П. А. Кучмент, Восстановление непрерывного представления по подпредставлению и фактор-представлению,
Функц. анализ и его прил., 1976, том 10, выпуск 1, 79–80

Функциональный анализ и его приложения,
т. 10, вып. 1, 1976, 79—80.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПО ПОДПРЕДСТАВЛЕНИЮ И ФАКТОР-ПРЕДСТАВЛЕНИЮ

П. А. Кучмент

1. Приведем сначала некоторые понятия и результаты из теории расширений банаховых пространств. Все пространства рассматриваются над **R** или **C**.

Пусть E и F — банаховы пространства. *Расширением E при помощи F* называется точная последовательность банаховых пространств

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\sigma} F \longrightarrow 0.$$

(Здесь i и σ — линейные непрерывные операторы.) На множестве таких расширений вводится обычным образом (см. [1]) понятие конгруэнтности. Множество полученных классов конгруэнтности обозначается через $\mathrm{Ext}^1(F, E)$ и снабжается естественной структурой векторного пространства.

Назовем *системой факторов* непрерывное отображение $\varphi\colon F \times F \to E$, обладающее свойствами:

(i) φ однородно, т. е. $\varphi(\alpha x, \alpha y) = \alpha\varphi(x, y)$,

(ii) φ ограниченно, т. е. $\|\varphi(x, y)\| \leqslant C(\|x\| + \|y\|)$,

(iii) $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$,

(iv)) $\varphi(x, 0) = 0$,

(v) $\varphi(x, y) + \varphi(x + y, z) = \varphi(y, z) + \varphi(x, y + z)$.

Векторное пространство систем факторов обозначим через $S(F, E)$. Через $R(F, E)$ обозначим векторное пространство непрерывных однородных ограниченных отображений $h\colon F \to E$. Введем также линейный оператор $\rho\colon R(F, E) \to S(F, E)$ по формуле

$$(\rho h)(x, y) = h(x + y) - h(x) - h(y).$$

Пусть теперь задан элемент из $\mathrm{Ext}^1(F, E)$, порожденный расширением

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\sigma} F \longrightarrow 0.$$

Существует отображение Бартла — Грейвса $p\colon F \to G$ (см. [2]), т. е. непрерывный однородный ограниченный правый обратный к σ. Сопоставим выбранному элементу из $\mathrm{Ext}^1(F, E)$ элемент φ из $S(F, E)$ по формуле $\varphi(x, y) = p(x + y) - p(x) - p(y)$.

Теорема 1. *Построенное отображение порождает изоморфизм векторных пространств*

$$\mathrm{Ext}^1(F, E) \simeq S(F, E)/\rho R(F, E).$$

Заметим, что $\mathrm{Ext}^1(F, E)$ допускает и иное описание. Пусть $F = l_1(\Lambda)/N$, где Λ — некоторое множество, а N — замкнутое подпространство в $l_1(\Lambda)$ (любое банахово пространство допускает такое представление). Через $L(X, Y)$ будем обозначать пространство ограниченных линейных операторов из X в Y. Имеет место

Теорема 2. *Векторные пространства* $\mathrm{Ext}^1(F, E)$ *и* $L(N, E)/sL(l_1(\Lambda), E)$ *изоморфны, где* $s\colon L(l_1(\Lambda), E) \to L(N, E)$ *— оператор сужения.*

Отсюда может быть получена

Теорема 3. *Пусть пространства E и F удовлетворяют одному из условий*

(i) *$E \oplus E$ изоморфно E,*

(ii) *$F \oplus F$ изоморфно F,*

(iii) *E рефлексивно и обладает BAP, а $F = l_1(\Lambda)/N$, где N обладает BAP.*

Тогда либо $\mathrm{Ext}^1(F, E) = 0$, *либо* $\dim \mathrm{Ext}^1(F, E) = \infty$.

Напомним, что банахово пространство обладает BAP, если в нем существует сеть конечномерных операторов, сильно сходящаяся к единичному оператору.

Заметим, что условию $E \oplus E \approx E$ удовлетворяют, например, все пространства $\mathscr{L}_p$ и l_p.

2. Перейдем теперь к рассмотрению задачи, поставленной в [3] на стр. 132.

Пусть дано представление T топологической группы $\mathfrak{G}$ в банаховом пространстве G, непрерывное в том смысле, что функция $T(g)x$ непрерывна на $\mathfrak{G} \times G$. Если E — замкнутое инвариантное подпространство в G, то можно рассмотреть подпредставление T_1 в E и фактор-представление T_2 в $F = G/E$. Мы получаем точную последовательность $\mathfrak{G}$-модулей

$$0 \to E \to G \to F \to 0.$$

Пусть теперь представления T_1 и T_2 заданы. Какая нужна дополнительная информация для восстановления представления T, т. е. для построения расширения $\mathfrak{G}$-модуля E при помощи $\mathfrak{G}$-модуля F? Эта задача решена, если E дополняемо в G. Мы же рассмотрим общий случай.

Определим на $S(F, E)$ и $R(F, E)$ действие группы $\mathfrak{G}$ по формулам

$$(g\cdot\varphi)(x, y) = T_1(g)\,\varphi(T_2^{-1}(g)\,x, T_2^{-1}(g)\,y), \quad (g\cdot h)(x) = T_1(g)\,h(T_2^{-1}(g)\,x).$$

Через $Z^1(\mathfrak{G}, R(F, E))$ обозначим пространство 1-коциклов на $\mathfrak{G}$ со значениями в $R(F, E)$, т. е. отображений $M\colon \mathfrak{G} \to R(F, E)$, удовлетворяющих условию $M(g_1g_2) = g_1M(g_2) + M(g_1)$ и таких, что функция $M(g)\,x$ непрерывна на $\mathfrak{G} \times F$. Через $B^1(\mathfrak{G}, R(F, E))$ обозначим пространство 1-кограниц, т. е. коциклов вида $M(g) = gh - h$, где $h \in R(F, E)$. Аналогично определяются $Z^1(\mathfrak{G}, S(F, E))$ и $B^1(\mathfrak{G}, S(F, E))$. Положим $H^1(\mathfrak{G}, R(F, E)) = Z^1(\mathfrak{G}, R(F, E))/B^1(\mathfrak{G}, R(F, E))$. Определим отображения $d: S(F, E) \to Z^1(\mathfrak{G}, S(F, E))$ по формуле $(d\varphi)(g) = g\varphi - \varphi$ и $i\colon Z^1(\mathfrak{G}), S(F, E)) \to Z^1(\mathfrak{G}, S(F, E))/B^1(\mathfrak{G}, \rho R(F, E))$ как отображение факторизации.

Пусть теперь имеется расширение $\mathfrak{G}$-модулей

$$0 \to E \to G \to F \to 0.$$

В соответствии с п. 1 ему можно сопоставить элемент $\Phi \in S(F, E)/\rho R(F, E) = \mathrm{Ext}^1(F, E)$. Кроме того, пусть $p\colon F \to G$ — отображение Бартла — Грейвса. Введем элемент $\Psi \in H^1(\mathfrak{G}, R(F, E))$ как класс эквивалентности коцикла $(\psi(g))(x) = T_1(g)\,p(T_2^{-1}(g)\,x) - p(x)$. Нетрудно проверить, что $id\Phi = i\rho\Psi$.

Т е о р е м а 4. *Соответствие между классами конгруэнтности расширений $\mathfrak{G}$-модуля E с помощью $\mathfrak{G}$-модуля F и множеством пар* $(\Phi, \Psi) \in \mathrm{Ext}^1(F, E) \times H_1(\mathfrak{G}, R(F, E))$, *удовлетворяющих условию $id\Phi = i\rho\Psi$, взаимно однозначно.*

Итак, в общем случае возникают пространства когомологий с коэффициентами в нелинейных операторах. «Степень нелинейности» регулируется выбором расширения Φ с помощью условия согласования $id\Phi = i\rho\Psi$. Например, если E дополняемо в G, т. е. $\Phi = 0$, можно из условия $id\Phi = i\rho\Psi$ получить, что для восстановления T требуется задавать дополнительно элемент из $H^1(\mathfrak{G}, L(F, E))$, что хорошо известно (см. [3]).

В заключение автор приносит благодарность А. А. Панкову за полезные обсуждения.

Воронежский лесотехнический институт

Поступило в редакцию 13 мая 1975 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. М а к л е й н С., Гомология, М., «Мир», 1966. 2. B a r t l e R. G., G r a v e s L. M., Trans. Amer. Math. Soc. 72, вып. 3 (1952), 400—413. 3. К и р и л л о в А. А., Элементы теории представлений, М., «Наука», 1972.