Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Д. Медных, Об одном классе разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами,
Сиб. матем. журн., 1978, том 19, номер 6, 1315–1331

https://www.mathnet.ru/smj6338

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.171
23 января 2026 г., 14:54:33

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XIX, 6 НОЯБРЬ — ДЕКАБРЬ 1978

УДК 517.531

А. Д. МЕДНЫХ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Введение

Рассмотрим следующий конечно-разностный оператор с полиномиальными коэффициентами

$$L[u(x)] \equiv \sum_{p=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{pj} x^p u(x+\tau_j). \tag{1.1}$$

Неоднородное уравнение

$$L[u(x)] = f(x), \tag{1.2}$$

где $f(x)$ — регулярная в некоторой области функция, при различных предположениях на комплексные постоянные a_{pj} и τ_j рассматривалось в работах ([1-4]). Библиография, включающая статьи по близким вопросам, имеется в ([5]).

В настоящей работе изучаются классы разрешимости и единственности для уравнения (1.1) в случае, когда $f(x)$ — целая функция экспоненциального типа и для оператора (1.1) выполнено условие

$$\sum_{j=0}^{m} a_{nj} \neq 0. \tag{1.3}$$

Известно ([2]), что для $n=1$, 2 при условии (1.3) уравнение (1.2) имеет аналитические решения лишь в случае, когда на тейлоровские коэффициенты $f(x)$ наложены определенные соотношения. В частности, в классе экспоненциальных функций минимального типа (1.2) разрешимо не для всякого полинома $f(x)$, стоящего в правой части.

В § 5 будет показано, что такие уравнения возникают в некоторых прикладных вопросах. Там же в качестве следствия из основных результатов статьи (§ 4) будет получен алгоритм для нахождения конечных сумм вида

$$\sum_{x=0}^{s} f(x)\cdot x! \quad \text{и} \quad \sum_{x=0}^{s} f(x)\binom{N}{x}$$

при условии, что алгоритм для вычисления $\sum\limits_{x=0}^{s} x!$ и $\sum\limits_{x=0}^{s} \binom{N}{x}$ известен.

В § 2 приводятся основные определения и доказываются вспомогательные утверждения. В § 3 излагается метод для нахождения необходимых в дальнейшем рекуррентных соотношений. В § 4 формулируется и доказывается основная теорема 1, а также приводится решение уравнения (1.2) в явном виде, удобном для приложений.

В отличие от работы ([2]) предлагаемый здесь метод не опирается на теорию бесконечномерных матриц Хейлингера и Теплица и позволяет получать решения в виде, который оказывается полезным для ряда вопросов прикладной математики.

§ 2. Определения и вспомогательные результаты

Условимся в следующих обозначениях. Через $E_\sigma=[1, \sigma)$, $0<\sigma\leqslant\infty$, обозначим класс целых функций, у которых или порядок меньше 1, или (если порядок равен 1) тип меньше σ. В частности, $E=E_\infty$ совпадает с классом всех функций экспоненциального типа. Пусть, далее, A_σ — множество всех функций, аналитических в круге $|\zeta|<\sigma$.

На декартовом произведении $E_\sigma\times A_\sigma$ определим билинейную форму следующим образом:

$$\langle u, v\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^{(k)}(0)\,v^{(k)}(0)}{k!},\quad u\in E_\sigma,\ v\in A_\sigma. \tag{2.1}$$

В силу неравенства $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|u^{(k)}(0)|}<\sigma$, справедливого для всех функций $u\in E_\sigma$ (([6]), с. 122), ряд (2.1) абсолютно сходится для любой пары $(u,\ v)\in E_\sigma\times A_\sigma$.

Рассмотрим дифференциальный оператор, полученный формальным применением преобразования Бореля к разностному оператору (1.1),

$$D[v(\zeta)]\equiv\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{pj}e^{\tau_j\zeta}\frac{d^p}{d\zeta^p}v(\zeta). \tag{2.2}$$

Непосредственной проверкой несложно убедиться, что пространства E_σ и A_σ остаются инвариантными относительно действия операторов (1.1) и (2.2) соответственно.

Имеет место следующая

Лемма 1. *Пусть $u\in E_\sigma$ и $v\in A_\sigma$, тогда*

$$\langle Lu(\zeta),\ v(\zeta)\rangle=\langle u(\zeta),\ Dv(\zeta)\rangle. \tag{2.3}$$

Доказательство. Билинейность формы (2.1) позволяет ограничиться проверкой каждого из двух равенств

$$\langle u(\zeta+\tau_0), v(\zeta)\rangle=\langle u(\zeta), e^{\tau_0\zeta}v(\zeta)\rangle \tag{2.4}$$

и

$$\langle\zeta u(\zeta), v(\zeta)\rangle=\langle u(\zeta), \frac{d}{d\zeta}v(\zeta)\rangle. \tag{2.5}$$

По теореме Тейлора и формуле Лейбница имеем

$$u^{(k)}(\tau_0)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{u^{(k+j)}(0)}{j!}\tau_0^j \quad\text{и}\quad \frac{d^s}{d\zeta^s}[e^{\tau_0\zeta}v(\zeta)]\big|_{\zeta=0}=\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}\tau_0^j v^{(s-j)}(0).$$

Далее,

$$\langle u(\zeta+\tau_0), v(\zeta)\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^{(k)}(\tau_0)\,v^{(k)}(0)}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{u^{(k+j)}(0)}{j!}\tau_0^j\frac{v^{(k)}(0)}{k!}=$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{s}\frac{u^{(s)}(0)}{j!}\tau_0^j\frac{v^{(s-j)}(0)}{(s-j)!}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{u^{(s)}(0)}{s!}\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}\tau_0^j v^{(s-j)}(0)=$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{u^{(s)}(0)}{s!}\frac{d^s}{d\zeta^s}[e^{\tau_0\zeta}v(\zeta)]\big|_{\zeta=0}=\langle u(\zeta), e^{\tau_0\zeta}v(\zeta)\rangle.$$

Перемена порядка суммирования законна в силу абсолютной сходимости ряда (2.1).

Из формулы Лейбница

$$\frac{d^k}{d\zeta^k}[\zeta u(\zeta)] = \zeta u^{(k)}(\zeta) + ku^{(k-1)}(\zeta) \text{ и } \frac{d^k}{d\zeta^k}[\zeta u(\zeta)]\big|_{\zeta=0} = ku^{(k-1)}(0),$$

$$\langle \zeta u(\zeta), v(\zeta)\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{d^k}{d\zeta^k}[\zeta u(\zeta)]\big|_{\zeta=0} v^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ku^{(k-1)}(0)\, v^{(k)}(0)}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{(k)}(0)\, v^{(k+1)}(0)}{k!} = \langle u(\zeta), \frac{d}{d\zeta} v(\zeta)\rangle.$$

Отметим некоторые простейшие свойства билинейной формы (2.1), вытекающие из определения и леммы 1.

Пусть $f(\zeta)\in A_\sigma$. Выберем произвольный x из области определения $f(\zeta)$, т. е. пусть $|x|<\sigma$.

Прежде всего заметим, что из (2.1) следует $\langle 1, f(\zeta)\rangle = f(0)$. Используя замечание, по лемме 1 получим

$$\langle e^{x\zeta}, f(\zeta)\rangle = \langle 1, f(\zeta+x)\rangle = f(0+x) = f(x), \tag{2.6}$$

$$\langle \zeta^k, f(\zeta)\rangle = \langle 1, \frac{d^k}{d\zeta^k} f(\zeta)\rangle = f^{(k)}(0), \ (k \geqslant 0). \tag{2.7}$$

Пусть теперь $u(\zeta)\in E_\sigma$ и $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|u^{(k)}(0)|} = \sigma_0 < \sigma$. Регулярная в области $|\zeta|>\sigma_0$ функция

$$v(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{(k)}(0)}{\zeta^{k+1}} \tag{2.8}$$

называется ассоциированной по Борелю с функцией $u(\zeta)$, ([6], с. 123). По теореме о вычетах для любой функции $v(\zeta)\in A_\sigma$ справедливо следующее интегральное представление для билинейной формы (2.1):

$$\langle u(\zeta), v(\zeta)\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} v(\zeta)\, v(\zeta)\, d\zeta, \tag{2.9}$$

где Γ_1 — окружность $|\zeta|=\sigma_1$ и $\sigma_0<\sigma_1<\sigma$.

Перепишем дифференциальный оператор (2.2) в следующем виде:

$$D[v(\zeta)] \equiv \omega_0(\zeta)\frac{d^n}{d\zeta^n} v(\zeta) + \omega_1(\zeta)\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} v(\zeta) + \ldots + \omega_n(\zeta)\, v(\zeta), \tag{2.2'}$$

где

$$\omega_q(\zeta) = \sum_{j=0}^{m} a_{n-q,j}\, e^{\tau_j\zeta}, \ q = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.10}$$

Заметим, что условие (1.3) в точности эквивалентно условию

$$\omega_0(0) \neq 0. \tag{2.3'}$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать число σ равным модулю ближайшего к началу координат нуля функции $\omega_0(x)$. Если $\omega_0(x)$ нигде не обращается в нуль, будем считать, что $\sigma=\infty$.

Рассмотрим фундаментальную систему решений дифференциального уравнения

$$D[\Phi_p(\zeta)] \equiv \omega_0(\zeta)\frac{d^n}{d\zeta^n}\Phi_p(\zeta) + \omega_1(\zeta)\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\Phi_p(\zeta) + \ldots + \omega_n(\zeta)\Phi_p(\zeta) = 0 \tag{2.11}$$

в области $|\zeta| < \sigma$ и с начальными условиями

$$\Phi_p^{(k)}(0) = -\delta_{k,p},\ k,\ p = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2.11°}$$

где $\delta_{k,p}$ — символ Кронекера.

Определитель Вронского такой системы

$$W(\zeta) = \begin{vmatrix} \Phi_0(\zeta) & \ldots \Phi_{n-1}(\zeta) \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ \Phi_0^{(n-1)}(\zeta) & \ldots \Phi_{n-1}^{(n-1)}(\zeta) \end{vmatrix} = (-1)^n e^{-\int\limits_0^\zeta \frac{\omega_1(t)}{\omega_0(t)}dt} \tag{2.12}$$

будет полезен нам в дальнейшем.

Поставим еще одну задачу Коши для оператора (2.2′):

$$D_\zeta[\Psi(x, \zeta)] \equiv \sum_{j=0}^{n} \omega_j(\zeta)\frac{d^{n-j}}{d\zeta^{n-j}}\Psi(x, \zeta) = e^{x\zeta}, \tag{2.13}$$

$$\frac{d^k}{d\zeta^k}\Psi(x, \zeta)|_{\zeta=0} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2.13°}$$

(x — произвольный комплексный параметр).

Обозначим через $W_p(\zeta)$ детерминант, получающийся из определителя Вронского (2.12) заменой элементов p-го столбца на $(0, \ldots, 0, 1)$. Тогда функция

$$\Psi(x, \zeta) = \sum_{p=0}^{n-1} \Phi_p(\zeta)\int\limits_0^\zeta \frac{W_p(t)}{\omega_0(t)W(t)}e^{xt}dt \tag{2.14}$$

решает задачу Коши (2.13)—(2.13°) в области $|\zeta| < \sigma$ ($x \in \mathbf{C}$).

В (2.12) и (2.14) предполагается, что все пути интегрирования целиком лежат в круге $|\zeta| < \sigma$. При этом справедлива

Лемма 2. *Для всех* $|\zeta| < \sigma$ *и* $x \in \mathbf{C}$

$$|\Psi(x, \zeta)| \leqslant C(|\zeta|)e^{|\zeta||x|}, \tag{2.15}$$

где $C(R)$ *непрерывна по* R *на интервале* $[0, \sigma)$.

Доказательство. Выберем в качестве пути интегрирования в (2.14) прямолинейный отрезок, соединяющий точки 0 и ζ. Для любого R, $0 \leqslant R \leqslant \sigma$, положим

$$C(R) = \sum_{p=0}^{n-1} \max_{|t|\leqslant R}|\Phi_p(t)| \max_{|t|\leqslant R}\left|\frac{W_p(t)}{\omega_0(t)W(t)}\right| \cdot R.$$

Непрерывная зависимость $C(R)$ от R обеспечивается регулярностью функций $\Phi_p(t)$ и $\frac{1}{\omega_0(t)W(t)}$ в круге $|t| < \sigma$. Осталось заметить, что в силу (2.14) неравенство

$$|\Psi(x, \zeta)| \leqslant C(R)e^{R|x|}$$

справедливо для всех ζ, $|\zeta|\leqslant R$. В частности, при $R=|\zeta|$, отсюда получается (2.15).

Лемма 3. *Пусть L — разностный оператор* (1.1), $\Phi_p(\zeta)$ *и* $\Psi(x,\zeta)$ — *решения уравнений* (2.11) *и* (2.13) *соответственно. Тогда для всех* $|\zeta|<\sigma$ *и* $x\in\mathbf{C}$

$$L_x[\Psi(x,\zeta)]=e^{x\zeta}+\sum_{p=0}^{n-1}x^p\Phi_p(\zeta). \tag{2.16}$$

Доказательство. Непосредственной проверкой легко убедиться, что для операторов (1.1) и (2.2) справедливо равенство

$$L_x(e^{x\zeta})=D_\zeta(e^{x\zeta}). \tag{2.17}$$

Обозначим для краткости правую часть (2.16) через

$$\Theta(x,\zeta)=e^{x\zeta}+\sum_{p=0}^{n-1}x^p\Phi_p(\zeta).$$

Покажем, что функции $L_x[\Psi(x,\zeta)]$ и $\Theta(x,\zeta)$ решают одну и ту же задачу Коши для оператора D_ζ.

Из уравнения (2.11) имеем для $|\zeta|<\sigma$ и $x\in\mathbf{C}$

$$D_\zeta[\Theta(x,\zeta)]=D_\zeta\left(e^{x\zeta}\right)+\sum_{p=0}^{n-1}x^pD_\zeta[\Phi_p(\zeta)]=D_\zeta\left(e^{x\zeta}\right). \tag{2.18}$$

С другой стороны, замечая, что операторы D_ζ и L_x перестановочны, из (2.13) и (2.17) при $|\zeta|<\sigma$ и $x\in\mathbf{C}$ получаем

$$D_\zeta L_x[\Psi(x,\zeta)]=L_x[D_\zeta\Psi(x,\zeta)]=L_x(e^{x\zeta})=D_\zeta(e^{x\zeta}). \tag{2.18'}$$

Определим начальные условия. Из (2.11^0) для любого $x\in\mathbf{C}$ получаем

$$\frac{d^k}{d\zeta^k}\Theta(x,\zeta)|_{\zeta=0}=\frac{\partial^k}{\partial\zeta^k}\left(e^{x\zeta}\right)|_{\zeta=0}+$$
$$+\sum_{p=0}^{n-1}x^p\frac{d^k}{d\zeta^k}\Phi_p(\zeta)|_{\zeta=0}=x^k-\sum_{p=0}^{n-1}x^p\delta_{k,p}=x^k-x^k=0,\quad k=0,1,\ldots,n-1. \tag{2.19}$$

Для определения начальных условий для функции $L_x[\Psi(x,\zeta)]$ воспользуемся перестановочностью оператора L_x с оператором дифференцирования $\frac{d^k}{d\zeta^k}$. При любом $x\in\mathbf{C}$ имеем

$$\frac{d^k}{d\zeta^k}L_x[\Psi(x,\zeta)]|_{\zeta=0}=L_x\left[\frac{d^k}{d\zeta^k}\Psi(x,\zeta)|_{\zeta=0}\right]=L_x[0]=0. \tag{2.19'}$$

Таким образом, правая и левая части (2.16) при каждом фиксированном $x\in\mathbf{C}$ удовлетворяют уравнению (2.18) с начальными условиями (2.19) и, следовательно, в силу единственности решения в области $|\zeta|<\sigma$ тождественно совпадают.

§ 3. Рекуррентные соотношения и линейные функционалы

По теореме об аналитической зависимости от параметра и о непрерывной зависимости от правой части из уравнения (2.13) получаем, что функция $\Psi(x, \zeta)$ голоморфна в бицилиндре $B=\{(x, \zeta): |x|<\infty, |\zeta|<\sigma\}$ как функция двух комплексных переменных. Поэтому ряд

$$\Psi(x, \zeta)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(x)}{k!} \zeta^k, \tag{3.1}$$

где положено

$$P_k(x)=\frac{\partial^k}{\partial \zeta^k} \Psi(x, 0), \quad k=0, 1, \ldots, \tag{3.1°}$$

сходится равномерно и абсолютно внутри области B.

Покажем, что каждая из функций $P_k(x)$ является полиномом степени $k-n$ для всех $k \geqslant n$. Действительно, по свойству (2.7) билинейной формы (2.1) имеем

$$\langle \zeta^r, e^{x\zeta}\rangle=x^r, \quad r=0, 1, \ldots. \tag{3.2}$$

Заменим $e^{x\zeta}$ в (3.2) на правую часть $D_\zeta[\Psi(x, \zeta)]$ уравнения (2.13) и воспользуемся леммой 1:

$$\langle L_\zeta(\zeta^r), \Psi(x, \zeta)\rangle=\langle \zeta^r, D_\zeta[\Psi(x, \zeta)]\rangle=x^r, \quad r=0, 1, \ldots. \tag{3.3}$$

Заметим, что

$$L_\zeta(\zeta^r)=\sum_{q=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{qj} \zeta^q (\zeta+\tau_j)^r \tag{3.4}$$

есть полином степени $r+n$, старший коэффициент которого $\omega_0(0)=$ $=\sum_{j=0}^{m} a_{nj} \neq 0$.

По свойству (2.7) равенство (3.1⁰) можно переписать как

$$\langle \zeta^k, \Psi(x, \zeta)\rangle=P_k(x). \tag{3.5}$$

Представляя $L_\zeta(\zeta^r)$ в виде линейной комбинации одночленов ζ^k, из (3.3), (3.4) и (3.5) получим

$$\sum_{q=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{qj} P^q(x)[P(x)+\tau_j]^r=x^r, r=0, 1, \ldots. \tag{3.6}$$

Применяемая здесь и далее символическая запись понимается следующим образом. Вначале выражение в левой части (3.6) следует рассмотреть как полином от переменной $w=P(x)$, а затем после приведения подобных членов произвести формальное опускание индекса по закону $P^k(x) \to P_k(x)$, $k=0, 1, \ldots$.

Пример:

$$P^3(x)[P(x)+1]^0 \equiv P^3(x) P^0(x) \equiv P^3(x) \equiv P_3(x).$$

По сделанному выше замечанию коэффициент при $P^{r+n}(x)$ в (3.5) равен $\omega_0(0) \neq 0$. Из начальных условий (2.13⁰) согласно принятым в (3.1⁰) обозначениям имеем

$$P_0(x)=P_1(x)=\ldots=P_{n-1}(x)\equiv 0. \tag{3.5^0}$$

По индукции из (3.5) и (3.5^0) нетрудно получить, что $P_{r+n}(x)=\frac{1}{\omega_0(0)}x^r+\ldots$ является в точности полиномом степени r для всех $r\geqslant 0$.

Обратимся теперь к фундаментальной системе решений уравнения (2.11). Пусть аналитическая в круге $|\zeta|<\sigma$ функция $\Phi_p(\zeta)$ представлена рядом

$$\Phi_p(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_{p,k}}{k!}\zeta^k,\quad p=0,1,\ldots,n-1, \tag{3.7}$$

где

$$\mu_{p,k}=\Phi_p^{(k)}(0),\quad k=0,1,\ldots. \tag{3.7^0}$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, из (2.11) имеем

$$\langle L_\zeta(\zeta^r),\ \Phi_p(\zeta)\rangle=\langle\zeta^r,\ D_\zeta\Phi_p(\zeta)\rangle=0,\ r=0,1,\ldots.$$

Откуда, учитывая (3.4) и замечая в силу (3.7^0), что $\langle\zeta^k,\ \Phi_p(\zeta)\rangle=\mu_{p,k}$, получим

$$\sum_{q=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{qj}\mu_p^q\left(\mu_p^q+\tau_j\right)^r=0, \tag{3.8}$$

$$p=0,1,\ldots,n-1,\quad r=0,1,\ldots,\left(\mu_p^k\equiv\mu_{p,k}\right).$$

Начальные условия для рекуррентных соотношений (3.8) определим из (2.11^0)

$$\mu_{p,k}=-\delta_{p,k},\ p,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \tag{3.8^0}$$

Последовательности (3.7^0) определяют на пространстве E_σ n линейных функционалов

$$\mu_p: f\to f(\mu_p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\mu_{p,k}\equiv\langle f(\zeta),\ \Phi_p(\zeta)\rangle,\quad p=0,1,\ldots,n-1. \tag{3.9}$$

§ 4. Теоремы существования и единственности

Пусть $L[u(x)]$ — разностный оператор (1.1), коэффициенты которого удовлетворяют условию (1.3). Пусть, далее, σ — определенное в § 2 число, равное модулю ближайшего к началу координат нуля функции $\omega_0(x)$ либо ∞, если последняя в нуль не обращается.

По замечанию, сделанному перед леммой 1, оператор L переводит функции класса E_σ в функции того же класса. Тем самым корректно определено действие оператора $L: E_\sigma\to E_\sigma$.

Теорема 1. *Пусть разностный оператор* (1.1) *действует из* E_σ *в* E_σ. *Тогда для разрешимости уравнения*

$$L[u(x)]=f(x),\quad u\in E_\sigma,\quad f\in E_\sigma, \tag{4.1}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$f(\mu_0)=f(\mu_1)=\ldots=f(\mu_{n-1})=0. \tag{4.2}$$

Если последнее выполнено, то

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}P_k(x) \tag{4.3}$$

будет единственным решением в классе E_σ.

При этом ряд (4.3) сходится абсолютно и равномерно по x на каждом компакте комплексной плоскости.

Доказательство. Необходимость. Пусть $L[u(x)]=f(x)\in E_\sigma$ и $\Phi_p(\zeta)$ решение уравнения (2.11). Из определения линейного функционала (3.9) и леммы 1 получаем

$$f(\mu_p)=\langle f(\zeta),\ \Phi_p(\zeta)\rangle=\langle L[u(\zeta)],\ \Phi_p(\zeta)\rangle=\langle u(\zeta),\ D_\zeta\Phi_p(\zeta)\rangle=0,$$

$$p=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Достаточность. Пусть $f\in E_\sigma$ и $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|f^{(k)}(0)|}=\sigma_0$. Рассмотрим ассоциированную по Борелю с $f(\zeta)$ функцию $\varphi(\zeta)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}f^{(k)}(0)/\zeta^{k+1}$.

Положим

$$u(x)=\langle f(\zeta),\ \Psi(x,\ \zeta)\rangle. \tag{4.4}$$

В силу интегрального представления (2.9) справедливо равенство

$$u(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\varphi(\zeta)\Psi(x,\ \zeta)\,d\zeta, \tag{4.5}$$

где $\Gamma_1:|\zeta|=\sigma_1,\ \sigma_0<\sigma_1<\sigma$.
Из (4.5), (2.9) и леммы 3 имеем

$$L[u(x)]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\varphi(\zeta)L_x[\Psi(x,\ \zeta)]\,d\zeta=\langle f(\zeta),\ L_x[\Psi(x,\ \zeta)]\rangle=\langle f(\zeta),\ e^{x\zeta}+$$

$$+\sum_{p=0}^{n-1}x^p\Phi_p(\zeta)\Big\rangle=\langle f(\zeta),\ e^{x\zeta}\rangle+\sum_{p=0}^{n-1}x^p\langle f(\zeta),\ \Phi_p(\zeta)\rangle.$$

Замечая, что $\langle f(\zeta),\ e^{x\zeta}\rangle=f(x)$ и $\langle f(\zeta),\ \Phi_p(\zeta)\rangle=f(\mu_p)$, окончательно получаем

$$L[u(x)]=f(x)+\sum_{p=0}^{n-1}x^pf(\mu_p). \tag{4.6}$$

Учитывая условия теоремы (4.2), отсюда имеем

$$L[u(x)]=f(x).$$

Определим порядок роста на бесконечности найденного решения $u(x)$. В силу (4.5) и леммы 2 имеют место следующие неравенства:

$$|u(x)|\leqslant\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}|\varphi(\zeta)||\Psi(x,\ \zeta)||d\zeta|\leqslant\sigma_1\max_{|\zeta|=\sigma_1}|\varphi(\zeta)|\,C(\sigma_1)\,e^{\sigma_1|x|}, \tag{4.7}$$

справедливые для любого σ_1 из интервала $\sigma_0<\sigma_1<\sigma$.

Поскольку оператор L переводит класс E_{σ_1} в себя, отсюда следует, что если $f(x)$ имеет порядок 1 и тип σ_0, $0\leqslant\sigma_0<\sigma$, то $u(x)$ имеет те же порядок и тип. Если $f(x)$ имеет порядок меньше 1, то можно лишь утверждать, что $u(x)\in[1,\ 0]$. В каждом из этих случаев справедливо включение $u(x)\in E_\sigma$, что и доказывает достаточность.

Для представления решения в виде (4.3) воспользуемся разложением $\Psi(x, \zeta)$ в равномерно сходящийся ряд (3.1). При этом из (4.5) имеем

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \varphi(\zeta)\,\Psi(x, \zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \varphi(\zeta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(x)}{k!}\zeta^k d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(x)}{k!}\int_{\Gamma_1}\varphi(\zeta)\,\zeta^k d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(x)}{k!}\langle f(\zeta), \zeta^k\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}P_k(x).$$

В силу равномерной сходимости ряда (3.1) внутри бицилиндра $\{(x, \zeta) : x\in\mathbf{C},\ |\zeta|<\sigma\}$ полученный ряд сходится равномерно по x на любом компакте в $\mathbf{C}$.

Единственность. Пусть $u\in E_\sigma$ и $L[u(\zeta)]=f(\zeta)$. Из уравнения (2.13) и леммы 3 имеем

$$u(x)=\langle u(\zeta), e^{x\zeta}\rangle=\langle u(\zeta), D_\zeta\Psi(x, \zeta)\rangle=$$
$$=\langle L[u(\zeta)], \Psi(x, \zeta)\rangle=\langle f(\zeta), \Psi(x, \zeta)\rangle.$$

При $f=0$ отсюда, в частности, получаем $u=0$.

Теорема доказана.

Обозначим через $\mathcal{P}_s$ $(s\geqslant 0)$ множество всех полиномов степени не выше s. Как было показано в § 3, степень каждого полинома $P_k(x)$ при $k\geqslant n$ равна $k-n$ и $P_0(x)=\ldots=P_{n-1}(x)=0$. Это замечание позволяет в качестве следствия из теоремы 1 получить следующий результат.

Теорема 2. *Пусть разностный оператор* (1.1) *действует из* $\mathcal{P}_{s-n}$ *в* $\mathcal{P}_s$ $(s\geqslant n)$. *Тогда для разрешимости уравнения*

$$L[u(x)]=f(x),\quad u\in\mathcal{P}_{s-n},\quad f\in\mathcal{P}_s, \tag{4.8}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=0}^{s}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\mu_{p,k}=0,\quad p=0, 1, \ldots, n-1. \tag{4.9}$$

Если последнее выполнено, то

$$u(x)=\sum_{k=0}^{s}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}P_k(x) \tag{4.10}$$

будет единственным решением в классе всех полиномов.

§ 5. Примеры и приложения

В книге известного американского программиста Д. Кнута ([7], с. 62) в качестве одной из нерешенных проблем сформулирована следующая: «Составьте программу для ЭВМ, упрощающую любые суммы, в которые входят биномиальные коэффициенты». В этом параграфе будет показано, каким образом теоремы 1 и 2 позволяют решать эту проблему для сумм определенного вида.

1°. Алгоритм для вычисления $\sum\limits_{x=0}^{s} f(x)\,x!$.

Заменяя, если потребуется, $f(x)$ на интерполяционный полином Лагранжа, заранее будем предполагать, что $f\in\mathcal{P}_{s_0}$, $s_0\leqslant s$.

Из общих соображений теории суммирования ([6], гл. IV) задача о нахождении суммы $\sum_{x=0} f(x)\,x!$ сводится к исследованию разностного уравнения

$$w(x+1)(x+1)!-w(x)x!=f(x)\cdot x!,$$

или после сокращения на $x!$

$$(x+1)w(x+1)-w(x)=f(x). \tag{5.1}$$

В обозначениях § 2 для уравнения (5.1) имеем

$$L[u(x)]=(x+1)u(x+1)-u(x),$$
$$D[v(\zeta)]=e^{\zeta}v'(\zeta)+(e^{\zeta}-1)v(\zeta),$$
$$n=1,\ \omega_0(\zeta)=e^{\zeta}\ \text{ и }\ \sigma=\infty.$$

Рекуррентные соотношения (3.6) и (3.8) в этом случае будут

$$\begin{gathered}[P(x)+1]^{r+1}-P^r(x)=x^r,\ \ P_0(x)\equiv 0,\\ (\mu+1)^{r+1}-\mu^r=0,\ \ \mu_0=-1.\end{gathered} \tag{5.2}$$

Несложно определить несколько первых членов последовательностей $P_r(x)$ и μ_r:

$$P_1(x)=1,\ P_2(x)=x-1,\ P_3(x)=x^2-2x-1,$$
$$\mu_1=0,\ \mu_2=+1,\ \mu_3=-1.$$

Положим

$$u(x)=\sum_{k=1}^{s_0}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}P_k(x), \tag{5.3}$$

$$f(\mu)=\sum_{k=0}^{s_0}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\mu_k. \tag{5.4}$$

Из соотношения (4.6) при $n=1$ и $f(\mu_0)=f(\mu)$ имеем

$$(x+1)u(x+1)-u(x)=f(x)+f(\mu). \tag{5.5}$$

Умножая (5.5) на $x!$ и суммируя от $x=0$ до $x=s$, получим

$$\sum_{x=0}^{s}[(x+1)!\,u(x+1)-x!u(x)]=\sum_{x=0}^{s}[f(x)+f(\mu)]\,x!$$

или после сокращений

$$(s+1)!u(s+1)-u(0)=\sum_{x=0}^{s}f(x)\cdot x!+f(\mu)\sum_{x=0}^{s}x!.$$

Откуда

$$\sum_{x=0}^{s}f(x)\,x!=u(s+1)(s+1)!-u(0)-f(\mu)\sum_{x=0}^{s}x!. \tag{5.6}$$

Полученное соотношение (5.6) позволяет построить алгоритм, упрощающий вычисление суммы $\sum_{x=0}^{s}f(x)\,x!$, где $f(x)$ — полином степени s_0, при условии, что алгоритм для нахождения $\sum_{x=0}^{s}x!$ известен. Процесс вычислений в этом случае будет следующим.

Из рекуррентных соотношений (5.2) насчитываем и запоминаем числа μ_k и коэффициенты полиномов $P_k(x)$, $k \leqslant s_0$. Вспомогательным алгоритмом определяем значение $\sum\limits_{x=0}^{s} x!$. Из равенств (5.3) и (5.4) находим величины $u(s+1)$ и $f(\mu)$. Подставляя найденные значения в (5.6), получаем окончательный результат. В частности, для $f(x)=x^3-1$ при этом имеем

$$\sum_{k=0}^{s} (k^3-1)\,k! = (s^2-2)(s+1)! + 1. \tag{5.7}$$

При организации вычислительного процесса преимущество правой части в (5.7) перед левой очевидно.

2°. Вычисление суммы $\sum\limits_{x=0}^{s} f(x)\binom{n}{x}$.

В этом пункте натуральное число n будем считать фиксированным, а функцию

$$\gamma(x) = \binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} = \frac{n!}{\Gamma(n-x+1)\,\Gamma(x+1)} \tag{5.8}$$

будем рассматривать как целую функцию комплексного переменного x. В частности, при $x=-1$

$$\gamma(-1) = \frac{n!}{\Gamma(n+2)\,\Gamma(0)} = 0. \tag{5.9}$$

По аналогии с примером п. 1° рассмотрим разностное уравнение

$$w(x)\binom{n}{x} - w(x-1)\binom{n}{x-1} = f(x)\binom{n}{x}. \tag{5.10}$$

Сдвиг аргумента в левой части (5.10) на единицу вниз произведен для удобства дальнейших выкладок. Поделим правую и левую части соотношения (5.10) на $\frac{n!}{(n-x+1)!x!}$. После необходимых сокращений приходим к уравнению

$$(n-x+1)\,w(x) - x\,w(x-1) = (n-x+1)\,f(x). \tag{5.11}$$

Результаты § 4, приложенные к уравнению (5.11) с учетом специфики его правой части, позволяют установить следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $f \in E_\pi$. Тогда имеет место равенство*

$$\sum_{x=0}^{s} f(x)\binom{n}{x} = u(s)\binom{n}{s} + [f(0)-u(0)]\sum_{x=0}^{s}\binom{n}{x}, \tag{5.12}$$

где

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} P_k(x) \tag{5.13}$$

и $P_k(x)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$[P(x)+1]^{k+1} + P^k(x) - (n+1)\,[P(x)+1]^k = (x-n)\,(x+1)^k,$$
$$P_0(x) \equiv 0. \tag{5.14}$$

Доказательство. Рассмотрим разностный оператор

$$L[w(x)] \equiv (n-x+1)\,w(x) - xw(x-1). \tag{5.15}$$

По лемме 1 с ним сопряжен дифференциальный оператор

$$D[v(\zeta)] \equiv -(1+e^{-\zeta})\,v(\zeta) + (n+1)\,v(\zeta). \tag{5.16}$$

Поставим две задачи Коши для оператора (5.16) в круге $|\zeta|<\pi$:

$$D\Phi(\zeta)=0,\quad \Phi(0)=-1; \tag{5.17}$$

$$D_\zeta\Psi(x,\zeta)=e^{x\zeta},\quad \Psi(x,0)=0,\quad (x\in\mathbf{C}). \tag{5.18}$$

По лемме 3 получим

$$L_x\Psi(x,\zeta)=e^{x\zeta}+\Phi(\zeta). \tag{5.19}$$

Введем в рассмотрение дифференциальный оператор

$$\delta_\zeta[v(\zeta)] \equiv -v'(\zeta)+(n+1)\,v(\zeta).$$

Заметим, что операторы L_x и δ_ζ действуют на разные переменные и поэтому перестановочны. Воспользуемся этим замечанием и применим δ_ζ к обеим частям равенства (5.19). Получим

$$L_x\delta_\zeta\Psi(x,\zeta)=\delta_\zeta(e^{x\zeta})+\delta_\zeta\Phi(\zeta)$$

или, в развернутом виде,

$$(n-x+1)\,\widetilde{\Psi}(x,\zeta)-x\widetilde{\Psi}(x-1,\zeta)=(n-x+1)\,e^{x\zeta}+\widetilde{\Phi}(\zeta), \tag{5.20}$$

где положено

$$\widetilde{\Psi}(x,\zeta)=\delta_\zeta\Psi(x\ \zeta)=-\Psi'_\zeta(x,\zeta)+(n+1)\,\Psi(x,\zeta), \tag{5.21}$$

$$\widetilde{\Phi}(\zeta)=\delta_\zeta\Phi(\zeta)=-\Phi'(\zeta)+(n+1)\,\Phi(\zeta). \tag{5.22}$$

Из уравнений (5.17) и (5.18) непосредственным подсчетом можно получить, что $\Psi'_\zeta(x,0)=-{}^1/_2$ и $\Phi'(0)=-(n+1)/2$. Откуда, учитывая (5.21) и (5.22), получим

$$\widetilde{\Psi}(x,0)={}^1/_2,\quad \widetilde{\Phi}(0)=-(n+1)/2. \tag{5.23}$$

Умножим правую и левую части соотношения (5.20) на величину $\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{x}=\frac{n!}{(n-x+1)!x!}$ и, выполняя необходимые преобразования, получим

$$\binom{n}{x}\widetilde{\Psi}(x,\zeta)-\binom{n}{x-1}\widetilde{\Psi}(x-1,\zeta)=\binom{n}{x}e^{x\zeta}+\frac{\widetilde{\Phi}(\zeta)}{n+1}\binom{n+1}{x}. \tag{5.24}$$

Просуммируем (5.24) от $x=0$ до $x=s$, учитывая, что в силу (5.9) справедливо равенство $\binom{n}{-1}\widetilde{\Psi}(-1,\zeta)=0$:

$$\binom{n}{s}\widetilde{\Psi}(s,\zeta)=\sum_{x=0}^{s}e^{x\zeta}\binom{n}{x}+\frac{\widetilde{\Phi}(\zeta)}{n+1}\sum_{x=0}^{s}\binom{n+1}{x}. \tag{5.25}$$

В частности, при $\zeta=0$ с учетом начальных условий (5.23) отсюда имеем

$${}^1/_2\binom{n}{s}=\sum_{x=0}^{s}\binom{n}{x}-\frac{n+1}{2(n+1)}\sum_{x=0}^{s}\binom{n+1}{x},$$

откуда

$$\sum_{x=0}^{s}\binom{n+1}{x}=2\sum_{x=0}^{s}\binom{n}{x}-\binom{n}{s}. \tag{5.26}$$

Из соотношения (5.20) при $x=0$ получаем

$$(n+1)\widetilde{\Psi}(0,\zeta)=(n+1)+\widetilde{\Phi}(\zeta),$$

откуда

$$\frac{\widetilde{\Phi}(\zeta)}{n+1}=\widetilde{\Psi}(0,\zeta)-1. \tag{5.27}$$

Из (5.25), (5.26) и (5.27) следует

$$\sum_{x=0}^{s}e^{x\zeta}\binom{n}{s}=\binom{n}{s}\widetilde{\Psi}(s,\zeta)-\frac{\widetilde{\Phi}(\zeta)}{n+1}\sum_{x=0}^{s}\binom{n+1}{x}=\binom{n}{s}\widetilde{\Psi}(s,\zeta)-$$

$$-[\widetilde{\Psi}(0,\zeta)-1]\left[2\sum_{x=0}^{s}\binom{n}{x}-\binom{n}{s}\right]=\binom{n}{s}[\widetilde{\Psi}(s,\zeta)+\widetilde{\Psi}(0,\zeta)-1]-$$

$$-2[\widetilde{\Psi}(0,\zeta)-1]\sum_{x=0}^{s}\binom{n}{x}.$$

Окончательно перепишем это равенство в виде

$$\sum_{x=0}^{s}e^{x\zeta}\binom{n}{x}=\widehat{\Psi}(s,\zeta)\binom{n}{s}+[1-\widehat{\Psi}(0,\zeta)]\sum_{x=0}^{s}\binom{n}{x}, \tag{5.28}$$

где для удобства записи положено

$$\widehat{\Psi}(x,\zeta)=\widetilde{\Psi}(x,\zeta)+\widetilde{\Psi}(0,\zeta)-1. \tag{5.29}$$

Полученная таким образом функция $\widehat{\Psi}(x,\zeta)$ в силу (5.21) есть линейная комбинация решений уравнения (5.18) и их производных при различных значениях параметра. Следовательно, $\widehat{\Psi}(x,\zeta)$ регулярна в круге $|\zeta|<\pi$ при любом значении $x\in\mathbf{C}$.

Это обстоятельство позволяет с помощью билинейной формы (2.1) корректно определить скалярное произведение $\langle f(\zeta),\ \widehat{\Psi}(x,\zeta)\rangle$ для любой функции $f(\zeta)\in E_\pi$ и для всех $x\in\mathbf{C}$.

Умножая скалярно (5.28) на $f(\zeta)$ слева и замечая, что $\langle f(\zeta),\ e^{x\zeta}\rangle=f(x)$, запишем

$$\sum_{x=0}^{s}f(x)\binom{n}{x}=\langle f(\zeta),\ \widehat{\Psi}(s,\zeta)\rangle\binom{n}{s}+\langle f(\zeta),\ 1-\widehat{\Psi}(0,\zeta)\rangle\sum_{x=0}^{s}\binom{n}{x}. \tag{5.30}$$

Отметим следующее свойство функций $\widehat{\Psi}(x,\zeta)$. Из (5.23) и (5.29) имеем

$$\widehat{\Psi}(x,0)=\widetilde{\Psi}(x,0)+\widetilde{\Psi}(0,0)-1={}^1/_2+{}^1/_2-1=0. \tag{5.31}$$

Рассмотрим функцию

$$u(x)=\langle f(\zeta),\ \widehat{\Psi}(x,\zeta)\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}P_k(x), \tag{5.32}$$

где

$$P_k(x)=\frac{\partial^k}{\partial\zeta^k}\widehat{\Psi}(x,0),\quad k=0,1,\ldots. \tag{5.33}$$

Равномерная сходимость ряда (5.32) на компактах в $\mathbf{C}$ устанавливается аналогично тому, как это было сделано в теореме 1 для ряда (4.3). Поскольку

$$\langle f(\zeta),\ 1-\widehat{\Psi}(0,\zeta)\rangle=\langle f(\zeta),\ 1\rangle-\langle f(\zeta),\ \widehat{\Psi}(0,\zeta)\rangle=f(0)-u(0),$$

(5.30) можно представить в следующем виде

$$\sum_{x=0}^{s} f(x)\binom{n}{x}=u(x)\binom{n}{s}+[f(0)-u(0)]\sum_{x=0}^{s}\binom{n}{x}.$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что функции (5.33) удовлетворяют рекуррентным соотношениям (5.14).

В дальнейшем доказательство будет проводиться по следующей схеме. Сначала определим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $\widetilde{\Psi}(x,\zeta)$. Затем методом, использованным в § 3, найдем рекуррентные соотношения для последовательности $\frac{\partial^k}{\partial\zeta^k}\widetilde{\Psi}(x,0)$, $k=0,1,\ldots$. Наконец, используя связь между функциями $\frac{\partial^k}{\partial\zeta^k}\widetilde{\Psi}(x,0)$ и $\frac{\partial^k}{\partial\zeta^k}\widehat{\Psi}(x,0)$, проистекающую из (5.29), определим соотношения, которым удовлетворяют функции (5.33).

Воспользуемся уравнением (5.18) и равенством (5.22), записанными следующим образом:

$$\begin{aligned}&(n+1)\Psi(x,\zeta)-(1+e^{-\zeta})\Psi'_\zeta(x,\zeta)=e^{x\zeta},\\&(n+1)\Psi(x,\zeta)-\Psi'_\zeta(x,\zeta)=\widetilde{\Psi}(x,\zeta).\end{aligned}\tag{5.34}$$

Рассмотрим (5.34) как линейную систему двух уравнений с двумя неизвестными $\Psi(x,\zeta)$ и $\Psi'(x,\zeta)$ и выразим их через остальные функции:

$$\Delta=\begin{vmatrix}n+1 & -(1+e^{-\zeta})\\ n+1 & -1\end{vmatrix}=(n+1)e^{-\zeta},$$

$$\Delta_\Psi=\begin{vmatrix}e^{x\zeta} & -(1+e^{-\zeta})\\ \widetilde{\Psi}(x,\zeta) & -1\end{vmatrix}=-e^{x\zeta}+(1+e^{-\zeta})\widetilde{\Psi}(x,\zeta),$$

$$\Delta_{\Psi'}=\begin{vmatrix}n+1 & e^{x\zeta}\\ n+1 & \widetilde{\Psi}(x,\zeta)\end{vmatrix}=(n+1)[\widetilde{\Psi}(x,\zeta)-e^{x\zeta}],$$

$$\Psi(x,\zeta)=\frac{\Delta_\Psi}{\Delta}=-\frac{1}{n+1}e^{x\zeta}e^{\zeta}+\frac{e^{\zeta}+1}{n+1}\widetilde{\Psi}(x,\zeta),\tag{5.35}$$

$$\Psi'(x,\zeta)=\frac{\Delta_{\Psi'}}{\Delta}=e^{\zeta}\widetilde{\Psi}(x,\zeta)-e^{x\zeta}e^{\zeta}.\tag{5.36}$$

Из (5.35) и (5.36) получаем искомое дифференциальное уравнение для функции $\widetilde{\Psi}(x,\zeta)$:

$$\left[-\frac{1}{n+1}e^{x\zeta}e^{\zeta}+\frac{e^{\zeta}+1}{n+1}\widetilde{\Psi}(x,\zeta)\right]'_\zeta=e^{\zeta}\widetilde{\Psi}(x,\zeta)-e^{x\zeta}e^{\zeta}.\tag{5.37}$$

Для определения рекуррентных соотношений между производными $\frac{\partial^k}{\partial\zeta^k}\widetilde{\Psi}(x,0)$ поступим следующим образом. Выберем целое число $k\geqslant 0$.

Умножим правую и левую части (5.37) скалярно на ζ^k и воспользуемся основными свойствами билинейной формы (2.1), приведенными в § 2, и леммой 1. Получим:

$$\left\langle \zeta^k, \left[-\frac{1}{n+1}e^{x\zeta}e^{\zeta}+\frac{e^{\zeta}+1}{n+1}\widetilde{\Psi}(x,\zeta)\right]'_{\zeta}\right\rangle = \langle \zeta^k, e^{\zeta}\widetilde{\Psi}(x,\zeta)-e^{x\zeta}e^{\zeta}\rangle,$$

$$\langle \zeta^{k+1}, -e^{x\zeta}e^{\zeta}+(e^{\zeta}+1)\widetilde{\Psi}(x,\zeta)\rangle = \langle (n+1)\zeta^k, e^{\zeta}\widetilde{\Psi}(x,\zeta)-e^{x\zeta}e^{\zeta}\rangle,$$

$$-\langle \zeta^{k+1}, e^{x\zeta}e^{\zeta}\rangle+\langle \zeta^{k+1}, (e^{\zeta}+1)\widetilde{\Psi}(x,\zeta)\rangle =$$

$$=\langle (n+1)\zeta^k, e^{\zeta}\widetilde{\Psi}(x,\zeta)\rangle-\langle (n+1)\zeta^k, e^{x\zeta}e^{\zeta}\rangle,$$

$$\langle \zeta^{k+1}, (e^{\zeta}+1)\widetilde{\Psi}(x,\zeta)\rangle-\langle (n+1)\zeta^k, e^{\zeta}\widetilde{\Psi}(x,\zeta)\rangle =$$

$$=\langle \zeta^{k+1}-(n+1)\zeta^k, e^{(x+1)\zeta}\rangle,$$

$$\langle (\zeta+1)^{k+1}+\zeta^k, \widetilde{\Psi}(x,\zeta)\rangle-\langle (n+1)(\zeta+1)^k, \widetilde{\Psi}(x,\zeta)\rangle =$$

$$=(x+1)^k-(n+1)(x+1)^k,$$

$$\langle (\zeta+1)^{k+1}+\zeta^k-(n+1)(\zeta+1)^k, \widetilde{\Psi}(x,\zeta)\rangle = (x-n)(x+1)^k. \qquad (5.38)$$

Соотношения между производными $\frac{\partial^r}{\partial\zeta^r}\widetilde{\Psi}(x,0)$ несложно получить из (5.38), если заметить, что $\langle \zeta^r, \widetilde{\Psi}(x,\zeta)\rangle = \frac{\partial^r}{\partial\zeta^r}\widetilde{\Psi}(x,0)$, но они не представляют для нас самостоятельного интереса и поэтому опускаются.

При $x=0$ из (5.38) получаем

$$\langle (\zeta+1)^{k+1}+\zeta^k-(n+1)(\zeta+1)^k, \widetilde{\Psi}(0,\zeta)\rangle = -n. \qquad (5.39)$$

С другой стороны,

$$\langle (\zeta+1)^{k+1}+\zeta^k-(n+1)(\zeta+1)^k, -1\rangle =$$

$$=-[(\zeta+1)^{k+1}+\zeta^k-(n+1)(\zeta+1)^k]\big|_{\zeta=0}=n. \qquad (5.40)$$

Складывая (5.38), (5.39) и (5.40), получим

$$\langle (\zeta+1)^{k+1}+\zeta^k-(n+1)(\zeta+1)^k, \widetilde{\Psi}(x,\zeta)+\widetilde{\Psi}(0,\zeta)-1\rangle =$$

$$=(x-n)(x+1)^k. \qquad (5.41)$$

Заменяя второй аргумент билинейной формы по формуле (5.29), имеем

$$\langle (\zeta+1)^{k+1}+\zeta^k-(n+1)(\zeta+1)^k, \widehat{\Psi}(x,\zeta)\rangle = (x-n)(x+1)^k. \qquad (5.42)$$

В силу (5.31), (5.33) и замечания, что $\langle \zeta^r, \widehat{\Psi}(x,\zeta)\rangle = P_r(x)$, $r\geqslant 0$, последнее эквивалентно

$$[P(x)+1]^{k+1}+P^k(x)-(n+1)[P(x)+1]^k = (x-n)(x+1)^k, \quad P_0(x)\equiv 0,$$
$$k=0, 1, \ldots.$$

Теорема доказана.

Приведем краткое описание алгоритма для вычисления суммы $\sum\limits_{x=0}^{s} f(x)\binom{n}{x}$. Прежде всего заметим, что в нашу задачу не входит написание программы, пригодной для реализации на ЭВМ. Мы ограничимся лишь описанием процедуры, позволяющей упростить вычисление конечной суммы в левой части (5.12). При этом предполагается, что алгоритм для вычисления суммы $T_n^{s)} = \sum\limits_{x=0}^{s}\binom{n}{x}$ уже известен. Таким

алгоритмом может служить, например, рекуррентный процесс, основанный на применении соотношений (5.26), если заметить, что $T_s^s = 2^s$.

В силу равенства (5.12) задача о нахождении суммы $\sum_{x=0}^{s} f(x)\binom{n}{x}$ для $f \in E_\pi$ сводится к вычислению величин $u(s)$ и $f(0)-u(0)$. При таком подходе естественной оказывается оценка относительной погрешности. Она может быть получена из следующих априорных оценок, которые мы приводим без доказательства.

Пусть функции $f(x)$ и $u(x)$ удовлетворяют соотношению (5.12) для всех $s=0, 1, \ldots, n$. Тогда

$$|f(0)-u(0)| \leqslant \max_{x=0,1,\ldots,n} |f(x)|, \tag{5.43}$$

$$\max_{x=0,\ldots,n} |u(x)| \leqslant n \cdot \max_{x=0,1,\ldots,n} |f(x)|. \tag{5.44}$$

Имея оценки устойчивости (5.43) и (5.44), при организации вычислений можно предполагать, что $f(x)$ — полином некоторой степени s_0. В зависимости от того, при скольких значениях s нас интересует величина суммы $\sum_{x=0}^{s} f(x)\binom{n}{x}$, возможны два варианта для вычисления величин $u(s)$ и $f(0)-u(0)$ в правой части (5.12).

Если число различных значений, принимаемых переменной s, больше s_0, то из рекуррентных соотношений (5.14) насчитываем и запоминаем коэффициенты полиномов $P_k(x)$, $k=1, \ldots, s_0$. Затем по формуле (5.13) определяем $u(s)$ и $f(0)-u(0)$.

Если же число возможных значений переменной s мало (меньше s_0), то при $x=s$ из (5.14) последовательно насчитываем величины $P_k(s)$, $k=1, \ldots, s_0$. Числа $u(s)$ и $f(0)-u(0)$ по-прежнему получаем по формуле (5.13).

Рассмотрим несколько примеров, получаемых из (5.12) в случае, когда $f(x)$ — полином степени не выше трех.

Из (5.14) последовательно находим

$$P_1(x) = \frac{x-n}{2}, \quad P_2(x) = \frac{x-n}{2}\left(x + \frac{n+1}{2}\right),$$

$$P_3(x) = \frac{x-n}{2}\left(x^2 + \frac{n+2}{2}x + \frac{n^2+3n}{4}\right).$$

Подставляя найденные значения в (5.13) и (5.12) для функций $f(x)=x^p$, $(p=1, 2, 3)$, получим

$$\sum_{x=0}^{s} x\binom{n}{x} = \frac{s-n}{2}\binom{n}{s} + \frac{n}{2}\sum_{x=0}^{s}\binom{n}{x},$$

$$\sum_{x=0}^{s} x^2\binom{n}{x} = \frac{s-n}{2}\left(s + \frac{n+1}{2}\right)\binom{n}{s} + \frac{n(n+1)}{4}\sum_{x=0}^{s}\binom{n}{x},$$

$$\sum_{x=0}^{s} x^3\binom{n}{x} = \frac{s-n}{2}\left(s^2 + \frac{n+2}{2}s + \frac{n^2+3n}{4}\right)\binom{n}{s} + \frac{n^2(n+3)}{8}\sum_{x=0}^{s}\binom{n}{x}.$$

В заключение отметим, что теоремы, аналогичные теореме 3, могут быть получены для сумм вида

$$\sum_{x=0}^{s} \frac{f(x)}{x!}, \quad \sum_{x=0}^{s} f(x)(x!)^{\pm n}, \quad n \text{ — целое} > 1, \quad \sum_{x=0}^{s} f(x)\binom{n}{x}^{-1}$$

и других.

Поступила в редакцию
18 января 1977 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Хапланов М. Г.* Линейные дифференциальные уравнения бесконечного порядка с аналитическими коэффициентами.— Докл. АН СССР, 1955, 105, № 6, 1162—1165.
[2] *Хапланов М. Г.* Бесконечные матрицы в аналитическом пространстве.— Успехи мат. наук, 1956, 11, 5, 37—44.
[3] *Миролюбов А. А.* Решение линейных дифференциально-разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами.— Мат. сб., 1957, 42, 1, 65—78.
[4] *Краплин М. А.* О целых решениях дифференциально-разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами.— Тр. Азово-Черноморск. ин-та механиз. с. х., 1964, 18, 8—16.
[5] *Коробейник Ю. Ф.* Некоторые применения теории нормально разрешимых операторов к дифференциальным уравнениям бесконечного порядка.— Мат. сб., 1967, 72, 1, 3—37.
[6] *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М., «Наука», 1967.
[7] *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Т. 1. М., «Мир», 1976.