E. I. Shustin, Versal deformations in the space of planar curves of fixed degree, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1987, Volume 21, Issue 1, 90–91

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 1, 90—91

УДК 512.772

ВЕРСАЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПЛОСКИХ КРИВЫХ ФИКСИРОВАННОЙ СТЕПЕНИ

Е. И. Шустин

В этой заметке получены достаточные условия для независимости возмущений особых точек плоских алгебраических кривых.

Обозначим через $\mathbb{C}P^n$, $n = m(m+3)/2$, пространство плоских проективных кривых степени m. Пусть $F \in \mathbb{C}P^n$ — кривая, отличная от объединения прямых, проходящих через одну точку, и $z_1, \ldots, z_s$ — все ее особые точки с числами Милнора $\mu(z_1), \ldots, \mu(z_s)$. Пусть $U(z_i) \subset \mathbb{C}P^2$ — достаточно малый открытый шар с центром z_i, $1 \leqslant i \leqslant s$. Непрерывное семейство аналитических в $U(z_i)$ кривых F_t, $t \in [0,1]$, назовем возмущающим, если $F_0 = F$, множества $F_t \cap U(z_i)$, $t \neq 0$ (называемые возмущениями), изотопны в $U(z_i)$. Будем говорить, что возмущения вещественны, если кривые F_t, $t \in [0;\ 1]$, вещественны, а множества $F_t \cap U(z_i)$, $t \neq 0$, эквивариантно изотопны в $U(z_i)$ при $z_i \in \mathbb{R}P^2$. Назовем (вещественные) возмущения $F_t' \cap U(z_i)$, $F_t'' \cap U(z_i)$ эквивалентными, если $F_t' \cap U(z_i) = d_t(F_t'' \cap U(z_i))$, где d_t, $t \in [0;\ 1]$,— непрерывное семейство (эквивариантных) диффеоморфизмов шара $U(z_i)$, $d_0 = \mathrm{id}$.

Теорема 1. *Если для (вещественной) кривой F выполнено*

$$\mu(z_1) + \ldots + \mu(z_s) \leqslant 4m - 5, \tag{1}$$

то существует семейство $F_t \in \mathbb{C}P^n$, $t \in [0;\ 1]$, $F_0 = F$, реализующее (вещественные) возмущения особых точек $z_1, \ldots, z_s$, эквивалентные наперед заданным (вещественным) возмущениям этих точек.

С помощью теоремы 1 можно классифицировать возмущения некоторых особых точек.

Следствие. *Всякое вещественное возмущение невырожденной пятикратной особой точки $p \in \mathbb{R}P^2$ является образом какой-либо аффинной вещественной квинтики при некотором эквивариантном диффеоморфизме $\mathbb{C}^2 \to U(p)$.*

Теорема 2. *При выполнении* (1) *в $\mathbb{C}P^n$ неособы и трансверсальны в «точке» F страты $\mu = \mathrm{const}$ особых точек $z_1, \ldots, z_s$, их коразмерности равны $c(z_i) + 1$ соответственно, где c — коразмерность особенности* (см. [1], с. *190*]).

Теоремы 1 и 2 вытекают из нижеследующей леммы. Рассмотрим аффинную плоскость $\{x_0 \neq 0\} \subset \mathbb{C}P^2$ с координатами $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$, положим $f(x, y) = F(1, x, y)$. Подходящим проективным преобразованием кривой F добьемся, чтобы: (а) $z_1, \ldots, z_s \in \{x_0 \neq 0\}$; б) кратности пересечения $(f_x \cdot f_y)(z_i)$ кривых f_x, f_y в точках z_i были равны $\mu(z_i)$, $1 \leqslant i \leqslant s$; в) кривая F_{x_1} была неприводима и не имела особых точек, отличных от $z_1, \ldots, z_s$. Последнего можно добиться, так как из теоремы Бертини (см. [2]) нетрудно вывести, что у кривой без кратных компонент, отличной от объединения прямых, проходящих через одну точку, почти все поляры неприводимы и не имеют особых точек, отличных от особых точек кривой. Обозначим через J_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, множество кривых $\Phi \in \mathbb{C}P^n$, для которых $\Phi(1, x, y) = a(x, y) f_x + b(x, y) f_y$, где a, b — голоморфные в окрестности точки z_i функции.

Лемма. *В принятых предположениях из* (1) *вытекает, что*

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{codim} J_i &= \mu(z_i),\ 1 \leqslant i \leqslant s, \\ \operatorname{codim}(J_1 \cap \ldots \cap J_s) &= \mu(z_1) + \ldots + \mu(z_s). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Доказательство леммы. Обозначим через $\operatorname{ord} P$, $\varkappa(P)$ наименьшие кратности пересечения ветви P некоторой кривой с центром в изолированной особой точке z с прямой, проходящей через z, и первой полярой этой кривой. Обозначим через Λ_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, множество кривых $\Phi \in \mathbb{C}P^n$, удовлетворяющих неравенствам

$$(\Phi \cdot P_i)(z_i) \geqslant \varkappa(P_i) - \operatorname{ord} P_i + 1 + (f_y \cdot P_i)(z_i)$$

для каждой ветви P_i кривой f_x с центром z_i. По теореме Брилля — Нетера кривые $\Phi \in \bigcap \Lambda_i$ высекают на F_{x_1} полный линейный ряд g_k^r, где в силу (1) и теоремы Римана—Роха

$$\begin{aligned} k &= m(m-1) - \Sigma(\varkappa(P_i) - \operatorname{ord} P_i + 1 + (f_y \cdot P_i)(z_i)) = \\ &= m(m-1) - \Sigma(2\delta(z_i, f_x) + \mu(z_i)) > \\ &> m(m-1) - 2\Sigma\,\delta(z_i, f_x) - 4m + 4 = 2g(F_{x_1}) - 2, \\ r &= k - g(F_{x_1}) = m(m+3)/2 - \Sigma(\delta(z_i, f_x) + \mu(z_i)) - 3. \end{aligned}$$

Отсюда $\operatorname{codim} \bigcap \Lambda_i = \Sigma (\delta (z_i, f_x) + \mu (z_i))$. По лемме 10 [3] $\operatorname{codim} \Lambda_i \leqslant \delta (z_i, f_x) + \mu (z_i)$, $i = 1, \ldots, s$, значит, $\operatorname{codim} \Lambda_i = \delta (z_i, f_x) + \mu (z_i)$, $i = 1, \ldots, s$, и подпространства $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_s$ трансверсальны в CP^n. Пространство CP^n можно естественно вложить в пространство $CP^{n'}$ кривых степени $m' > m$, и аналогично можно определить подпространства J'_i, $\Lambda'_i \subset CP^{n'}$, $1 \leqslant i \leqslant s$. Если m' достаточно велико, то как выше показывается, что $\operatorname{codim} \Lambda'_i = \delta (z_i, f_x) + \mu (z_i)$, а по теореме Тужрона (см. [1]) $\operatorname{codim} J'_i = \mu (z_i)$. По теореме о дивизоре особых точек [2, с. 215], $J_i \supset \Lambda_i$, $J'_i \supset \Lambda'_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$. Отсюда и из трансверсальности Λ'_i, CP^n в $CP^{n'}$ и $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_s$ в CP^n легко вытекает (2).

Доказательство теорем 1, 2. Произведем проективное преобразование кривой F с тем, чтобы выполнялись условия леммы. Тогда в силу (2) (см. [1, § 8]) окрестность кривой f в пространстве аффинных кривых степени m трансверсальна к орбите f при действии прямого произведения групп диффеоморфизмов окрестностей точек z_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, в пространстве аналитических кривых, определенных в окрестностях точек z_i, $1 \leqslant i \leqslant s$. Поэтому, согласно п. 8.1 [1], эту окрестность кривой f можно считать версальной деформацией кривых f, что доказывает теорему 1. Теорема 2 вытекает из того, что росток страта $\mu = \text{const}$ в базе версальной деформации ростка кривой f в точке z_i неособ (см. [4, с. 665]), а касательное пространство к нему включает пространство J_i, $1 \leqslant i \leqslant s$.

Доказательство следствия. Пусть семейство $F_t (x, y) = \Sigma a_{ij} x^i y^j$ возмущает невырожденную пятикратную точку $p = (0, 0)$. Предположим, что возмущения $F_t \cap U (p)$, $t \neq 0$, особы и неизотопны множеству $F_0 \cap U (p)$; можно считать, что p — неподвижная особая точка семейства F_t. Пусть $\tau = \tau (t) > 0$ таково, что

$$\sum_{i+j\leqslant 4} | a_{ij} (t) | \tau^{i+j-5} = 1.$$

Тогда найдется сходящаяся последовательность $G_k (x, y) = \sum a_{ij} (t_k) x^i y^j \tau^{i+j-5}$, где $t_k \to 0$. Ее предел — $G (x, y)$ — аффинная квинтика, отличная от объединения пяти прямых, проходящих через одну точку. Так как, очевидно, $\mu (\operatorname{sing} G) \leqslant 15$, то по теореме 1 подходящим шевелением коэффициентов G получим квинтику, эквивариантно диффеоморфную исходному возмущению. Случай устранения (неособого возмущения) сводится к случаю возмущения с одной особенностью A_1.

Замечание. Для кривых с особенностями лишь типов A_1, A_2 теорема 1 слабее известных результатов о независимости возмущений таких особенностей (см. [5]). Теорема 2 не перекрывается другими критериями (см. [6]) гладкости и трансверсальности стратов $\mu = \text{const}$ в пространстве кривых данной степени. Утверждение следствия для устранений ранее было доказано О. Я. Виро другим способом [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений 1.— М.: Наука, 1982. 2. *Van der Waerden. B. L.* Einführung in die algebraische Geometrie.— Berlin etc.: Springer, 1973. 3. *Gudkov D. A., Shustin E. I.* Lect. Notes in Math.—1984. № 1060.— P. 278—289. 4. *Teissier B.* // Real and Complex Singularities.— Oslo: Sijthoff — Noordhoff Publ., Alphen aan der Rijn.—1977.— P. 565—677. 5. *Гудков Д. А.* // УМН.—1974. Т. 29, вып. 4.— С. 3—79. 6. *Шустин Е. И.* // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1983. С. 148—163. 7. *Виро О. Я.* Вещественные алгебраические многообразия с предписанными топологическими свойствами.— Дис... д-ра физ.-мат. наук.— Л.: ЛГУ, 1983.

Горьковский
инженерно-строительный институт

Поступило в редакцию
1 апреля 1985 г.