}_{p,\omega}(G/E) = \mathrm{adm}_{p,\omega}(F_0, F_1, G/E).$$

Предложение 1. *Если $\mathcal{L}_n(E) = 0$, то (p,ω)-модуль семейства Γ всех спрямляемых кривых γ, для которых $\mathcal{H}_1(\gamma \cap E) > 0$, равен 0.*

Доказательство. Действительно, пусть

$$\rho = \begin{cases} \infty & \text{на} \quad E; \\ 0 & \text{вне} \quad E. \end{cases}$$

Тогда $\rho \in \mathrm{adm}_{p,\omega}(\Gamma)$ и $\int_{R^n} \rho^p \omega\, dx = 0$. Следовательно, $m_{p,\omega}(\Gamma) = 0$.

Множество $\mathcal{E} \subset E$ назовем (p,ω)-исключительным, если равен нулю (p,ω)-модуль всех спрямляемых кривых γ таких, что $\mathcal{H}_1(\gamma \cap \mathcal{E}) > 0$, и (p,ω)-модуль семейства всех составных кривых γ таких, что $\overline{\gamma} \cap \mathcal{E} \neq \varnothing$.

Пусть G – ограниченное открытое множество и компакт E содержится в G. Тогда E назовем $NH_{p\omega}$-компактом, если 1) $\mathcal{L}_n(E) = 0$; 2) для любой пары гладких непересекающихся компактов $F_0, F_1 \subset G$ таких,что $E \cap (F_0 \cup F_1) = \varnothing$, имеем

$$m_{p,\omega}(F_0, F_1, G/E) = m_{p,\omega}(F_0, F_1, G/\varnothing).$$

Составную кривую γ назовем спрямляемой, если $\mathcal{H}_1(\gamma) < \infty$. Для составной спрямляемой кривой γ и координатной оси x_i положим

$$\mathcal{H}^1(\mathrm{pr}_{x_i}, \gamma) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} N(x_i, \gamma)\, d\mathcal{H}_1(x_i),$$

где $N(x_i, \gamma)$ – число точек $x \in \gamma$, i-я координата каждой из которых равна x_i. При этом интеграл рассматривается в смысле Лебега и $N(x_i, \gamma) = 0$, если таких точек x на γ нет. Аналогично, определим величины $\mathcal{H}^1(\mathrm{pr}_{x_i}, \tau)$ и $N(x_i, \tau)$ для произвольного борелевского множества $\tau \subset R^n$.

2. Компакт E назовем устранимым для пространства $FD^{p,\omega}$, если для любого открытого ограниченного множества $G \subset R^n$, $E \subset G$, каждая функция $f \in FD^{p,\omega}(G \setminus E)$ продолжается до функции из $FD^{p,\omega}(G)$. Перейдем к описанию устранимых множеств для $FD^{p,\omega}$. Положим $q = \frac{p}{p-1}$, $\omega^{\frac{1}{1-p}} = \widetilde{\omega}$.

Теорема 1. *Для того чтобы компакт E был устранимым множеством для пространства $FD^{p,\omega}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого ограниченного открытого множества $G \supset E$ выполнялось равенство*

$$\overset{\circ}{L}{}^1_{q,\widetilde{\omega}}(G) = \mathrm{cl}\,(C_E^\infty(G))$$

в $L^1_{q,\widetilde{\omega}}(G)$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $C_E^\infty(G)$ плотно в $\overset{\circ}{L}{}^1_{q,\widetilde{\omega}}(G)$. Рассматривая функцию $f(x_1,\dots,x_n) \in \overset{\circ}{L}{}^1_{q,\widetilde{\omega}}(G)$, для которой $|\mathrm{grad}\, f| \neq 0$ на E (например, $f(x) = x_i$ в окрестности E и $f(x) = 0$

в окрестности ∂G), легко установим, что $\mathcal{L}_n(E)=0$. Если теперь функция $u \in FD^{p,\omega}(G\setminus E)$, то ее обобщенные частные производные определены почти везде в G и $\omega^{\frac{1}{p}}\operatorname{grad} f \in \mathcal{L}_n^p(G)$. Покажем, что существует обобщенная функция T в G, чьи частные производные D_iT, понимаемые в смысле теории распределений, равны u_i. По теореме Л. Шварца [10], для этого необходимо и достаточно проверить условия $D_ju_i = D_iu_j$ для всех i, j или, другими словами, установить равенства

$$\int\limits_G u_iD_j\varphi\,dx = \int\limits_G u_jD_i\varphi\,dx$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(G)$, $i,j=\overline{1,n}$. С другой стороны, для всех $\varphi \in C_E^\infty(G)$

$$\int\limits_G u_iD_j\varphi\,dx = \int\limits_{G\setminus E} u_iD_j\varphi\,dx = -\int\limits_{G\setminus E} uD_iD_j\varphi\,dx =$$

$$= -\int\limits_{G\setminus E} uD_jD_i\varphi\,dx = \int\limits_G u_jD_i\varphi\,dx.$$

Учитывая плотность $C_E^\infty(G)$ в $C_0^\infty(G)$, с помощью неравенства Гельдера установим равенство

$$\int\limits_G u_iD_j\varphi\,dx = \int\limits_G u_jD_i\varphi\,dx$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Таким образом, существует распределение T в G, которое совпадает с u в $G\setminus E$. По другой теореме Л. Шварца, T есть функция в $L^1_{p,\omega}(G)$, т.е. u имеет расширение до функции из $L^1_{p,\omega}(G)$.

Пусть $\varphi \in C_E^\infty(G)$. Носитель $\operatorname{grad}\varphi$ есть компакт в $G\setminus E$. Дополнение Ω к нему имеет только конечное число компонент Ω_i, $i=\overline{1,m}$, пересекающих E. На каждой компоненте Ω_i функция φ равна постоянной a_i. Пусть σ – $(n-1)$-мерный цикл в $(G\setminus E)\cap\Omega$, который гомологичен 0 в G. Положим $\sigma\cap\Omega_i=\sigma_i$. По формуле Грина,

$$\int\limits_{G\setminus E} u\Delta\varphi\,dx = \int\limits_{G\setminus E} \operatorname{grad} u \operatorname{grad}\varphi\,dx \int\limits_{G\setminus E} \Delta u\varphi\,dx - \int\limits_\sigma \varphi\frac{\partial u}{\partial n}\,dS =$$

$$= -\sum a_i \int\limits_{\sigma_i} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS.$$

Как и выше, используя неравенство Гельдера и плотность $C_E^\infty(G)$ в $C_0^\infty(G)$, получим, что $\int_{G\setminus E} u\Delta\varphi\, dx = 0$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(G)$. По лемме Вейля [10], функция u является гармонической в G. Другими словами, $u \in FD^{p,\omega}(G)$.

Необходимость. Пусть $C_E^\infty(G)$ не является плотным в $\overset{\circ}{L}{}^1_{q,\widetilde{\omega}}(G)$. Тогда найдется ненулевое распределение (обобщенная функция) T с носителем в E и непрерывное на $\overset{\circ}{L}{}^1_{q,\widetilde{\omega}}(G)$. Очевидно, что $S = T * K$, где функция

$$K = \begin{cases} |x|^{2-n}, & n > 2; \\ -\log|x|, & n = 2, \end{cases}$$

является гармонической в $G \setminus E$. Покажем что $S \in FD^{p,\omega}(G \setminus E)$. Распределение T, как линейный функционал на $\mathcal{L}_n^q(G)$, для $\varphi \in C_0^\infty(G)$ имеет вид $(T,\varphi) = \int \sum_i u_i D_i\varphi\, dx$, где $u_i\omega^{\frac{1}{p}} \in \mathcal{L}_1^p(G)$, $i = \overline{1,n}$, и $(T,\varphi) = 0$ для $\varphi \in C_E^\infty(G)$. Тогда $(S,\varphi) = (S,\varphi * K) = \int \sum_i u_i D_i\varphi\, dx$. Отсюда $(D_jS,\varphi) = -(S,D_j\varphi) = -\int\sum_i u_i D_j D_i(\varphi * K)\, dx$. Согласно (2),

$$\|D_jD_i(\varphi * K)\widetilde{\omega}^{\frac{1}{q}}\|_{\mathcal{L}_1^q} \leqslant C\|\varphi\widetilde{\omega}^{\frac{1}{q}}\|_{\mathcal{L}_1^q},$$

где выбор постоянной C зависит от G, ω, p, n. Поэтому

$$|(D_jS,\varphi)| \leqslant C\sum \|u_i\omega^{\frac{1}{p}}\|_{\mathcal{L}_1^p}\|\varphi\widetilde{\omega}^{\frac{1}{q}}\|_{\mathcal{L}_1^q}.$$

Значит, $D_jS\omega^{\frac{1}{p}} \in \mathcal{L}_1^p(G)$, т.е. $S \in L^1_{p,\omega}(G)$ Покажем, что S не имеет флюксий, т.е. $S \in FD^p(G\setminus E)$. Пусть $\varphi \in C_E^\infty(G)$ и пусть $(n-1)$-мерный цикл σ выбирается в $(G\setminus E)\cap\Omega$ тем же способом, что и выше. Тогда $(S,\Delta\varphi) = (S, K * \Delta\varphi) = C(T,\varphi) = 0$ и, по формуле Грина,

$$0 = \int\limits_G S\Delta\varphi\, dx = -\int\limits_G \operatorname{grad} S \operatorname{grad}\varphi\, dx - \int\limits_\sigma \varphi\frac{\partial S}{\partial n}\, d\sigma =$$

$$= -\sum_i a_i \int\limits_{\sigma_i} \frac{\partial S}{\partial n}\, d\sigma.$$

Поскольку выбор a_i произволен, то $\int_{\sigma_i} \frac{\partial S}{\partial n}\, d\sigma = 0$ для всех i. Следовательно, $\int_{\sigma} \frac{\partial S}{\partial n}\, d\sigma = 0$ для всех $(n-1)$-мерных циклов в $(G \setminus E)$. Теорема доказана.

Замечание. Если каждая функция $f \in FD^{p,\omega}(G \setminus E)$ продолжается до функции $\widetilde{f} \in FD^{p,\omega}(G)$ для некоторого ограниченного открытого множества $G \supset E$, то это будет справедливо и для любого другого открытого ограниченного множества $\widetilde{G} \supset E$.

Теорема 2. *Если компакт E является устранимым для $FD^{p,\omega}$, то он будет устранимым и для $L^1_{p,\omega}$.*

Доказательство. Достаточно установить, что каждая функция $f \in L^1_{p,\omega}(G \setminus E)$ продолжается до функции $\widetilde{f} \in L^1_{p,\omega}(G)$, $\|f\|_{L^1_{p,\omega}(G \setminus E)} = \|\widetilde{f}\|_{L^1_{p,\omega}(G)}$, для некоторого ограниченного открытого множества $G \supset E$. Действительно, по теореме 1, $\mathcal{L}_n(E) = 0$ и класс C^∞_E плотен в $\overset{\circ}{L}{}^1_{q,\widetilde{\omega}}(G)$. Пусть u – некоторая функция из $L^1_p(G \setminus E)$. Тогда ее частные производные $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$, определены $\mathcal{L}_n$-почти всюду в G и $u_i \omega^{\frac{1}{p}} \in \mathcal{L}^p_1(G)$. Покажем, что существует обобщенная функция T в G, чьи частные производные $D_i T$, понимаемые в смысле теории распределения, равны u_i. По теореме Л. Шварца [10], для этого необходимо и достаточно проверить выполнение условия $D_j u_i = D_i u_j$, где $i, j = \overline{1, n}$, или, другими словами, установить равенство

$$\int\limits_G u_i D_j \varphi\, dx = \int\limits_G u_j D_i \varphi\, dx$$

для всех $\varphi \in C^\infty_0(G)$, $i, j = \overline{1, n}$. Заметим, что для $\varphi \in C^\infty_E(G)$ производная $D_i \varphi \in C^\infty_0(G \setminus E)$. Поэтому

$$\int\limits_G u_i D_j \varphi\, dx = \int\limits_{G \setminus E} u_i D_j \varphi\, dx = -\int\limits_{G \setminus E} u D_i D_j \varphi\, dx =$$

$$= -\int\limits_{G \setminus E} u D_j D_i \varphi\, dx = \int\limits_G u_j D_i \varphi\, dx.$$

Учитывая плотность $C^\infty_E(G)$ в $\overset{\circ}{L}{}^1_{q,\widetilde{\omega}}(G)$, с помощью неравенства Гельдера установим справедливость последнего соотношения для функции $u \in C_0^\infty(G)$. Тем самым докажем существование искомой функции T. По построению, функция T совпадает, с точностью до постоянной, с функцией u в $G \setminus E$. Поэтому T – функция из $L^1_{p,\omega}(G)$. Теорема доказана.

Обозначим через pr_l ортогональную проекцию на прямую $l \subset R^n$.

Теорема 3. *Для того чтобы компакт E был устранимым множеством для $FD^{p,\omega}$, необходимо и достаточно, чтобы*

1) *существовало $(q,\widetilde{\omega})$-исключительное множество $\mathcal{E} \subset E$ такое, что для каждой невырожденной компоненты α компакта E множество $\alpha \setminus \mathcal{E}$ либо пусто, либо состоит из единственной точки;*

2) *для любого заданного $\varepsilon > 0$ оценка*

$$\mathcal{H}_1(\mathrm{pr}_l(\tau \setminus E)) \geqslant \mathcal{H}_1(\mathrm{pr}_l \tau) \tag{3}$$

выполнялась для всех прямых $l \subset R^n$ и для $m_{q,\widetilde{\omega}}$-почти каждой составной кривой $\gamma = (\tau(a,b) \setminus E) \setminus \{a,b\} \in \Gamma(E)$, $\operatorname{diam} \tau(a,b) < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\Pi \supset E$ – координатный прямоугольник. Его грани, параллельные координатной гиперплоскости $x_i = 0$, обозначим через σ_{0i}, σ_{1i}. Выберем открытое ограниченное множество G таким, что $\overline{\Pi} \subset G$. Пусть $\varphi_0 \in C_0^\infty(G)$ и $\varphi_0 \equiv 1$ в окрестности $\overline{\Pi}$. Положим $x_i \mid_{\sigma_{0i}} = a_i$, $x_i \mid_{\sigma_{1i}} = b_i$. Известно (см. [1, 5]), что $u_0 = \frac{x_i - a_i}{b_i - a_i}$ – экстремальная функция в проблеме емкости $C_q(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi/\varnothing)$. В нашем случае, по теореме 1, найдется последовательность $u_k \in C_0^\infty(G)$ такая, что $\int_G |\operatorname{grad}(u_k - \varphi_0 u_0)|^q \widetilde{\omega}\, dx \to 0$ при $k \to \infty$. Тем более, $\int_\Pi |\operatorname{grad}(u_k - \varphi_0 u_0)|^q \widetilde{\omega}\, dx \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда (см. [5, 11]) для $m_{q,\widetilde{\omega}}$-почти всех составных кривых $\gamma \subset G$

$$\int\limits_\gamma |\operatorname{grad}(u_k - u_0)|\, d\mathcal{H}_1 \to 0 \tag{4}$$

при $k \to \infty$. Интеграл в (4) не зависит от ω и (4) указывает на тот факт, что функцию u_0 можно аппроксимировать в среднем гладкими функциями, модуль градиента которых равен 0 в некоторой окрестности E. Применяя дословно рассуждения из [5, теоремы 2.1–2.6], при $\omega \equiv 1$ получим, что оценка

$$\mathcal{H}^1(\mathrm{pr}_{x_i}(\tau \setminus E)) \geqslant \mathcal{H}_1(\mathrm{pr}_{x_i}(\tau \setminus E)) \geqslant |\mathrm{pr}_{x_i} b - \mathrm{pr}_{x_i} a|$$

выполняется для $m_{q,\widetilde{\omega}}$-почти каждой составной кривой $\gamma = (\tau(a,b) \setminus E) \setminus \{a,b\} \in \Gamma(E)$, где $\tau = \tau(a,b)$ – континуум диаметра, меньшего ε. Отсюда, по теореме 3.3 из [5], $m_{q,\widetilde{\omega}}$-почти каждая составная кривая $\gamma = (\tau(a,b) \setminus E) \setminus \{a,b\}$ порождается простой спрямляемой кривой τ, $\operatorname{diam} \tau < \varepsilon$, такой, что

$$\mathcal{H}_1(\tau \cap E) = 0. \tag{5}$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Заметим, что $\mathcal{L}_n(E) = 0$. Действительно, допустим, что $\mathcal{L}_n(E) > 0$ и пусть Π, $E \subset \Pi$, – координатный $(n-1)$-мерный прямоугольник, σ_{0i}, σ_{1i} – его грани, параллельные гиперплоскости $x_i = 0$. Рассмотрим те отрезки τ, соединяющие σ_{0i}, σ_{1i}, для которых $\mathcal{H}_1(\tau \cap E) > 0$ и $\tau \perp \sigma_{0i}$. Пусть Γ_1 – семейство всех таких отрезков, а Γ_2 – семейство составных кривых $\gamma = (\tau \setminus E) \setminus (\sigma_{0i} \cup \sigma_{1i})$, $\tau \in \Gamma_1$. Тогда (см. [12]) $m_{q,\widetilde{\omega}}(\Gamma_2) \geqslant m_{q,\widetilde{\omega}}(\Gamma_1) > 0$. С другой стороны, в силу (3), $m_{q,\widetilde{\omega}}(\Gamma_2) = 0$. Следовательно, $\mathcal{L}_n(E) = 0$.

Покажем, что каждую функцию $f \in C_0^\infty(G)$ в $L^1_{q,\widetilde{\omega}}(G)$ можно аппроксимировать сколь угодно точно функциями из $C_E^\infty(G)$. По теореме 2 из [12], каждую функцию $f \in C_0^\infty(G)$ в $L^1_{q,\widetilde{\omega}}(G)$ можно аппроксимировать сколь угодно точно линейными комбинациями

$$\sum_{i=1}^{s} a_i u_i, \tag{6}$$

где u_i – экстремальная функция для $C_{q,\widetilde{\omega}}(F_{0i}, F_{1i}, G/\varnothing)$, F_{0i}, F_{1i} – гладкие компакты в G. Далее считаем без ограничения общности, что каждый из компактов F_{ji}, $j = 0,1$, есть замыкание открытого множества $G_{ji} \subset G$. Покроем компакт E конечным числом $m(k)$ шаров B_{jk} с радиусами, меньшими $\frac{1}{k}$ и такими, что $\sum_{j=1}^{m(k)} \mathcal{L}_n(B_{jk}) < \frac{1}{k}$, и пусть $F_{0i}^k = F_{0i} \setminus \cup_{j=1}^{m(k)} B_{jk}$, $F_{1i}^k = F_{1i} \setminus \cup_{j=1}^{m(k)} B_{jk}$. Выбор шаров подчиним также дополнительному условию $F_{0i}^k \subset F_{0i}^{k+1}$, $F_{1i}^k \subset F_{1i}^{k+1}$ для каждого k , $\cap_{k \geqslant 1} (\cup_{j=1}^{m(k)} B_{jk}) = E$. Поскольку $F_{0i}^k \subset F_{0i}$, $F_{1i}^k \subset F_{1i}$, то

$$m_{q,\widetilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/\varnothing) \le m_{q,\widetilde{\omega}}(F_{0i}^{k+1}, F_{1i}^{k+1}, G/\varnothing) \leqslant$$
$$\leqslant m_{q,\widetilde{\omega}}(F_{0i}, F_{1i}, G/\varnothing). \tag{7}$$

С другой стороны, выберем $\rho_k \in \mathrm{adm}_{q,\widetilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/\varnothing)$ так, что $\rho_k = 0$ на $F_{0i}^k \cup F_{1i}^k$ и

$$m_{q,\widetilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/\varnothing) \leqslant \int\limits_G \rho_k^q \widetilde{\omega}\, dx \leqslant m_{q,\widetilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/\varnothing) + \frac{1}{k}.$$

В силу выпуклости пространства $\mathcal{L}_1^q(G)$, найдется функция ρ_0, $\rho_0 \widetilde{\omega}^{\frac{1}{q}} \in \mathcal{L}_1^q(G)$, для которой

$$\int\limits_G |\rho_k - \rho_0|^q \widetilde{\omega}\, dx \to 0 \tag{8}$$

при $k \to \infty$ и

$$\int\limits_\gamma |\rho_k - \rho_0|^q \, d\mathcal{H}_1 \to 0 \tag{9}$$

при $k \to \infty$ для $m_{q,\widetilde{\omega}}$-почти всех спрямляемых кривых $\gamma \subset G$. Возьмем спрямляемую кривую $\gamma \in \Gamma(F_{0i}, F_{1i}, G/\varnothing)$, удовлетворяющую условию (9) и соединяющую точки $a_0 \in F_{0i}$, $a_1 \in F_{1i}$. Поскольку F_{0i}, F_{1i} – гладкие компакты, то существует гладкий гомеоморфизм g относительной окрестности $\mathcal{U}(a_0)$ (окрестности $\mathcal{U}(a_1)$) точки a_0 в F_{0i} (точки a_1 в F_{1i}) на полупространство H. Производя соответствующую замену в (8) и рассматривая линейные интегралы по лучам, исходящим из точки $g(a_0)$ (точки $g(a_1)$), убедимся в существовании простой спрямляемой кривой γ_j, соединяющей точку a_j с $c_j \in F_{ji}$, $\int_{\gamma_j} \rho_0\, d\mathcal{H}_1 < \infty$, и удовлетворяющей условиям (9) и $\mathcal{H}_1(\gamma_j \cap E) = 0$. В силу выбора, кривая $\widetilde{\gamma} = \gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{a_0, a_1\}$ соединяет F_{0i}^k и F_{1i}^k при $k \geqslant k_0$, значит, $\int_{\widetilde{\gamma}} \rho_0\, d\mathcal{H}_1 \geqslant 1$. Выберем на γ_j последовательность дуг γ_{jl}, соединяющих точку a_j с точкой $c_{jl} \in F_{ji} \setminus E$ и стягивающихся к точке a_j при $l \to \infty$, $j = 0, 1$. Тогда кривая $\widetilde{\gamma}_l = \gamma \cup \gamma_{1l} \cup \gamma_{2l} \cup \{a_0, a_1\}$ обладает теми же свойствами, как и $\widetilde{\gamma}$, и $\int_{\gamma_{jl}} \rho_0\, d\mathcal{H}_1 \to 0$ при $l \to \infty$. Отсюда $\int_\gamma \rho_0\, d\mathcal{H}_1 \geqslant 1$. Другими словами, ρ_0 – обобщенная допустимая метрика (см. [13]) в проблеме модуля $m_{q,\widetilde{\omega}}(F_{0i}, F_{1i}, G/\varnothing)$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} m_{q,\widetilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/\varnothing) = \lim\limits_{k\to\infty} \int_G \rho_k^q \widetilde{\omega}\, dx = \int_G \rho_0^q \widetilde{\omega}\, dx \geqslant m_{q,\widetilde{\omega}}(F_{0i}, F_{1i}, G/\varnothing)$. Из сравнения этих соотношений с (7) следует, что

$$m_{q,\widetilde{\omega}}(F_{0i}, F_{1i}, G/\varnothing) = \lim_{k\to\infty} m_{q,\widetilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/\varnothing).$$

В силу оценки (5),

$$m_{q,\widetilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/\varnothing) = m_{q,\widetilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/E).$$

Известно (см. [5]), что

$$m_{q,\widetilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/E) = C_{q,\widetilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/E).$$

Пусть функция $\varphi_0 \in C_0^\infty(G)$ и равна 1 в окрестности E и в окрестности множества, на котором $f \neq 0$. Тогда $f\varphi_0 = f$ и для линейных комбинаций из (6) функция

$$\sum_{i=1}^{s} a_i u_i \varphi_0 \tag{10}$$

приближает в $L_{q,\widetilde{\omega}}(G)$ функцию f.

Поскольку экстремальная функция для $C_{q,\widetilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/E)$, по определению емкости в $L^1_{q,\widetilde{\omega}}(G)$, аппроксимируется функциями u из $C^\infty(G)$, $|\operatorname{grad} u| = 0$ в окрестности E, то $u\varphi_0 \in C_E^\infty(G)$. Заменяя $u_i\varphi_0$ в (10) указанными функциями, получим требуемую аппроксимацию f функциями из $C_E^\infty(G)$. Тем самым теорема доказана.

Замечание. Компакты F_{0i}, F_{1i} для конденсатора $(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/E)$, рассматриваемого при доказательстве необходимости условия в теореме 3, можно выбрать гладкими.

Это замечание позволяет дать следующий критерий устранимого множества для $FD^{p,\omega}$.

Следствие 1. *Для того чтобы компакт $E \subset G$ был устранимым множеством для пространства $FD^{p,\omega}(G \setminus E)$, необходимо и достаточно, чтобы E было $NH_{q,\widetilde{\omega}}$-множеством в G.*

В случае, когда E – нульмерный компакт, для кривой γ из доказательства условия необходимости в теореме 3 множество $\gamma \cap E$ является нульмерным, следовательно, существует дуга $\gamma_{jl} \subset \gamma$, соединяющая точку a_j с точкой $c_{jl} \in F_{ji} \setminus E$ и стягивающаяся к a_j при $l \to \infty$. Поэтому условие $\mathcal{L}_n(E) = 0$ для нульмерного компакта E в определении $NH_{q,\widetilde{\omega}}$-множества является излишним.

Наконец, заменяя условие 2) в теореме 3 на оценку (5), получим еще один критерий устранимого множества для пространства $FD^{p,\omega}$.

Следствие 2. *Для того чтобы компакт E был устранимым множеством для пространства $FD^{p,\omega}$, необходимо и достаточно, чтобы*

1) *существовало $(q,\widetilde{\omega})$-исключительное множество $\mathcal{E}\subset E$ такое, что для каждой невырожденной компоненты α компакта E множество $\alpha\setminus\mathcal{E}$ или пусто, или состоит из единственной точки;*

2) *для любого заданного $\varepsilon>0$ $m_{q,\widetilde{\omega}}$-почти каждая составная кривая $\gamma=(\tau(a,b)\setminus E)\setminus\{a,b\}\in\Gamma(E)$, $\operatorname{diam}\tau<\varepsilon$, порождается простой спрямляемой кривой τ такой, что $\mathcal{H}_1(\tau\cap E)=0$.*

Литература

1. L. I. Hedberg, *Removable singularities and condenser capacities,* Arkiv Math. **12**, No. 1 (1974).
2. J. Väisäla, *On the null-sets for extremal distances,* Ser A. I. Math., No. 322 (1962), 1–12.
3. В. В. Асеев, А. В. Сычев, *О множествах, устранимых для пространственных квазиконформных отображений,* Сиб. мат. журн. **15**, No. 6 (1974), 1213–1227.
4. С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн, *Критерий устранимости множеств для пространств L_p^1, квазиконформных и квазиизометрических отображений,* Сиб. мат. журн. **18**, No.1 (1977), 48–68.
5. В. А. Шлык, *Нормальные области и устранимые особенности,* Изв. РАН. Сер. мат. **57**, No. 4 (1993), 93–112.
6. И. Н. Демшин, В. А. Шлык, *Критерии устранимых множеств для весовых пространств $L_{p,\omega}^1$, $FD^{p,\omega}$,* Докл. РАН **343**, No. 5 (1995), 590–592.
7. B. B. Muckenhoupt, *The equivalence of two conditions for weight functions,* Studia Math. **49** (1974), 101–106.
8. R. R. Coifman and C. Fefferman,, *Weighted norm inequalities integrals,* Studia Math. **51** (1974).
9. К. Куратовский, *Топология..* Т. 2. М., 1969.
10. L. Schwartz, *Theorie des distributions,* Paris, 1957.
11. B. Fuglede, *Extremal length and functional completion,* Acta Math. **98** (1957), 171–219.
12. И. Н. Демшин, Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Критерии нуль-множеств для весовых соболевских пространств,* Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 52–82.
13. В.А. Шлык, *Весовые емкости, модули конденсаторов и исключительные множества по Фюгледе,* Докл. РАН **332**, No. 4 (1993), 428–431.

Дальневосточный
государственный
университет

Поступило 26 апреля 2002 г.