



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. A. Vatutin, S. M. Sagitov, Critical decomposable Bellman–Harris processes with two types of particles, *Mat. Zametki*, 1988, Volume 43, Issue 2, 276–282

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use <http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.171

February 13, 2025, 15:25:51



КРИТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖИМЫЕ ПРОЦЕССЫ БЕЛЛМАНА — ХАРРИСА С ДВУМЯ ТИПАМИ ЧАСТИЦ, «ДАЛЕКИЕ» ОТ МАРКОВСКИХ

В. А. Ватутин, С. М. Сагитов

Рассмотрим два типа частиц, размножающихся в момент гибели. Будем считать, что численность потомства и продолжительность жизни каждой частицы независимы между собой и не зависят от аналогичных характеристик других частиц. Пусть $G_i(t)$ — функция распределения времени жизни частиц i -го типа, v_{ij} — случайная величина, распределение которой совпадает с распределением числа частиц j -го типа, производимых в конце жизни частицей i -го типа, а $\mu_i(t)$ — число частиц i -го типа, существующих в момент t .

О п р е д е л е н и е. Процесс $(\mu_1(\cdot), \mu_2(\cdot))$ будем называть *критическим разложимым ветвящимся процессом Беллмана — Харриса с двумя типами частиц*, если

$$E v_{11} = E v_{22} = 1, E v_{12} = 0, E v_{21} = A_{21} \in (0, \infty). \quad (1)$$

Пусть, кроме (1), выполнено условие

$$f^i(s) \equiv E s^{v_{ii}} = s + (1-s)^{1+\alpha_i} L_i(1-s) \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

где $\alpha_i \in (0, 1]$, а функции $L_i(\cdot)$ медленно меняются в нуле ($i = 1, 2$). Процесс $(\mu_1(\cdot), \mu_2(\cdot))$ рассматривался прежде в [1] в предположении, что существуют конечные положительные пределы

$$d_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 - G_i(n))}{1 - f_n^i(0)} \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

где $f_n^i(\cdot)$ является n -кратной итерацией функции $f^i(\cdot)$.

Данная заметка посвящена случаю $d_1 \in [0, \infty]$, $d_2 = \infty$.

З а м е ч а н и е 1. Предположим, что в начальный момент времени нет других частиц, кроме одной частицы i -го типа нулевого возраста. Ввиду условия разложимости ($E v_{12} = 0$) процесс $\mu_i(\cdot)$ является ветвящимся процессом Беллмана — Харриса с одним типом частиц. Положим

$$Q_i(t, s) = 1 - E s^{\mu_i(t)}, \quad Q_i(t) = P \{ \mu_i(t) > 0 \}.$$

Здесь уместно пояснить, почему рассматриваемые нами процессы названы «далекими» от марковских. Если бы процесс $\mu_2(\cdot)$ был марковским, то выполнялось бы равенство $d_2 = 0$. Как показано в [2—4], случай $d_2 = 0$ имеет много общего с марковским, в случае $d_2 \in (0, \infty)$ появляются новые свойства, а при $d_2 = \infty$ поведение процесса $\mu_2(\cdot)$ в корне отличается от поведения соответствующего марковского ветвящегося процесса.

Помимо соотношений (1), (2) и (3) с $d_1 \in [0, \infty]$, $d_2 = \infty$ всюду далее предполагаются выполненными следующие условия. В момент $t = 0$ рождается ровно одна частица второго типа. При $i = 2$

$$1 - G_i(t) = t^{-\beta_i} l_i(t), \quad \beta_i > 0, \quad (4)$$

где $l_i(\cdot)$ медленно меняется на бесконечности. Условие (4) будем предполагать выполненным и при $i = 1$ в случае, если $d_1 = \infty$. Наконец, мы будем считать, что существует конечный или бесконечный предел $\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_1(t)/(1 - G_2(t))$.

§ 1. Формулировки основных результатов. Положим $\gamma_i = (1 + \alpha_i)^{-1}$, $m_i = \int_0^\infty t dG_i(t)$ ($i = 1, 2$). Обозначим через $\lambda_1(s)$ единственный положительный корень уравнения

$$y^{1+\alpha_1} = m_1 y + \alpha_1 d_1 (1 - s), \quad s \in [0, 1), \quad d_1 \in [0, \infty).$$

ТЕОРЕМА 1. Если $\sigma < \infty$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \{ s_1^{\mu_1(t)} s_2^{\mu_2(t)} \mid \mu_2(t) > 0 \} = \\ = (1 + \sigma A_{21} \Lambda_1(s_1))^{\gamma_2} - (1 - s_2 + \sigma A_{21} \Lambda_1(s_1))^{\gamma_2}$$

для всех $(s_1, s_2) \in [0, 1) \times [0, 1]$, где

$$\Lambda_1(s) = \begin{cases} \lambda_1(s)/\lambda_1(0), & \text{если } d_1 < \infty, \\ (1 - s)^{\gamma_1}, & \text{если } d_1 = \infty. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 2. Указанное предельное распределение является собственным тогда и только тогда, когда
либо $\sigma = 0$, либо $\sigma \in (0, \infty)$, $d_1 = \infty$. (5)

Если $\sigma = 0$, то $P\{\mu_1(t) = 0 \mid \mu_2(t) > 0\} \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$.

Прежде чем сформулировать теорему 2, напомним одно утверждение, доказанное в [5]. Пусть

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U_1(t) (1 - G_2(t))^{\alpha_1} L_1(1 - G_2(t)) = a \in [0, \infty], \quad (6)$$

где $U_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} G_1^{*k}(t)$. Если $h(t)$ — монотонно убывающая к нулю функция такая, что при $t \rightarrow \infty$

$$h(t) \sim \begin{cases} 1 - G_2(t), & \text{если } a < \infty, \\ \frac{(1 - G_2(t))^{1+\alpha_1} L_1(1 - G_2(t))}{1 - G_1(t)}, & \text{если } a = \infty, \end{cases}$$

то для всех $x > 0$ существует предел

$$B(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_1(t, e^{-xh(t)}) / (1 - G_2(t)). \quad (7)$$

Функция $B(x)$ в зависимости от значений a, m_1 имеет вид

$$\begin{aligned} &x(1 + a\alpha_1 x^{\alpha_1})^{-1/\alpha_1}, \quad \text{если } a < \infty, \quad m_1 < \infty, \\ &x\varphi(x^{\alpha_1/\beta_1}), \quad \text{если } a < \infty, \quad m_1 = \infty, \\ &x^{\gamma_1}, \quad \text{если } a = \infty, \end{aligned}$$

где $\varphi(\cdot)$ — единственное непрерывное решение уравнения

$$\varphi(x) = 1 - a \int_0^x \varphi^{1+\alpha_1}(x-u) u^{\alpha_1-1} du.$$

З а м е ч а н и е 3. Соотношение (6) в случае $\sigma > 0$, $d_1 < \infty$ выполняется автоматически (см. [2, 4]). При этом $U_1(t) \sim t/m_1$, $t \rightarrow \infty$ и $a = (\alpha_1 m_1)^{-1} (\lambda_1(0)/\sigma)^{\alpha_1}$ (мы считаем $1/\infty = 0$).

ТЕОРЕМА 2. Если (5) не выполняется и (6) имеет место при $\sigma = d_1 = \infty$, то для всех $x \geq 0$, $s \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} E\{e^{-xh(t)\mu_1(t)sh_2(t)} \mid \mu_2(t) > 0\} = \\ = (1 + A_{21}B(x))^{\gamma_2} - (1 - s + A_{21}B(x))^{\gamma_2}. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 4. Теорема 2 показывает, в частности, что при $a = 0$ частицы первого типа в определенном смысле ведут себя как вечные (см. [6]).

§ 2. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть $y(\cdot)$ — неотрицательная невозрастающая функция, а функция $H(u, z)$ не возрастает по u и не убывает по z . Если $0 \leq H(u, z) \leq 1$ для всех $u, z > 0$ и

$$H(t, y(t))/(1 - G_2(t)) \rightarrow H, \quad t \rightarrow \infty,$$

то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - G_2(t)} H(\cdot, y(t)) * G_2(t) = H.$$

Доказательство. Поскольку

$$H(\cdot, z) * G_2(t) = \int_0^t H(t-u, z) dG_2(u) \geq H(t, z) G_2(t),$$

имеем

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - G_2(t)} H(\cdot, y(t)) * G_2(t) \geq H.$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon \in (0, 1)$

$$H(\cdot, z) * G_2(t) \leq H(t(1-\varepsilon), z)G_2(t\varepsilon) + \\ + H(t\varepsilon, z)(G_2(t(1-\varepsilon)) - G_2(t\varepsilon)) + G_2(t) - G_2(t(1-\varepsilon)).$$

Следовательно,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - G_2(t)} H(\cdot, y(t)) * G_2(t) \leq \\ \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - G_2(t)} \{H(t(1-\varepsilon), y(t(1-\varepsilon))) + \\ + H(t\varepsilon, y(t\varepsilon))(1 - G_2(t\varepsilon)) + G_2(t) - G_2(t(1-\varepsilon))\} = \\ = (1-\varepsilon)^{-\alpha_2} H + (1-\varepsilon)^{-\alpha_2} - 1.$$

В силу произвольности ε лемма 1 справедлива.

ЛЕММА 2 (см. [7]). Функция $Q(t, s_1, s_2) = 1 - E s_1^{\mu_1(t)} s_2^{\mu_2(t)}$ монотонна по t , если точка (s_1, s_2) принадлежит множеству

$$D = \{(s_1, s_2) \in [0, 1) \times [0, 1): E s_1^{\nu_1} s_2^{\nu_2} \geq s_2\}.$$

§ 3. Доказательство теоремы 1. Основное соотношение для производящей функции ветвящегося процесса Беллмана — Харриса в нашем случае можно записать так:

$$Q(t, s_1, s_2) = (1 - s_2)(1 - G_2(t)) + Q_1(\cdot, s_1)(A_{21} + \\ + \varepsilon(\cdot, s_1, s_2)) * G_2(t) + (1 - f^2(1 - Q(\cdot, s_1, s_2))) * G_2(t), \quad (8)$$

где функция $\varepsilon(t, s_1, s_2)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю равномерно по $(s_1, s_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Используя лемму 1 и то, что $Q_1(t, s)/Q_1(t) \rightarrow \Lambda_1(s)$ при $t \rightarrow \infty$ (см. [2—4]), преобразуем уравнение (8) к виду

$$Q(t, s_1, s_2) = (1 - s_2 + \sigma A_{21} \Lambda_1(s_1))(1 - G_2(t))(1 + \varepsilon_1(t)) + (1 - f^2(1 - Q(\cdot, s_1, s_2))) * G_2(t)$$

(здесь и далее $\varepsilon_i(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$). Асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ решения уравнения такого же вида изучалось в [3] при условии монотонности по t этого решения. Применяя метод работы [3] к предыдущему уравнению, находим, что для всех $(s_1, s_2) \in D$ (см. лемму 2)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t, s_1, s_2)/Q_2(t) = (1 - s_2 + \sigma A_{21} \Lambda_1(s_1))^{\nu_2}. \quad (9)$$

Очевидное равенство

$$E\{s_1^{\mu_1(t)} s_2^{\mu_2(t)} | \mu_2(t) > 0\} = \frac{Q(t, s_1, 0) - Q(t, s_1, s_2)}{Q_2(t)} \quad (10)$$

и (9) влекут утверждение теоремы 1 при $(s_1, s_2) \in D$. Поскольку в теореме 1 речь идет, по существу, о сходимости семейства аналитических функций, нам остается лишь заметить, что D содержит открытое подмножество из R^2 .

§ 4. Доказательство теоремы 2. Положим

$$q(u, t) = Q(u, e^{-xh(t)}, s), \quad \Phi(x) = x^{1+\alpha_2} L_2(x), \\ X(t) = q(t, t).$$

Ввиду (10) нам нужно доказать соотношение

$$X(t) \sim Q_2(t)(1 - s + A_{21}B(x))^{\nu_2}, \quad t \rightarrow \infty,$$

для чего достаточно установить, что при $t \rightarrow \infty$ (см. [3])

$$\Phi(X(t)) \sim (1 - s + A_{21}B(x))(1 - G_2(t)). \quad (11)$$

Из (7) с помощью леммы 1 выводим, что

$$Q_1(\cdot, e^{-xh(t)}) * G_2(t) \sim B(x)(1 - G_2(t)), \quad t \rightarrow \infty.$$

Это в свою очередь вместе с (8) влечет равенство

$$X(t) = (1 - s + A_{21}B(x))(1 - G_2(t))(1 + \varepsilon_2(t)) + (1 - f^2(1 - q(\cdot, t))) * G_2(t). \quad (12)$$

Согласно лемме 2 функция $q(u, t)$ монотонна по u при достаточно больших t . Это свойство позволяет из (12) получить неравенство

$$\Phi(X(t)) + X(t)(1 - G_2(t)) \geq (1 - s + A_{21}B(x)) \cdot (1 - G_2(t))(1 + \varepsilon_2(t)).$$

Поскольку $X(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, последнее неравенство влечет оценку

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(X(t))}{1 - G_2(t)} \geq 1 - s + A_{21}B(x). \quad (13)$$

Для того чтобы получить из (12) соотношение, противоположное оценке (13), воспользуемся монотонностью $q(u, t)$ по t :

$$X(t) \leq (1 - s + A_{21}B(x))(1 - G_2(t))(1 + \varepsilon_2(t)) + (1 - f^2(1 - X(\cdot))) * G_2(t). \quad (14)$$

Ввиду $X(t) \geq Q(t, 1, s) = Q_2(t, s)$ справедливо соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} tX^{\alpha_2}(t)L_2(X(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} tQ_2^{\alpha_2}(t)L_2(Q_2(t)) = \infty.$$

Стало быть,

$$X(t) = o(t\Phi(X(t))), \quad t \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Как показано в [6], из (14) и (15) вытекает неравенство

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\int_0^\infty e^{-\lambda u} u^r \Phi(X(u)) du}{\int_0^\infty e^{-\lambda u} u^r (1 - G_2(u)) du} \leq 1 - s + A_{21}B(x) \quad (16)$$

для $r \geq 0$ таких, что $\int_0^\infty u^r (1 - G_2(u)) du = \infty$.

Из (13), (4), (16) заключаем, что при $t \rightarrow \infty$

$$\int_0^t u^r \Phi(X(u)) du \sim (1 - s + A_{21}B(x)) \int_0^t u^r (1 - G_2(u)) du.$$

Это в силу монотонности $\Phi(X(\cdot))$ и свойств правильно меняющихся функций (см. упражнение 2.7 из [8]) доказывает (11).

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР
Институт математики и механики
АН КазССР

Поступило
26.09.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В а т у т и н В. А., С а г и т о в С. М. Разложимый критический ветвящийся процесс Беллмана — Харриса с двумя типами частиц // ДАН СССР. 1986. Т. 291, № 5. С. 1040—1043.
- [2] В а т у т и н В. А. Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса Беллмана — Харриса с бесконечной дисперсией // Теория вероятностей и ее применения. 1976. Т. 21, вып. 4. С. 861—863.
- [3] В а т у т и н В. А. Дискретные предельные распределения числа частиц в критических ветвящихся процессах Беллмана — Харриса // Теория вероятностей и ее применения. 1977. Т. 22, вып. 1. С. 150—155.
- [4] В а т у т и н В. А. Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса Беллмана — Харриса // Мат. сб. 1979. Т. 109, вып. 3. С. 440—452.
- [5] В а т у т и н В. А. Критические ветвящиеся процессы Беллмана — Харриса, начинающиеся с большого числа частиц // Математические заметки. 1986. Т. 40, вып. 4. С. 527—541.
- [6] В а т у т и н В. А. Критический ветвящийся процесс Беллмана — Харриса с финальным типом // Теория вероятностей и ее применения. 1986. Т. 31, вып. 3. С. 492—503.
- [7] В а т у т и н В. А. Дискретные предельные распределения числа частиц в ветвящихся процессах Беллмана — Харриса с несколькими типами частиц // Теория вероятностей и ее применения. 1979. Т. 24, вып. 3. С. 503—514.
- [8] С е н е т а Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.