Математические заметки

Том 107 выпуск 5 май 2020

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Асимптотика одномерных линейных стоячих волн на воде с дисперсией и вырождением на границе

А. Ю. Аникин

Ключевые слова: собственные функции, стационарная задача, асимптотики, стоячие волны на воде, дисперсия.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12631

1. Постановка задачи. В настоящей заметке мы обобщаем результаты работы [1], где изучалась асимптотика собственных функций одномерного волнового оператора:

$$-\frac{d}{dx}\sqrt{D(x)}\,\frac{d}{dx}\,\psi_n=\omega_n^2\psi_n. \tag{1}$$

Здесь функция $D(x)$ гладкая вплоть до границы отрезка $[a,b]$, положительная на интервале (a,b) и такая, что $D(a)=D(b)=0$ и $D'(a)D'(b)\neq 0$. Уравнение (1) рассматривается на отрезке $[a,b]$, а его решение ищется в классе функций, имеющих конечную энергию, без граничных условий. Функции ψ_n описывают в длинноволновом приближении стоячие волны в бассейне, глубина которого задается функцией $D(x)$. В работе [10] была построена формальная асимптотика ψ_n при $n\to\infty$.

Мы будем изучать стоячие волны не в длинноволновом приближении, а с учетом дисперсии. Для этого, следуя работам [2]–[4], рассмотрим h-псевдодифференциальный оператор со следующим символом:

$$\widehat{H}=H\biggl(\overset{1}{-ih\frac{\partial}{\partial x}},\overset{2}{x},h\biggr),\qquad H(p,x,h)=H_0+hH_1,\quad H_0=p\tanh(pD(x)),\quad H_1=\frac{i}{2}\,\frac{\partial^2H_0}{\partial p\,\partial x}\,. \tag{2}$$

Изучаются асимптотические собственные функции этого оператора

$$\widehat{H}\psi=\omega^2\psi \tag{3}$$

при $h\to 0$. Представим функцию H_0 в виде

$$H_0=\frac{f(pD(x))}{D(x)}\,,\qquad\text{где}\quad f(z)=z\tanh z.$$

Пусть $f^{-1}\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$ – обратная функция к f на полуоси $[0,\infty)$. Положим для любых $a\leqslant x_0\leqslant x\leqslant b$

$$S_\omega(x_0,x)=\int_{x_0}^{x}\frac{f^{-1}(\omega^2D(\xi))\,d\xi}{D(\xi)}\,.$$

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 16-11-10282.

Выберем последовательность значений $\omega_n = \omega_n(h)$ для $n = 0, 1, 2\dots$ из условия

$$S_{\omega_n}(a,b) = \pi h\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{4}$$

Зафиксируем малое $\varepsilon > 0$, и определим функции

$$\psi_n^+ = \sqrt{\frac{4\pi S_\omega(x,b)}{hf'(f^{-1}(\omega^2 D(x)))}}\,\mathbf{J}_0\left(\frac{S_\omega(x,b)}{h}\right), \qquad x \in [a+\varepsilon, b], \tag{5}$$

$$\psi_n^- = (-1)^n\sqrt{\frac{4\pi S_\omega(a,x)}{hf'(f^{-1}(\omega^2 D(x)))}}\,\mathbf{J}_0\left(\frac{S_\omega(a,x)}{h}\right), \qquad x \in [a, b-\varepsilon]. \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{J}_0$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Возьмем гладкое разбиение единицы $1 = \chi_+(x) + \chi_-(x)$ такое, что $\operatorname{supp}\chi_+ \subset [a+\varepsilon, b]$ и $\operatorname{supp}\chi_- \subset [a, b-\varepsilon]$. Положим $\psi_n = \chi_+\psi_n^+ + \chi_-\psi_n^-$

Теорема 1. *Числа ω_n и функции ψ_n являются асимптотическими собственными функциями и собственными значениями задачи* (3) *для оператора* (2), *а именно*,

$$\|\widehat{H}\psi_n - \omega_n^2\psi_n\|_{L^2[a,b]} = O(h^2), \qquad \|\psi_n\|_{L^2[a,b]} = \sqrt{\frac{\omega_n}{\pi}}\,(1 + O(h), \qquad h \to 0.$$

Замечание 1. В этой теореме речь идет только о формальной асимптотике. Мы не делаем никаких утверждений о близости ψ_n и ω_n к некоторым настоящим собственным функциям и значениям. Более того, мы даже не обсуждаем вопрос о существовании последних.

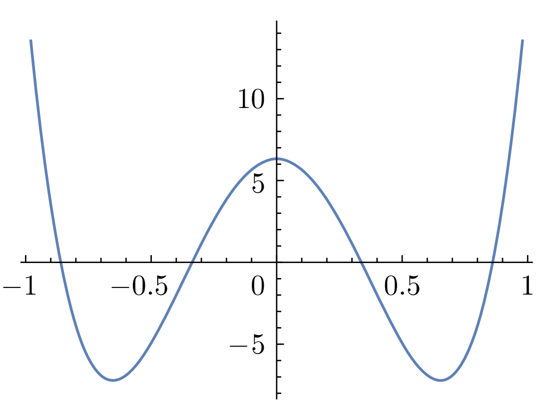
Замечание 2. Заметим, что f' может быть выражена более явно. Действительно, из равенств

$$f' = \tanh z + z(1 - \tanh^2 z), \qquad z = f^{-1}(\omega^2 D(x)), \qquad \tanh z = \frac{\omega^2 D(x)}{f^{-1}(\omega^2 D(x))}$$

следует, что

$$f'(f^{-1}(\omega^2 D(x))) = \frac{\omega^2 D(x)}{f^{-1}(\omega^2 D(x))} + f^{-1}(\omega^2 D(x)) - \frac{\omega^4 D^2(x)}{f^{-1}(\omega^2 D(x))}. \tag{7}$$

Формулы (5),(6) являются конструктивными и без труда реализуются численно. На рис. 1 изображены графики некоторых функций ψ_n для случая $b = -a = 1$ и $D(x) = 1 - x^2$.



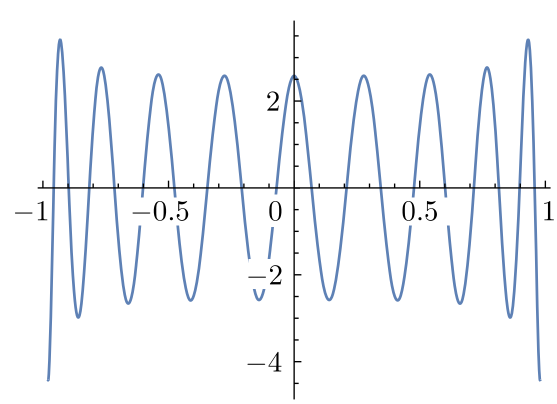


Рис. 1. График функции ψ_n от $x \in (-1, 1)$ для случая $D(x) = 1 - x^2$. Слева $n = 4$, $h = 0.022$ и $\omega = 0.1$. Справа $n = 20$, $h = 0.053$, $\omega = 1$.

2. Принцип Мопертюи–Якоби. Заметим, что если взять $f(z) = z^2$, то $H_0 = p^2 D(x)$, и задача (3) для оператора (2) превращается в задачу (1), где в левой части надо добавить множитель h^2. В этом случае

$$S_\omega(x_0, x) = \omega S(x_0, x), \qquad \text{где} \quad S(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{D(\xi)}},$$

условие (4) переписывается в виде: $\omega_n = \pi h(n + 1/2)/S(a, b)$, а формулы (5), (6) примут вид

$$\psi_n^- = \sqrt{\frac{2\pi S(a,x)}{h\sqrt{D(x)}}}\,\mathbf{J}_0\biggl(\frac{\omega_n S(a,x)}{h}\biggr), \qquad \psi_n^+ = (-1)^n \sqrt{\frac{2\pi S(x,b)}{h\sqrt{D(x)}}}\,\mathbf{J}_0\biggl(\frac{\omega_n S(x,b)}{h}\biggr). \tag{8}$$

Если в формулах (8) заменить ω_n на единицу, а затем h на ω_n^{-1}, то мы получим асимптотическое решение задачи (1) при $n \to \infty$, совпадающее с решением из работы [1].

Покажем, что можно сделать наоборот – вывести формулы (5), (6) для решения задачи (3) для оператора (2) из формул (8). Этот вывод основан на квазиклассическом принципе Мопертюи–Якоби (см. [5], [6], а также [7], где рассматривалась стационарная задача, аналогичная (3), но при условии $D(x) > 0$ всюду). При этом мы не будем заботиться о полной строгости рассуждений. Аккуратное доказательство теоремы 1 с применением других соображений будет приведено в п. 3.

Итак, выберем $\omega = \omega_n$ из условия (4) и переобозначим

$$H_0 = p \tanh(pD(x)) - \omega_n^2.$$

Лагранжево многообразие Λ_n, отвечающее асимптотической собственной функции ψ_n, есть объединение двух незамкнутых кривых, задаваемых уравнением $H_0 = 0$. На этом многообразии надлежит зафиксировать инвариантную меру dt, где t – гамильтоново время, отвечающее гамильтониану H_0. Тогда в силу того, что субглавный символ оператора (2) равен нулю, асимптотические собственные функции задаются с помощью модифицированного канонического оператора в [8] от единицы: $\psi_n^\pm = K_{\Lambda_n}^{dt} 1$. Подчеркнем, что речь идет не о стандартном каноническом операторе Маслова [9], а о его обобщении. Необходимость этого обобщения связана с тем, что лагранжево многообразие Λ_n некомпактно, и соответствующие решения системы Гамильтона уходят на бесконечность по импульсам за конечное время. Модифицированный канонический оператор представляет собой объект, для введения которого требуется сделать компактификацию фазового пространства.

Рассмотрим другой гамильтониан

$$\mathcal{H}_0 = p^2 c_{\omega_n}^2(x) - 1, \qquad \text{где} \quad c_\omega(x) = \frac{D(x)}{(f^{-1}(\omega^2 D(x)))}.$$

Тогда лагранжево многообразие Λ_n может быть эквивалентным образом задано уравнением $\mathcal{H}_0 = 0$. Пусть s – координата на Λ_n, определяемая гамильтоновым временем системы с гамильтонианом $\mathcal{H}_0$. Тогда решения двух систем с гамильтонианами H_0 и $\mathcal{H}_0$, отвечающие Λ_n, совпадают с точностью до замены времени: $dt = Q\,ds$, где $Q = H_0/\mathcal{H}_0$ (классический принцип Мопертюи–Якоби). Вычислим $Q|_{\Lambda_n}$. Пусть $p = P_\pm(x) \equiv \pm 1/c_\omega(x)$ – параметризация Λ_n. Тогда

$$Q|_{\Lambda_n} \equiv Q(x) = \frac{(H_0)'_p}{(\mathcal{H}_0)'_p}\bigg|_{p=P_\pm(x)} = \frac{f'(f^{-1}(\omega^2 D(x)))f^{-1}(\omega^2 D(x))}{2D(x)} = \frac{f'(f^{-1}(\omega^2 D(x)))}{2c_\omega(x)}.$$

Отметим, что $Q \geqslant C > 0$, и мы можем написать

$$K_{\Lambda_n}^{dt} 1 = \frac{1}{\sqrt{Q(x)}} K_\Lambda^{ds} 1$$

(квазиклассический принцип Мопертюи–Якоби). Для стандартного канонического оператора этот факт был доказан в [5]. Теперь нам остается вычислить $K^{dt}_{\Lambda_n}1$. Этот канонический оператор в картах, проектирующихся на отрезки $[a+\varepsilon, b]$ и $[a, b-\varepsilon]$ задается правыми частями равенств (8) для ψ_n^- и ψ_n^+ соответственно, где надо положить $\omega_n = 1$, а затем S заменить на S_{ω_n} и $\sqrt{D}$ на c_ω. В итоге, получаем требуемую формулу.

3. Доказательство. Для удобства будем считать, не ограничивая общности, что оператор рассматривается на отрезке $M = [-a, a]$. Доказательство основано на подходе из работы [10], где оператор с вырождением на границе многообразия M отождествляется с оператором на многообразии $\mathfrak{M}$ без края на единицу большей размерности. При этом многообразие M получается из $\mathfrak{M}$ факторизацией по действию группы окружности $\mathbb{S}^1$. Приведем необходимые для доказательства теоремы 1 конструкции из работы [10]. Рассмотрим сферу $\mathfrak{M} = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2\}$, выберем на ней координаты x_1, ϕ с помощью формул

$$x_2 = \sqrt{a^2 - x_1^2}\cos\phi, \qquad x_3 = \sqrt{a^2 - x_1^2}\sin\phi.$$

На этой сфере действует группа $\mathbb{S}^1$ следующим образом: $\phi \mapsto \phi + \theta$, $\theta \bmod 2\pi$. Группа $\mathbb{S}^1$ действует полусвободно, т.е. свободно за исключением неподвижных точек: $x_1 = \pm a$. Проекция $\pi\colon \mathfrak{M} \to M$ задается формулой $\pi(x_1, x_2, x_3) = x_1$. Покроем сферу $\mathfrak{M}$ тремя картами: одной внутренней $\mathfrak{M}_0 = \pi^{-1}(-a, a)$ с координатами x_1, ϕ и двумя краевыми $\mathfrak{M}_\pm$ (где $\pm a \in \pi(\mathfrak{M}_\pm)$) с координатами y_1, y_2. Формулы перехода имеют вид

$$y_1 = 2\sqrt{a \mp x_1}\cos\phi, \qquad y_2 = 2\sqrt{a \mp x_1}\sin\phi.$$

При этом меры, задаваемые такими координатами согласованы:

$$dy_1 \wedge dy_2 = -2dx_1 \wedge d\phi.$$

Карта $\mathfrak{M}_+$ может быть продолжена на все $\mathfrak{M}$ с выкинутой сколь угодно малой окрестностью точки $-a$; аналогичное свойство справедливо для карты $\mathfrak{M}_-$. Пусть теперь P – некоторый h-псевдодифференциальный оператор, действующий на функциях из $\mathfrak{M}$, который коммутирует с действием группы $\mathbb{S}^1$. Такой оператор переводит $\mathbb{S}^1$-инвариантные функции вновь в $\mathbb{S}^1$-инвариантные, и поэтому ограничение оператора на такие функции можно трактовать как оператор P_M, действующий на функциях, заданных на $M = [-a, a]$. Исходный оператор P называется *поднятием* оператора P_M.

Построим поднятие оператора $\widehat{H}$. Рассмотрим в кокасательном расслоении $T^*\mathfrak{M}$ карты $T^*\mathfrak{M}_0$ и $T^*\mathfrak{M}_\pm$ с локальными симплектическими координатами $(x_1, \phi; p, p_\phi)$ и $(y_1, y_2; \xi_1, \xi_2)$. Оператор P зададим символом $\mathcal{H}$ в картах $T^*\mathfrak{M}_\pm$:

$$P = \mathcal{H}\biggl(-ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y_1}}, \overset{2}{y_1}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y_2}}, \overset{2}{y_2}, h\biggr), \qquad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + h\mathcal{H}_1 + O(h^2). \tag{9}$$

Его субглавный символ предполагается равным нулю, а главный символ имеет вид

$$\mathcal{H}_0(\xi_1, y_1, \xi_2, y_2) = \xi^2 A_\pm\left(\frac{y^2}{4}\right) g\left(\frac{\langle\xi, y\rangle}{2} A_\pm\left(\frac{y^2}{4}\right)\right). \tag{10}$$

Здесь $g(z) = \tanh z/z$, $A_\pm(x) = D(x)/(a \pm x)$, и $\langle\xi, y\rangle = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2$. Пересчитывая символ в координатах карты $T^*\mathfrak{M}_0$, получаем

$$\mathcal{H}_0 = \left(p^2 x_1^\pm + \frac{p_\phi^2}{4x_1^\pm}\right) A_\pm(x_1) g(p x_1^\pm A_\pm(x_1)) = p\tanh(pD(x_1)) + \frac{p_\phi^2}{4x_1^\pm} A_\pm(x_1) g(p x_1^\pm A_\pm(x_1)), \tag{11}$$

где $x_1^\pm = a \pm x_1$. Заметим, что при действии оператора P на $\mathbb{S}^1$-инвариантные функции вклад от второго слагаемого в правой части (11) равен нулю. Таким образом, оператор, задаваемый локально выражениями (9), (10), продолжается до оператора во всем $\mathfrak{M}$, который является поднятием $\widehat{H}$.

Построим $\mathbb{S}^1$-инвариантные асимптотические собственные функции оператора P с помощью стандартного канонического оператора [9]. Пусть $\widetilde{\Phi} \subset T^*\mathfrak{M}$ – гиперповерхность, задаваемая в картах $T^*\mathfrak{M}_\pm$ уравнением $y_1\xi_2 - y_2\xi_1 = 0$, а в карте $T^*\mathfrak{M}_0$ уравнением $p_\phi = 0$. В картах $T^*\mathfrak{M}_\pm$ поверхность $\widetilde{\Phi}$ параметризуется координатами ρ, η, ψ следующим образом:

$$y = \eta\mathbf{n}(\psi), \quad \xi = \rho\mathbf{n}(\psi), \qquad \eta \in (-\eta_0, \eta_0), \quad \rho > 0, \quad \mathbf{n} = (\cos\psi, \sin\psi). \tag{12}$$

Рассмотрим инвариантное относительно гамильтоновой системы с гамильтонианом $\mathcal{H}_0$ и относительно группы $\mathbb{S}^1$ лагранжево многообразие $\Lambda \subset \widetilde{\Phi}$. Все такие многообразия образуют семейство, параметризованное значением полной энергии: $\mathcal{H}_0 = \omega^2$. Обозначим через Λ_n те из них, которые удовлетворяют правилу квантования Бора–Зоммерфельда. Легко видеть, что это условие есть в точности (4). Снабдим многообразие Λ_n инвариантной мерой, которая в карте $\mathfrak{M}_0$ имеет вид $d\phi \wedge dt$, а в картах $\mathfrak{M}_\pm$ – вид $d\psi \wedge dt$, где t – гамильтоново время. Покроем Λ_n двумя картами $\Lambda_n^\pm = \Lambda_n \cap T^*\mathfrak{M}^\pm$. (Внутренняя карта нам больше не нужна, она требовалась лишь для того, чтобы построить поднятие оператора $\widehat{H}$.) Параметризация $\Lambda_n^\pm$ локальными координатами тогда имеет вид (12), куда следует подставить $\rho = \rho_0(t)$ и $\eta = \eta_0(t)$ – соответствующее решение одномерной системы Гамильтона с гамильтонианом

$$\mathcal{H}_{1\mathrm{D}}(\rho, \eta) = \rho^2 A_\pm\left(\frac{\eta^2}{4}\right) g\left(\frac{\rho\eta}{2} A_\pm\left(\frac{\eta^2}{4}\right)\right) = \frac{2\rho}{\eta}\tanh\left(\frac{\rho\eta}{2} A_\pm\left(\frac{\eta^2}{4}\right)\right) = \omega_n^2.$$

Асимптотические собственные функции, о которых идет речь в теореме, задаются в виде $K_{\Lambda_n}1$. Нам остается проверить, что $K_{\Lambda_n}1$ в картах, лежащих над $\mathfrak{M}_\pm$, имеет вид (5), (6). Воспользуемся представлением для K_{Λ_n}, которое было получено в [10] (см. также [11]).

Выберем начальную точку $\alpha^* \in \Lambda_n$, скажем, из условия $x = 0$ и $\eta < 0$ в карте Λ_n^+. Эту же точку α_* выберем в качестве начальной точки в каждой карт $\Lambda_n^\pm$. Тогда, выбирая разбиение единицы $1 = \chi_+ + \chi_-$, подчиненное атласу $\Lambda_n = \Lambda_n^+ \cup \Lambda_n^-$, мы можем записать

$$K_{\Lambda_n}1 = K_{\Lambda_n^+}\chi^+ + K_{\Lambda_n^-}\chi^-,$$

где $K_{\Lambda_n^\pm}$ – локальные канонические операторы, отвечающие картам $\Lambda_n^\pm$. Для того, чтобы записать явную формулу для локальных канонических операторов, введем следующие конструкции. Пусть $\alpha(\eta, \psi)$ – точка на $\Lambda_n^\pm$ с такими координатами (t, ψ), что $\eta = \eta_0(t)$. Рассмотрим (не зависящую от ψ) функцию $\tau(\eta) = \int_{\alpha_\pm}^{\alpha(\eta,\psi)} \rho\, d\eta$, где интеграл берется по пути, целиком лежащем в $\Lambda_n^\pm$. Условимся, что $t = 0$ отвечает $y = 0$, и обозначим через $t = t_1(|y|)$ и $t = t_{-1}(|y|)$ решения уравнения $|\eta_0(t)| = |y|$, где $t_{-1}(|y|) \leqslant 0 \leqslant t_1(|y|)$. Далее, пусть

$$\tau_{\mathrm{ev}} = \frac{1}{2}(\tau(|y|) + \tau(-|y|)), \qquad \tau_{\mathrm{odd}} = \frac{1}{2}(\tau(|y|) - \tau(-|y|)),$$

$\mathbf{J}_s$ – функция Бесселя первого рода s-го порядка,

$$J(t) = \frac{\partial\eta_0}{\partial t} = \frac{\partial\mathcal{H}_{1\mathrm{D}}}{\partial\rho}, \qquad J_s(|y|) = J(t_s(|y|)) \quad \text{при} \quad s = 1, -1,$$

и пусть $m = (1 - \operatorname{sign}\eta(\alpha_\pm))/2$. Тогда действие локального канонического оператора $K_{\Lambda_n^\pm}\mathcal{A}$ в карте на амплитуду $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$ с точностью до $O(h)$ записывается в виде

$$[K_{\Lambda_n^\pm}\mathcal{A}](|y|) = e^{\pi i/4 - \pi i m/2 + \tau_{\mathrm{ev}}/h}\sqrt{\frac{2\pi\tau_{\mathrm{odd}}}{h|y|}} \\ \times \sum_{s=-1,1}\left[\mathbf{J}_0\left(\frac{\tau_{\mathrm{odd}}}{h}\right) + i(-1)^{(s-1)/2}\mathbf{J}_1\left(\frac{\tau_{\mathrm{odd}}}{h}\right)\right]\frac{\mathcal{A}(t_s(|y|))}{\sqrt{|J_s|}}.$$

Положим

$$S_-(x) = S_{\omega_n}(-a, x), \qquad S_+(x) = S_{\omega_n}(x, a).$$

Легко видеть, что $\tau_{\mathrm{ev}} = \pm S_+(0)$, а $\tau_{\mathrm{odd}} = S_\pm(x)$ в карте $\Lambda_n^\pm$; $m = 0$ в карте Λ_n^+, и $m = 1$ в Λ_n^-. Далее, $|J(t_1(|y|))| = |J(t_{-1}(|y|))|$, поэтому слагаемое с $\mathbf{J}_1$ пропадает. Отсюда следует, что

$$K_{\Lambda_n} 1 = e^{\pi i/4 + iS_+(0)/h} \sqrt{\frac{8\pi}{h|yJ_1|}} \\ \times \left(\sqrt{S_+(x)}\, \mathbf{J}_0\left(\frac{S_+(x)}{h}\right)\chi_+(x) + (-1)^n \sqrt{S_-(x)}\, \mathbf{J}_0\left(\frac{S_-(x)}{h}\right)\chi_-(x)\right),$$

и нам остается вычислить $|yJ_1| = |\eta J_1|$. Обозначим

$$B = \frac{\rho\eta}{2} A_\pm\left(\frac{\eta^2}{4}\right).$$

Тогда

$$J_1 = \frac{2}{\eta}\tanh B + \rho A_\pm\left(\frac{\eta^2}{4}\right)(1 - \tanh^2 B).$$

Используя (7) и то, что

$$\rho = \frac{2f^{-1}((\omega^2\eta^2/4)A_\pm(\eta^2/4))}{\eta A_\pm(\eta^2/4)}, \\ \tanh B = \frac{\omega^2\eta^2 A_\pm(\eta^2/4)}{4f^{-1}((\omega^2\eta^2/4)A_\pm(\eta^2/4))},$$

получаем $|yJ_1|(x) = 2|f'(f^{-1}(\omega^2 D(x)))|$.

Итак, с точностью до постоянного множителя, модуль которого равен единице, $K_{\Lambda_n}1$ в картах $\Lambda_n^\pm$ задается формулами (5), (6). Утверждение теоремы 1 следует из формулы коммутации для (стандартного) канонического оператора [9].

Автор благодарен С. Ю. Доброхотову и В. Е. Назайкинскому за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, *Математическая физика и приложения*, Тр. МИАН, **306**, МИАН, М., 2019, 83–99. **[2]** С. Ю. Доброхотов, *Докл. АН СССР*, **269**:1 (1983), 76–80. **[3]** С. Ю. Доброхотов, П. Н. Жевандров, *Функц. анализ и его прил.*, **19**:4 (1985), 43–54. **[4]** S. Yu. Dobrokhotov, P. N. Zhevandrov, *Russ. J. Math. Phys.*, **10**:1 (2003), 1–31. **[5]** S. Yu. Dobrokhotov, M. Rouleux, *Asymptot. Anal.*, **74**:1-2 (2011), 33–73. **[6]** С. Ю. Доброхотов, М. Руло, *Матем. заметки*, **87**:3 (2010), 458–463. **[7]** С. Ю. Доброхотов, Д. С. Миненков, М. Руло, *Матем. заметки*, **97**:1 (2015), 48–57. **[8]** В. Е. Назайкинский, *Матем. заметки*, **96**:2 (2014), 261–276. **[9]** В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976. **[10]** С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, *Матем. заметки*, **107**:5 (2020), 780–786. **[11]** А. Ю. Аникин, С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, *Матем. заметки*, **104**:4 (2018), 483–504.

А. Ю. Аникин
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского
Российской академии наук, г. Москва;
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Московская область, г. Долгопрудный
E-mail: anikin83@inbox.ru

Поступило
10.12.2019
Принято к публикации
20.12.2019