Ю. С. Никольский, Неравенства между различными полунормами дифференцируемых функций многих переменных,
Тр. МИАН СССР, 1979, том 150, 239–264

Труды Математического института АН СССР
1979, том 150

Ю. С. НИКОЛЬСКИЙ

НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ПОЛУНОРМАМИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В статье изучаются полунормированные пространства $L_p^l(E^n)$ и $b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$ дифференцируемых функций многих переменных.

В работе [1] и при $p = q$ в работе [2] получено неравенство

$$\| D^\nu (f - P_{l-1}) \|_{L_q(E^n)} \leqslant c \sum_{i=1}^n \| D_i^{l_i} f \|_{L_p(E^n)} = c \| f \|_{L_p^l(E^n)}, \tag{1}$$

где $P_{l-1} = P_{l-1}(x; f)$ — некоторый многочлен степеней не выше $l_i - 1$ по x_i $(i = 1, \ldots, n)$, линейно зависящий от f,

$$1 < p \leqslant q < \infty, \quad 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \nu_i\right) = 0. \tag{2}$$

В настоящей работе устанавливаются подобные по характеру неравенства между различными полунормами дифференцируемых функций, характеризующие свойства производных функций из рассматриваемых пространств или их следов на m-мерных координатных подпространствах E^m. При этом в левых частях неравенств, так же как и в (1), присутствуют некоторые многочлены. Доказательство базируется на интегральных представлениях производных функций из рассматриваемых пространств или конечных разностей от этих производных через некоторые многочлены и заданные производные или конечные разности от производных. Вывод этих представлений осуществляется с помощью интегральных представлений функций через их производные и конечные разности от этих производных, полученных В. П. Ильиным [3].

Доказываются также теоремы о продолжении функций из пространств $b_p^{r(\bar\sigma)}(E^m)$ в пространства $L_p^l(E^n)$ и $b_p^{l(\sigma)}(E^n)$, причем в полунормах, стоящих в левых частях соответствующих оценок, вообще говоря, присутствуют некоторые многочлены. Продолжение функций осуществляется на одно измерение с помощью усреднений функций, параметром которых служит новая переменная (см. [4]).

Неравенство (1) верно для произвольной функции f, для которой конечна его правая часть. Заметим, что для функций $f \in W_p^l(E^n) = L_p(E^n) \cap L_p^l(E^n)$ при условиях (2) известно неравенство

$$\| D^\nu f \|_{L_q(E^n)} \leqslant c \| f \|_{L_p^l(E^n)} \tag{3}$$

(см. [4] при $p \neq q$). Неравенство (3) не имеет места для всех функций f с конечной правой частью, его обобщением является неравенство (1).

Устанавливаемые в работе неравенства обобщают известные неравенства, сопровождающие теоремы вложения с предельным показателем для пространств $W_p^l(E^n)$, $B_{p,\theta}^l(E^n)$, в том же направлении, в каком неравенство (1) обобщает неравенство (3).

Для вектора $l = (l_1, \ldots, l_n)$ с целыми положительными координатами рассмотрим пространство $L_p^l(E^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, функций $f(x)$, имеющих обобщенные по С. Л. Соболеву производные $D_i^{l_i} f(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ на E^n с конечной полунормой

$$\|f\|_{L_p^l(E^n)} = \sum_{i=1}^n \|D_i^{l_i} f\|_{L_p(E^n)}, \tag{4}$$

где E^n — n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$,

$$\|f\|_{L_p(E^n)}^p = \int_{E^n} |f(x)|^p\,dx, \quad 1 \leqslant p < \infty, \quad \|f\|_{L_\infty(E^n)} = \sup_{x \in E^n} \operatorname{vrai} |f(x)|.$$

Рассмотрим пространство $b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$, $1 \leqslant p$, $\theta \leqslant \infty$, функций $f(x)$, имеющих обобщенные производные $D_i^{k_i} f(x)$ на E^n с конечной полунормой

$$\|f\|_{b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)} = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^\infty \|\Delta_i^{s_i}(t) D_i^{k_i} f\|_{L_p(E^n)}^\theta \frac{dt}{t^{1+\theta(l_i - k_i)}} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leqslant \theta < \infty, \tag{5}$$

где $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_i = s_i + k_i > l_i > k_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$,

$$\Delta_i^s(t) f(x) = \sum_{j=0}^s (-1)^{s-j} C_s^j f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + jt, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

$$\|f\|_{b_{p,\infty}^{l(\sigma)}(E^n)} = \sum_{i=1}^n \sup_{t > 0} \operatorname{vrai} t^{-l_i + k_i} \|\Delta_i^{s_i}(t) D_i^{k_i} f\|_{L_p(E^n)}. \tag{6}$$

Аналогично определяются полунормированные пространства $L_p^l(\Omega)$ и $b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(\Omega)$ функций, определенных на области $\Omega \subset E^n$. Полунормы в этих пространствах определяются, как и в пространствах $L_p^l(E^n)$ и $b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$, но с заменой интегрирования по E^n интегрированием по Ω, а конечной разности $\Delta_i^{s_i}(t) D_i^{k_i} f$ на $\Delta_i^{s_i}(t; \Omega) D_i^{k_i} f$, где $\Delta_i^s(t; \Omega)\varphi(x) = \Delta_i^s(t)\varphi(x)$, если $[x + ste_i] \subset \Omega$, и $\Delta_i^s(t; \Omega)\varphi(x) = 0$, если $[x + ste_i] \not\subset \Omega$ (e_i — координатный вектор i-го направления). Пусть еще $W_p^l(\Omega) = L_p(\Omega) \cap L_p^l(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $B_{p,\theta}^l(\Omega) = L_p(\Omega) \cap b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(\Omega)$, $1 \leqslant p$, $\theta \leqslant \infty$.

Будем говорить, что функция f локально на E^n принадлежит пространству W_p^l или $B_{p,\theta}^l$, если для любого $R > 0$, $f \in W_p^l(E_R^n)$, соответственно $f \in B_{p,\theta}^l(E_R^n)$, где $E_R^n = \{x\colon |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} < R\}$.

Введем следующие обозначения: $1 \leqslant m \leqslant n$, $x^{(m)} = (x_1, \ldots, x_m)$, $x^{(n)} = x$; $x = (x^{(m)}, x')$, $x' = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$, если $1 \leqslant m < n$, $(x^{(n)}, x') = x$; $\varkappa = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)$, $\varkappa_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\varkappa^{(m)} = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m)$, $\varkappa^{(n)} = \varkappa$,

$$|\varkappa^{(m)}| = \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_m; \ \frac{x}{h^\varkappa} = \left(\frac{x_1}{h^{\varkappa_1}}, \ldots, \frac{x_n}{h^{\varkappa_n}}\right), \quad h > 0; \ \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n),$$

$$\nu_i \geqslant 0 \text{ целые } (i = 1, \ldots, n), \ D^\nu = D_{x_1}^{\nu_1} \ldots D_{x_n}^{\nu_n}, \ (\nu, \varkappa) = \sum_1^n \nu_i \varkappa_i;$$

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geqslant 0$ целые

$(i = 1, \ldots, n)$; $\alpha \leqslant l$, если $\alpha_i \leqslant l_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\sigma - 1 = (\sigma_1 - 1, \ldots, \sigma_n - 1)$; $E_+^n = \{x : x_n > 0\}$, $E^m = \{x : x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}$, если $1 \leqslant m < n$; $1/p + 1/p' = 1$, $b_p^{l(\sigma)}(E^n) = b_{p,p}^{l(\sigma)}(E^n)$.

Для простоты записи вместо неравенства $A \leqslant cB$, где $A = A(f)$, $B = B(f)$ — некоторые выражения, содержащие функцию f рассматриваемого класса, c — положительная постоянная, не зависящая от f, будем писать $A \ll B$. Если под знаком интеграла область интегрирования Ω не указана, то это означает, что $\Omega = E^n$.

Через $L_{p,\theta}(E_+^{n+1})$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$ будем обозначать пространство измеримых на E_+^{n+1} функций $F(x, t)$, для которых конечна норма

$$\| F \|_{L_{p,\theta}(E_+^{n+1})} = \| \| F \|_{L_p(E^n)} \|_{L_\theta(E_+^1)}.$$

Везде в дальнейшем будем считать, что $\varkappa_i = 1/l_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Лемма 1. *Пусть* $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, $1 - |\varkappa|/p - \mu < 0$ (*при* $\theta = 1$ *возможно и* $1 - |\varkappa|/p - \mu = 0$), $F \in L_{p,\theta}(E_+^{n+1})$,

$$J_{\varepsilon,h}(x) = \int_\varepsilon^h v^{-\delta_i - \mu}\, dv \iint t^{1/\theta + l_i - k_i} T_i\left(\frac{y}{v^\varkappa}, \frac{t}{v^{\varkappa_i}}\right) F(x + y, t)\, dy\, dt, \tag{7}$$

где $0 < \varepsilon < h \leqslant \infty$, $T_i(y, t)$ — *кусочно-непрерывные финитные функции, сосредоточенные в кубе* $\{0 < \delta < y_j < 1,\ j = 1, \ldots, n,\ \delta < t < 1\}$, $l_i > k_i$, $\delta_i = 1 + |\varkappa| + \varkappa_i - k_i\varkappa_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. *Тогда*

$$\sup_{x \in E^n} |J_{\varepsilon,h}(x)| \ll \varepsilon^{1 - \frac{|\varkappa|}{p} - \mu} \left(\int_{\delta\varepsilon^{\varkappa_i}}^\infty \| F \|_{L_p(E^n)}^\theta dt\right)^{1/\theta}. \tag{8}$$

Доказательство неравенства (8) при $1 - |\varkappa|/p - \mu < 0$ вытекает из свойств функции $T_i(x, t)$ и последовательного применения неравенства Гёльдера к внутренним интегралам в (7). Неравенство (8) при $\theta = 1$, $1 - |\varkappa|/p - \mu = 0$ доказывается с помощью перемены порядка интегрирования в интеграле (7), интегрирования по v и применения неравенства Гёльдера.

Во всех приводимых ниже интегральных представлениях функций будем считать, что

$$D^\nu f_0(x) = D^\nu f(x),$$

где $D^\nu f$ — обобщенная производная функции f порядка ν $(D^0 f = f)$.

Для функций из пространств $L_p^l(E^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и $b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, для любого вектора ν имеют место следующие интегральные представления В. П. Ильина [3]:

$$D^\nu f_\varepsilon(x) = D^\nu f_h(x) + (-1)^{|\nu|} \sum_{i=1}^n \int_\varepsilon^h \frac{dv}{v^{|\varkappa| + (\nu, \varkappa)}} \int \Phi_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{v^\varkappa}\right) D_i^{l_i} f(x + y)\, dy, \tag{9}$$

$$D^\nu f_\varepsilon(x) = D^\nu f_h(x) + (-1)^{|\nu|} \sum_{i=1}^n \int_\varepsilon^h \frac{dv}{v^{\delta_i + (\nu, \varkappa)}} \iint T_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{v^\varkappa}, \frac{t}{v^{\varkappa_i}}\right) \times$$
$$\times \Delta_i^{s_i}\left(\frac{t}{s_i}\right) D_i^{k_i} f\,(x + y)\, dy dt. \tag{10}$$

Здесь $0 < \varepsilon < h < \infty$, причем если $(\nu, \varkappa) < 1$, то $\varepsilon \geqslant 0$, $\delta_i = 1 + |\varkappa| + \varkappa_i - k_i\varkappa_i$,

$$D^\nu f_h(x) = (-1)^{|\nu|} h^{-|\varkappa|-(\nu,\varkappa)} \int \Phi_0^{(\nu)}\left(\frac{y}{h^\varkappa}\right) f(x+y)\,dy,$$

$$\Phi_0(y) = \prod_{j=1}^{n} \frac{d^{\beta_j}}{dy_j^{\beta_j}} \left[\frac{y_j^{\beta_j-1}}{(\beta_j-1)!} \int_0^{y_j} K_j(t)\,dt\right],$$

где β_j — достаточно большие натуральные числа, $K_j(t) = [a_j(t)]^2$, функции $a_j(t) \in C_0^\infty(E^1)$ сосредоточены на интервале $0 < \delta < t < 1$ и обладают свойством

$$\int K_j(t)\,dt = 1,$$

$\Phi_i(x)$, $T_i(x, t)$ — некоторые бесконечно дифференцируемые финитные функции, сосредоточенные соответственно в кубах $\{\delta < x_i < 1,\ i = 1, \ldots, n\}$ и $\{\delta < x_i < 1,\ i = 1, \ldots, n,\ \delta < t < 1\}$, $\delta > 0$.

Равенства (9), (10) при $\varepsilon = 0$ выполняются для почти каждого $x \in E^n$. Для функций $f \in L_p^l(E^n)$, $1 < p < \infty$, в равенстве (9) возможно и $\varepsilon = 0$ при $(\nu, \varkappa) = 1$. В этом случае сходимость внешних интегралов правой части (9) понимается в смысле сходимости в $L_p(E^n)$ (см. [1]). Для функций $f \in b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$ при $p = \infty$ и $\theta = 1$ в равенстве (10) возможно и $\varepsilon = 0$ при $(\nu, \varkappa) = 1$.

Лемма 2. *Пусть* $f \in b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, $(\nu, \varkappa) > 1 - |\varkappa|/p$ (*при* $\theta = 1$ *возможно и* $(\nu, \varkappa) = 1 - |\varkappa|/p$). *Тогда при* $h \to \infty$ $D^\nu f_h(x)$ *и каждый из интегралов в представлении* (10) *сходится равномерно на* E^n; *при этом, если* $\nu_j \geqslant \sigma_j = s_j + k_j$ *при некотором* j, *то* $D^\nu f_h(x) \to 0$, $h \to \infty$ *равномерно на* E^n.

Доказательство. Первая часть утверждения леммы следует из (10) и леммы 1.

Пользуясь свойствами функции $\Phi_0(y)$ и интегральным равенством из работы [3], выражающим интеграл от произведения функции f на некоторое ядро через интеграл от произведения конечной разности функции f на некоторое другое ядро, можно показать, что при $\nu_j \geqslant s_j + k_j$

$$D^\nu f_h(x) = h^{-|\varkappa| - \varkappa_j - (\nu,\varkappa) + k_j\varkappa_j} \iint T\left(\frac{y}{h^\varkappa}, \frac{t}{h^{\varkappa_j}}\right) \Delta_j^{s_j}\left(\frac{t}{s_j}\right) D_j^{k_j} f(x+y)\,dy\,dt,$$

где $T(y, t)$ — некоторая бесконечно дифференцируемая финитная функция с носителем в кубе $\{0 < \delta < x_i < 1,\ i = 1, \ldots, n,\ \delta < t < 1\}$. Отсюда с помощью неравенства Гёльдера получим

$$|D^\nu f_h(x)| \leqslant h^{1 - \frac{|\varkappa|}{p} - (\nu,\varkappa)} \left(\int_{\delta h^{\varkappa_j}/s_j}^{\infty} \|\Delta_j^{s_j}(t) D_j^{k_j} f\|_{L_p(E^n)}^{\theta} \frac{dt}{t^{1+\theta(l_j - k_j)}}\right)^{1/\theta} \to 0, \quad h \to \infty,$$

что и доказывает вторую часть утверждения леммы.

Лемма 3. *Для всякой функции* $f \in b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, *существует многочлен*

$$P_{\sigma-1}(x; f) = \sum_{\alpha \leqslant \sigma-1} c_\alpha x^\alpha, \tag{11}$$

$c_\alpha = 0$ *при* $(\alpha, \varkappa) \leqslant 1 - |\varkappa|/p$ (*при* $\theta = 1$ $c_\alpha = 0$, *если* $(\alpha, \varkappa) < 1 - |\varkappa|/p$), (12) *степеней не выше* $\sigma_i - 1$ *по* x_i $(i = 1, \ldots, n)$ *такой, что при* $(\nu, \varkappa) > 1 - |\varkappa|/p$ (*при* $\theta = 1$ *возможно и* $(\nu, \varkappa) = 1 - |\varkappa|/p$) *равномерно на* E^n

$$D^\nu f_h(x) \to D^\nu P_{\sigma-1}(x; f), \quad h \to \infty. \tag{13}$$

Доказательство. Положим

$$c_\alpha = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f_h(0), (\alpha, \varkappa) > 1 - |\varkappa|/p \quad (\text{при } \theta = 1\, (\alpha, \varkappa) \geqslant 1 - |\varkappa|/p). \tag{14}$$

По лемме 2 эти пределы существуют и $c_\alpha = 0$ при $\alpha \not\leqslant \sigma - 1$.

Разложим $D^\nu f_h(x)$ при $(\nu, \varkappa) > 1 - |\varkappa|/p$ (при $\theta = 1$ $(\nu, \varkappa) \geqslant 1 - |\varkappa|/p$) в точке $x = 0$ по формуле Тейлора по степеням x до достаточно высокого порядка. Отсюда, пользуясь (14) и замечая, что при $\nu \not\leqslant \sigma - 1$ по лемме 2 $D^\nu f_h(x)$ равномерно на E^n стремится к нулю, легко показать, что соотношение (13) выполняется на всяком компакте $K \subset E^n$ в смысле равномерной сходимости, а значит, в силу леммы 2 (13) выполняется также равномерно и на E^n.

Лемма 4. *Для любой функции* $f \in b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, *существует многочлен* $P_{\sigma-1}(x; f)$ *вида* (11), (12), (14), *линейно зависящий от* f, *такой, что*

$$\Delta_j^{\tilde{s}}(t) D^\nu [f_\varepsilon(x) - P_{\sigma-1}(x; f)] = (-1)^{|\nu|} \int_\varepsilon^\infty \sum_{i=1}^n v^{-\delta_i - (\nu, \varkappa)} \Delta_j^{\tilde{s}}(t) \iint T_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{v^\varkappa}, \frac{\tau}{v^{\varkappa_i}}\right) \times$$
$$\times \Delta_i^{s_i}\left(\frac{\tau}{s_i}\right) D_i^{k_i} f(x + y)\, dy\, d\tau\, dv \tag{15}$$

при $\varepsilon \geqslant 0$, $1 - |\varkappa|/p - \tilde{s}\varkappa_j < (\nu, \varkappa) < 1$ (*при* $\theta = 1$ *возможно и* $1 - |\varkappa|/p - \tilde{s}\varkappa_j = (\nu, \varkappa)$, *а при* $p = \infty$ *и* $\theta = 1$ *возможно и* $(\nu, \varkappa) = 1$) *и при* $\varepsilon > 0$, $1 - |\varkappa|/p - \tilde{s}\varkappa_j < (\nu, \varkappa)$ (*при* $\theta = 1$ $1 - |\varkappa|/p - \tilde{s}\varkappa_j \leqslant (\nu, \varkappa)$). *При этом, если* $\varepsilon = 0$, *то равенство* (15) *выполняется для любого фиксированного* t *при почти всех* $x \in E^n$.

Доказательство. Пусть $\tilde{s} = 0$ $(\Delta_j^0(t) f = f)$. Перейдя в равенстве (10) к пределу при $h \to \infty$, в силу леммы 3 получаем равенство (15).

Пусть $\tilde{s} > 0$. Беря от обеих частей равенства (10) конечную разность $\tilde{s}$ порядка по переменной x_j, заменяя $\Delta_j^{\tilde{s}}(t) D^\nu f_h(x)$ через

$$\int_0^t \ldots \int_0^t D_j^{\tilde{s}} D^\nu f_h(x_1, \ldots, x_j + \zeta_1 + \ldots + \zeta_{\tilde{s}}, \ldots, x_n)\, d\zeta_1 \ldots d\zeta_{\tilde{s}},$$

переходя в полученном равенстве при фиксированных x и t к пределу при $h \to \infty$, на основании леммы 3 получим (15).

Пусть $f \in L_p^l(E^n)$ и

$$P_{l-1}(x; f) = \sum_{\alpha \leqslant l-1} c_\alpha x^\alpha, \tag{16}$$

$$c_\alpha = 0 \text{ при } (\alpha, \varkappa) \leqslant 1 - |\varkappa|/p \text{ (при } p = 1\ c_\alpha = 0, \text{ если } (\alpha, \varkappa) < 1 - |\varkappa|/p), \tag{17}$$

$$c_\alpha = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f_h(0) \text{ при } (\alpha, \varkappa) > 1 - |\varkappa|/p \text{ (при } p = 1\, (\alpha, \varkappa) \geqslant 1 - |\varkappa|/p). \tag{18}$$

Пределы (18) существуют (см. [1]).

С помощью представления (9) доказывается следующая лемма.

Лемма 5. *Для любой функции* $f \in L_p^l(E^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *существует многочлен* $P_{l-1}(x; f)$ *вида* (16)—(18), *линейно зависящий от* f, *такой, что*

$$\Delta_j^{\tilde{s}}(t)\, D^\nu [f_\varepsilon(x) - P_{l-1}(x; f)] = (-1)^{|\nu|} \int_\varepsilon^\infty \sum_{i=1}^n v^{-|\varkappa|-(\nu,\varkappa)} \times$$
$$\times\, \Delta_j^{\tilde{s}}(t) \int \Phi_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{v^\varkappa}\right) D_i^{l_i} f(x+y)\, dy\, dv \quad (19)$$

при $\varepsilon \geqslant 0$, $1 - |\varkappa|/p - \tilde{s}\varkappa_j < (\nu, \varkappa) < 1$ (*при* $1 < p < \infty$ *возможно и* $(\nu, \varkappa) = 1$, *а при* $p = 1$ *возможно и* $1 - |\varkappa|/p - \tilde{s}\varkappa_j = (\nu, \varkappa)$) *и при* $\varepsilon > 0$, $1 - |\varkappa|/p - \tilde{s}\varkappa_j < (\nu, \varkappa)$ (*при* $p = 1$ $1 - |\varkappa|/p - \tilde{s}\varkappa_j \leqslant (\nu, \varkappa)$). *При этом, если* $\varepsilon = 0$, *то равенство* (19) *выполняется для любого фиксированного* t *при почти всех* $x \in E^n$.

Эта лемма при $\tilde{s} = 0$ доказана О. В. Бесовым [1].

Пусть $f(x)$ — измеримая на E^n функция, $E_R^m = \{x^{(m)}: |x^{(m)}| < R\}$, $m < n$. Функцию $\varphi(x^{(m)})$ назовем следом функции f на E^m и будем писать $\varphi = f|_{E^m}$, если f можно видоизменить на множестве n-мерной меры нуль так, что после этого для видоизмененной функции (которую снова обозначим через f) при некотором q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, для любого $R > 0$ и достаточно малого $\delta > 0$ будут выполняться следующие свойства:

1) $f(x^{(m)}, x') \in L_p(E_R^m)$, $\quad |x'| < \delta$;

2) $f(x^{(m)}, 0) = \varphi(x^{(m)})$;

3) $\| f(x^{(m)}, x') - \varphi(x^{(m)}) \|_{L_q(E_R^m)} \to 0$, $\quad |x'| \to 0$.

Определенный таким образом след f на E^m единственен с точностью до эквивалентности в смысле E^m.

Пусть $1 \leqslant m \leqslant n$, $F \in L_{p,\theta}(E_+^{n+1})$,

$$J(x) = \int_0^\infty \int \frac{F(x+y, t)\, t^\varepsilon\, dy\, dt}{[\rho(y) + t^{1/a}]^{\lambda + a\varepsilon}},$$

где $a > 0$, $\varepsilon > 0$, $\lambda = \frac{|\varkappa|}{p'} + \frac{a}{\theta'} + \frac{|\varkappa^{(m)}|}{q}$, $\quad \rho(y) = \sum_{i=1}^n |y_i|^{1/\varkappa_i}$. Тогда (см. [5, с. 257]), если выполнено одно из условий: 1) $\theta = 1$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$; 2) $1 < \theta \leqslant q$, $1 \leqslant p < q < \infty$, то

$$\| J(x^{(m)}, x') \|_{L_q(E^m)} \leqslant c \| F \|_{L_{p,\theta}(E_+^{n+1})}, \quad (20)$$

где постоянная c не зависит от f и x'.

В приводимых ниже теоремах, если нет оговорок, считаем $1 \leqslant m \leqslant n$ и в этом случае условимся, что $D^\nu f|_{E^n} = D^\nu f(x)$. Под нормой $\| D^\nu f \|_{L_p(E^m)}$ и полунормой $\| D^\nu f \|_{b_{p,\theta}^{r(\sigma)}(E^m)}$ понимаются норма и полунорма следа $D^\nu f|_{E^m}$ соответственно в смысле пространств $L_p(E^m)$ и $b_{p,\theta}^{r(\sigma)}(E^m)$.

Теорема 1. *Пусть* $f \in b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$, $\varepsilon_m = 1 - \frac{|\varkappa|}{p} + \frac{|\varkappa^{(m)}|}{q} - (\nu, \varkappa) = 0$, *и либо* $\theta = 1$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, *либо* $1 < \theta \leqslant q$, $1 \leqslant p < q < \infty$. *Пусть еще* $P_{\sigma-1} = P_{\sigma-1}(x; f)$ — *многочлен из* (11), (12), (14). *Тогда существует след* $D^\nu f|_{E^m}$ *и выполняется неравенство*

$$\| D^\nu (f - P_{\sigma-1}) \|_{L_p(E^m)} \leqslant \| f \|_{b_{q,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)}. \quad (21)$$

Если $\varepsilon_m < 0$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, *то при любом* $\varepsilon > 0$

$$\| D^\nu (f_\varepsilon - P_{\sigma-1}) \|_{L_q(E^m)} \leqslant c\varepsilon^{\varepsilon_m} \| f \|_{b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)}, \tag{22}$$

где постоянная c *не зависит от* f *и* ε.

Доказательство. Для любой производной $D^\nu f$, порядок которой удовлетворяет условиям теоремы, в силу (15) для почти каждого $x \in E^n$ справедливо представление

$$D^\nu [f(x) - P_{\sigma-1}(x; f)] = (-1)^{|\nu|} \int_0^\infty \sum_{i=1}^n v^{-\delta_i - (\nu, \varkappa)} \iint t^{\frac{1}{\theta} + l_i - k_i} T_i^{(\nu)} \left(\frac{y}{v^\varkappa}, \frac{\tau}{v^{\varkappa_i}} \right) \times$$
$$\times F_i (x + y, \tau)\, dy\, d\tau\, dv, \tag{23}$$

где $F_i(y, \tau) = \Delta_i^{s_i} \left(\frac{\tau}{s_i} \right) D_i^{k_i} f(y) / \tau^{\frac{1}{\theta} + l_i - k_i}$, $\quad \delta_i = 1 + |\varkappa| + \varkappa_i - k_i \varkappa_i$.

Обозначим правую часть равенства (23) через $\Phi(x)$. С помощью свойств функций $T_i(y, \tau)$, неравенства Гёльдера, перемены порядка интегрирования, интегрирования по v и неравенства (20) получим для любого x'

$$\| \Phi (x^{(m)}, x') \|_{L_q(E^m)} \leqslant \sum_{i=1}^n \left\| \int_0^\infty \int \frac{t^{l_i - k_i} \| F_i (x^{(m)} + y^{(m)}, y', t) \|_{L_p(E^{n-m})}\, dy^{(m)}\, dt}{[\rho (y^{(m)}) + t^{1/\varkappa_i}]^{\lambda_i + \varkappa_i (l_i - k_i)}} \right\|_{L_q(E^m)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^n \| F_i \|_{L_{p,\theta}(E^{n+1}_+)} \leqslant \| f \|_{b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)}, \tag{24}$$

где $\rho (y^{(m)}) = \sum_1^m |y_i|^{1/\varkappa_i}$, $\quad \lambda_i = \frac{|\varkappa^{(m)}|}{p'} + \frac{\varkappa_i}{\theta'} + \frac{|\varkappa^{(m)}|}{q}$.

Из (24) следует оценка (21) для функции $\Phi(x^{(m)}, 0)$. Так как $D^\nu (f - P_{\sigma-1}) = \Phi$ для почти каждого $x \in E^n$, то неравенство (21) при $m = n$ доказано. Для завершения доказательства неравенства (21) при $m < n$ достаточно показать, что функция $\Phi(x^{(m)}, 0)$ является следом функции $D^\nu (f - P_{\sigma-1})$ на E^m.

В силу оценки (20) и непрерывности по сдвигу пространства $b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)$ при $1 \leqslant p$, $\theta < \infty$ получим при $|x'| \to 0$

$$\| \Phi (x^{(m)}, x') - \Phi (x^{(m)}, 0) \|_{L_q(E^m)} \leqslant \| f(y^{(m)}, y' + x') - f(y^{(m)}, y') \|_{b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)} \to 0. \tag{25}$$

При $\theta = 1$ и $p = \infty$ имеем при $|x'| \to 0$

$$\| \Phi (x^{(m)}, x') - \Phi (x^{(m)}, 0) \|_{L_\infty(E^m)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \int \frac{t^{l_i - k_i} |F_i (y^{(m)}, y' + x', t) - F_i (y^{(m)}, y', t)|\, dy\, dt}{[\rho (y) + t^{1/\varkappa_i}]^{|\varkappa| + \varkappa_i (l_i - k_i)}} \to 0, \tag{26}$$

так как интегралы

$$\int_0^\infty \int \frac{t^{l_i - k_i} |F_i (y, t)|\, dy\, dt}{[\rho (y) + t^{1/\varkappa_i}]^{|\varkappa| + \varkappa_i (l_i - k_i)}}$$

конечны на основании неравенства (20).

Из определения функции $\Phi(x)$ и из (24)—(26) следует, что $\Phi(x^{(m)}, 0)$ есть след $D^\nu(f - P_{\sigma-1})$ на E^m.

Неравенство (22) устанавливается с помощью представления (15), обобщенного неравенства Минковского, неравенства Гёльдера с показателями q, $pq/(q-p)$, p' и обычного неравенства Гёльдера.

Заметим, что для данной функции $f \in b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 < \theta \leqslant \infty$, существует не более одного многочлена вида

$$P_{\sigma-1}(x) = \sum_{\alpha \leqslant \sigma-1} c_\alpha x^\alpha, \qquad c_\alpha = 0 \text{ при } (\alpha, \varkappa) \leqslant 1 - \frac{|\varkappa|}{p},$$

для которого конечны левые части (21), (22). В самом деле, если предположить, что существуют два таких многочлена $P_{\sigma-1}(x)$ и $P^*_{\sigma-1}(x)$, то для любого вектора ν удовлетворяющего условиям $(\nu, \varkappa) > 1 - |\varkappa|/p$ и $\nu \leqslant \sigma - 1$ можно указать такое $q = q(\nu) \in [p, \infty)$, что выполняется включение

$$D^\nu [P_{\sigma-1}(x) - P^*_{\sigma-1}(x)] \in L_{q(\nu)}(E^n),$$

а это возможно лишь в случае равенства коэффициентов этих многочленов $c_\alpha = c^*_\alpha$ при всех $\alpha \leqslant \sigma - 1$.

Для полноты изложения приведем теорему для пространства $L_p^l(E^n)$, содержащую в себе неравенство (1) (см. [5, с. 224]).

Теорема (О. В. Бесов). *Пусть* $f \in L_p^l(E^n)$, $\varepsilon_m = 1 - \frac{|\varkappa|}{p} + \frac{|\varkappa^{(m)}|}{q} - (\nu, \varkappa) = 0$, *и либо* $m = n$, $1 < p \leqslant q < \infty$, *либо* $m < n$, $1 < p < q < \infty$, *либо* $p = 1, q = \infty$. *Пусть еще* $P_{l-1} = P_{l-1}(x; f)$ — *многочлен из* (16)—(18). *Тогда существует след* $D^\nu f|_{E^m}$ *и выполняется неравенство*

$$\| D^\nu (f - P_{l-1}) \|_{L_q(E^m)} \leqslant \| f \|_{L_p^l(E^n)}. \tag{27}$$

Если $\varepsilon_m < 0$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, *то при любом* $\varepsilon > 0$

$$\| D^\nu (f_\varepsilon - P_{l-1}) \|_{L_q(E^m)} \leqslant c \varepsilon^{\varepsilon_m} \| f \|_{L_p^l(E^n)}, \tag{28}$$

где постоянная c *не зависит от* f *и* ε.

Для данной функции $f \in L_p^l(E^n)$, $1 < p < \infty$, существует не более одного многочлена вида

$$P_{l-1}(x) = \sum_{\alpha \leqslant l-1} c_\alpha x^\alpha, \qquad c_\alpha = 0 \text{ при } (\alpha, \varkappa) \leqslant 1 - \frac{|\varkappa|}{p},$$

для которого конечны левые части (27), (28).

Замечание 1. Пусть функция $f \in L_p^l(E^n)$ (соответственно $f \in b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$) и $f \in L_q(E^n)$, $1 \leqslant q < \infty$. Тогда многочлен $P_{l-1}(x; f)$ из (16)—(18) (соответственно $P_{\sigma-1}(x; f)$ из (11), (12), (14)) тождественно равен нулю. Это утверждение остается верным и при $q = \infty$, если дополнительно потребовать $1 - |\varkappa|/p \geqslant 0$ при $1 < p \leqslant \infty$ (соответственно $1 < \theta \leqslant \infty$) и $1 - |\varkappa|/p > 0$ при $p = 1$ (соответственно $\theta = 1$).

Доказательство замечания вытекает из определения коэффициентов многочленов $P_{l-1}(x; f)$, $P_{\sigma-1}(x; f)$ и неравенства

$$| D^\nu f_h(x) | \leqslant h^{-\frac{|\varkappa|}{q} - (\nu, \varkappa)} \| f \|_{L_q(E^n)}.$$

Лемма 6. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \tilde{\theta} \leqslant \infty$, $\varepsilon_m = 1 - \frac{|\varkappa|}{p} + \frac{|\varkappa^{(m)}|}{q} - \mu > 0, r_j = l_j \varepsilon_m$, $\bar{s}_j + \tilde{k}_j > r_j > \tilde{k}_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, m)$, $F \in L_{p,\theta}(E_+^{n+1})$,

$$g_{i,j}(x, t) = \int_0^\infty \frac{dv}{v^{\delta_i + \mu + \tilde{k}_j \varkappa_j}} \Delta_j^{\bar{s}_j}(t) \iint \tau^{\frac{1}{\theta} + l_i - k_i} T_i\left(\frac{y}{v^{\varkappa}}, \frac{\tau}{v^{\varkappa_i}}\right) F(x + y, \tau)\, dy\, d\tau,$$

где $T_i(y, t) \in C_0^\infty(E^{n+1})$ *и сосредоточены в кубе* $\{0 < y_i < 1, i = 1, \ldots, n, 0 < t < 1\}$, $l_i > k_i - 1$, $\delta_i = 1 + |\varkappa| + \varkappa_i - k_i \varkappa_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. *Тогда*

$$\| t^{-\frac{1}{\tilde{\theta}} - r_j + \tilde{k}_j} g_{i,j}(x^{(m)}, x', t) \|_{L_{q,\tilde{\theta}}(E_+^{m+1})} \leqslant c \| F \|_{L_{p,\theta}(E_+^{n+1})},$$

где постоянная c *не зависит от* f *и* x'.

Доказательство. Применяя обобщенное неравенство Минковского, пользуясь оценками

$$\| \Delta_j^{\bar{s}_j}(t) f \|_{L_q(E^m)} \leqslant \| f \|_{L_q(E^m)}, \tag{29}$$

$$\| \Delta_j^{\bar{s}_j}(t) f \|_{L_q(E^m)} \leqslant t^{\bar{s}_j} \| D_j^{\bar{s}_j} f \|_{L_q(E^m)}, \tag{30}$$

перенося дифференцирование на ядро, получим

$$\| g_{i,j}(x, t) \|_{L_q(E^m)} \leqslant \int_0^{t^{l_j}} \frac{dv}{v^{\delta_i + \mu + \tilde{k}_j \varkappa_j}} \int_0^{v^{\varkappa_i}} \tau^{\frac{1}{\theta} + l_i - k_i} \times$$

$$\times \left\| \int_{0 < y_i < v^{\varkappa_i}} | F(x + y, \tau) |\, dy \right\|_{L_q(E^m)} d\tau +$$

$$+ \int_{t^{l_j}}^\infty \frac{t^{\bar{s}_j} dv}{v^{\delta_i + \mu + \tilde{k}_j \varkappa_j + \bar{s}_j \varkappa_j}} \int_0^{v^{\varkappa_i}} \tau^{\frac{1}{\theta} + l_i - k_i} \left\| \int_{0 < y_i < v^{\varkappa_i}} | F(x + y, \tau) |\, dy \right\|_{L_q(E^m)} d\tau. \tag{31}$$

Воспользовавшись неравенством Гёльдера для трех функций $F^{p/q}$, $F^{(q-p)/q}$, 1 с показателями q, $pq/(q-p)$, p', найдем

$$\left\| \int_{0 < y_i < v^{\varkappa_i}} | F(x + y, \tau) |\, dy \right\|_{L_q(E^m)} \leqslant v^{\frac{|\varkappa|}{p'} + \frac{|\varkappa^{(m)}|}{q}} \| F(y, \tau) \|_{L_p(E^n)}. \tag{32}$$

Для дальнейшей оценки нам потребуются неравенства Харди. Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $\lambda = 1/p' + 1/q$. Тогда

$$\left\| x^{-\beta} \int_0^x f(t)\, dt \right\|_{L_q(E_+^1)} \leqslant \| x^{-\beta + \lambda} f(x) \|_{L_p(E_+^1)}, \quad \beta > \frac{1}{q}, \tag{33}$$

$$\left\| x^{-\beta} \int_x^\infty f(t)\, dt \right\|_{L_q(E_+^1)} \leqslant \| x^{-\beta + \lambda} f(x) \|_{L_p(E_+^1)}, \quad \beta < \frac{1}{q}. \tag{34}$$

Пользуясь оценками (31), (32) и делая замену переменной $\tilde{t} = t^{l_j}$, применяя неравенства Харди, делая замену переменной $\tilde{t} = t^{\varkappa_i}$, применяя неравенство Харди (33), получим

$$\| t^{-\frac{1}{\tilde\theta}-r_j+\tilde k_j} g_{i,j}(x,t)\|_{L_{q,\tilde\theta}(E_+^{m+1})} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| t^{-(r_j-\tilde k_j)\varkappa_j-\frac{1}{\tilde\theta}} \int_0^t v^{-2+\varepsilon_m+k_i\varkappa_i-\tilde k_j\varkappa_j-\varkappa_i} dv \int_0^{v^{\varkappa_i}} \tau^{\frac{1}{\theta}+l_i-k_i} \| F(y,\tau)\|_{L_p(E^n)} d\tau \right\|_{L_{\tilde\theta}(E_+^1)} +$$

$$+ \left\| t^{-(r_j-\tilde k_j)\varkappa_j-\frac{1}{\tilde\theta}+\tilde s_j\varkappa_j} \int_t^\infty v^{-2+\varepsilon_m+k_i\varkappa_i-\tilde k_j\varkappa_j-\varkappa_i-\tilde s_j\varkappa_j} dv \int_0^{v^{\varkappa_i}} \tau^{\frac{1}{\theta}+l_i-k_i} \| F(y,\tau)\|_{L_p(E^n)} d\tau \right\|_{L_{\tilde\theta}(E_+^1)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| t^{-1+k_i\varkappa_i-\varkappa_i-\frac{1}{\tilde\theta}} \int_0^{t^{\varkappa_i}} \tau^{\frac{1}{\theta}+l_i-k_i} \| F(y,\tau)\|_{L_p(E^n)} d\tau \right\|_{L_{\tilde\theta}(E_+^1)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| t^{-1+k_i-l_i-\frac{1}{\tilde\theta}} \int_0^t \tau^{\frac{1}{\theta}+l_i-k_i} \| F(y,\tau)\|_{L_p(E^n)} d\tau \right\|_{L_{\tilde\theta}(E_+^1)} \leqslant \| F \|_{L_{p,\theta}(E_+^{n+1})},$$

что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $f \in b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \tilde\theta \leqslant \infty$, $\varepsilon_m = 1 - \frac{|\varkappa|}{p} + \frac{|\varkappa^{(m)}|}{q} - (\nu, \varkappa) > 0$, $r = (r_1, \ldots, r_m)$, $\tilde\sigma = (\tilde\sigma_1, \ldots, \tilde\sigma_m)$, $r_j = l_j\varepsilon_m$, $\tilde\sigma_j = \tilde s_j + \tilde k_j > r_j > \tilde k_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, m)$. *Пусть еще* $P_{\sigma-1}(x; f)$ — *многочлен из* (11), (12), (14). *Тогда существует след* $D^\nu f|_{E^m}$, *и выполняется неравенство*

$$\| D^\nu (f - P_{\sigma-1}) \|_{b_{q,\tilde\theta}^{r(\tilde\sigma)}(E^m)} \leqslant \| f \|_{b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)}. \tag{35}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий теоремы следует, что

$$1 - \frac{|\varkappa|}{p} - \tilde S_j\varkappa_j < \tilde K_j\varkappa_j + (\nu, \varkappa) < 1, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Поэтому в силу (15) справедливо представление

$$\Delta_j^{\tilde s_j}(t) D_j^{\tilde k_j} D^\nu [f(x) - P_{\sigma-1}(x; f)] =$$

$$= (-1)^{|\nu|+\tilde k_j} \int_0^\infty \sum_{i=1}^n v^{-\delta_i-(\nu,\varkappa)-\tilde k_j\varkappa_j} \Delta_j^{\tilde s_j}(t) \iint \tau^{\frac{1}{\theta}+l_i-k_i} D_j^{\tilde k_j} T_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{v^\varkappa}, \frac{\tau}{v^{\varkappa_i}}\right) \times$$

$$\times F_i(x+y,\tau)\, dy\, d\tau\, dv, \tag{36}$$

где $F_i(y,\tau) = \Delta_i^{s_i}\left(\frac{\tau}{s_i}\right) D_i^{k_i} f(y) \Big/ \tau^{\frac{1}{\theta}+l_i-k_i}$, $\quad \delta_i = 1 + |\varkappa| + \varkappa_i - k_i\varkappa_i$.

Обозначим правую часть равенства (36) через $\Phi_j(x, t)$. С помощью леммы 6 для любого $j = 1, \ldots, m$ получим

$$\| t^{-\frac{1}{\tilde\theta}-r_j+\tilde K_j} \Phi_j(x^{(m)}, x', t) \|_{L_{q,\tilde\theta}(E_+^{m+1})} \leqslant \| f \|_{b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)}. \tag{37}$$

Так как $\Delta_j^{\tilde s_j}(t) D_j^{\tilde k_j} D^\nu (f - P_{\sigma-1}) = \Phi_j(x, t)$ для любого фиксированного t при почти всех $x \in E^n$, то при $m = n$ из (37) следует неравенство (35).

Пусть $m < n$ и $f^*(x) = f(x) - P_{\sigma-1}(x; f)$. Для функции f^* на основании (10) для любого фиксированного t при почти всех $x \in E^n$ имеет место представление

$$\Delta_j^{\tilde{s}_j}(t)\,D_j^{\tilde{k}_j}D^{\nu}f^*(x)=\Delta_j^{\tilde{s}_j}(t)\,D_j^{\tilde{k}_j}D^{\nu}f_h^*(x)+$$
$$+(-1)^{|\nu|+\tilde{k}_j}\sum_{i=1}^{n}\int_0^h v^{-\delta_i-(\nu,\varkappa)-\tilde{k}_j\varkappa_j}\Delta_j^{\tilde{s}_j}(t)\iint \tau^{\frac{1}{\theta}+l_i-k_i}D_j^{\tilde{k}_j}T_i^{(\nu)}\times$$
$$\times\left(\frac{y}{v^{\varkappa}},\frac{\tau}{v^{\varkappa_i}}\right)F_i(x+y,\tau)\,dy\,d\tau\,dv, \qquad (38)$$

где $F_i(y,\tau)$ и δ_i такие же, как и в (36), ν, $\tilde{k}_j$ и $\tilde{s}_j$ удовлетворяют условиям теоремы.

Обозначим правую часть равенства (38) через $\Psi_j(x,t)$. Функция f^* принадлежит локально на E^n пространству $B^l_{p,\theta}$. Отсюда следует, что существуют следы $D^{\nu}f^*|_{E^m}$, $D_j^{\tilde{k}_j}D^{\nu}f^*|_{E^m}$, причем

$$\Delta_j^{\tilde{s}_j}(t)\,D_j^{\tilde{k}_j}[D^{\nu}f^*|_{E^m}]=\Delta_j^{\tilde{s}_j}(t)\,[D_j^{\tilde{k}_j}D^{\nu}f^*|_{E^m}]=\Psi_j(x^{(m)},0,t). \qquad (39)$$

В силу неравенства (37) и (39) для завершения доказательства теоремы при $m<n$ достаточно показать, что для любого фиксированного $t>0$

$$\Phi_j(x^{(m)},0,t)=\Psi_j(x^{(m)},0,t)\ \text{при почти всех}\ x^{(m)}\in E^m. \qquad (40)$$

С помощью леммы 6 при $\tilde{\theta}=\infty$ можно показать, что для q, удовлетворяющего условиям теоремы, и любого $t>0$ при $|x'|\to 0$

$$\|\Phi_j(x^{(m)},x',t)-\Phi_j(x^{(m)},0,t)\|_{L_q(E^m)}\to 0,\qquad 1\leqslant q<\infty, \qquad (41)$$

$$|\Phi_j(x^{(m)},x',t)-\Phi_j(x^{(m)},0,t)|\to 0,\qquad q=\infty,\qquad x^{(m)}\in E^m. \qquad (42)$$

Так как функция f^* принадлежит локально на E^n пространству $B^l_{p,\theta}$, то отсюда будет следовать, что для q, удовлетворяющего условиям теоремы, и любого $t>0$ при $|x'|\to 0$

$$\|\Psi_j(x^{(m)},x',t)-\Psi_j(x^{(m)},0,t)\|_{L_q(E^m_R)}\to 0,\qquad 1\leqslant q<\infty, \qquad (43)$$

для любого $R>0$,

$$|\Psi_j(x^{(m)},x',t)-\Psi_j(x^{(m)},0,t)|\to 0,\qquad q=\infty,\qquad x^{(m)}\in E^m. \qquad (44)$$

Замечая, что $\Phi_j(x^{(m)},x',t)=\Psi_j(x^{(m)},x',t)$ для любого фиксированного $t>0$ при почти всех $x\in E^n$, с помощью соотношений (41)—(44) легко получить (40). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Пусть $\tilde{\sigma}_i=\tilde{s}_i+\tilde{k}_i\geqslant\sigma_i>l_i>\tilde{k}_i\geqslant 0$ $(i=1,\ldots,n)$. Тогда из теоремы 2 следует, что на функциях пространства $b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)$, $1\leqslant p$, $\theta\leqslant\infty$, эквивалентны все полунормы вида (5)—(6) при различных $\tilde{s}_i,\tilde{k}_i$. Поэтому в полунормах (5)—(6) можно считать, что $k_i=0$, $\sigma_i=s_i>l_i>0$ $(i=1,\ldots,n)$.

Отметим также, что при $\tilde{\sigma}_i=\tilde{s}_i+\tilde{k}_i>l_i>\tilde{k}_i\geqslant 0$ $(i=1,\ldots,n)$ на функциях пространства $b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)$, $1\leqslant p$, $\theta\leqslant\infty$, удовлетворяющих условиям замечания 1, эквивалентны все полунормы вида (5)—(6) при различных $\tilde{s}_i$, $\tilde{k}_i$, $\tilde{\sigma}_i$.

Л е м м а 7. *Пусть* $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$, $1\leqslant p\leqslant\theta\leqslant\infty$, $1\leqslant m<n$, $\varepsilon_m=1-\frac{|\varkappa|}{p}+\frac{|\varkappa^{(m)}|}{q}-\mu>0$, $\quad r_j=l_j\varepsilon_m$, $\quad \tilde{s}_j+\tilde{k}_j>r_j>\tilde{k}_j\geqslant 0$ $(j=$

$= 1, \ldots, m)$, $f \in L_p(E^n)$,

$$g_j(x, t) = \int_0^\infty \frac{dv}{v^{|\varkappa|+\mu+\tilde{k}_j\varkappa_j}} \Delta_j^{\tilde{s}_j}(t) \int \Phi\left(\frac{y}{v^\varkappa}\right) f(x+y)\, dy,$$

где $\Phi(y) \in C_0^\infty(E^n)$ *и сосредоточена в кубе* $\{0 < \delta < x_i < 1,\ i = 1, \ldots, n\}$ *Тогда*

$$\| t^{-\frac{1}{\theta}-r_j+\tilde{k}_j} g_j(x^{(m)}, x', t) \|_{L_{q,\theta}(E_+^{m+1})} \leqslant c \| f \|_{L_p(E^n)},$$

где постоянная c *не зависит от* f *и* x'.

Доказательство. Рассуждая аналогично тому, как это делалось при доказательстве леммы 6, получим

$$\| g_j(x, t) \|_{L_q(E^m)} \leqslant \int_0^{t^{l_j}} \frac{dv}{v^{1-\varepsilon_m+\tilde{k}_j\varkappa_j+\frac{\varkappa_n}{p'}+\varepsilon\varkappa_n}} \int_0^{v^{\varkappa_n}} y_n^\varepsilon \| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n) \|_{L_p(E^{n-1})} dy_n +$$

$$+ \int_{t^{l_j}}^\infty \frac{t^{\tilde{s}_j} dv}{v^{1-\varepsilon_m+\tilde{k}_j\varkappa_j+\frac{\varkappa_n}{p'}+\varepsilon\varkappa_n+\tilde{s}_j\varkappa_j}} \int_0^{v^{\varkappa_n}} y_n^\varepsilon \| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n) \|_{L_p(E^{n-1})} dy_n, \qquad \varepsilon > 0. \tag{45}$$

Пользуясь оценкой (45) и делая замену переменной $\tilde{t} = t^{l_j}$, применяя неравенства Харди (33), (34), делая замену переменной $\tilde{t} = t^{\varkappa_n}$, применяя неравенство Харди (33), получим

$$\| t^{-\frac{1}{\theta}-r_j+\tilde{k}_j} g_j(x, t) \|_{L_{q,\theta}(E_+^{m+1})} \leqslant$$

$$\leqslant \Big\| t^{-(r_j-\tilde{k}_j)\varkappa_j-\frac{1}{\theta}} \int_0^t v^{-1+\varepsilon_m-\tilde{k}_j\varkappa_j-\frac{\varkappa_n}{p'}-\varepsilon\varkappa_n} dv \times$$

$$\times \int_0^{v^{\varkappa_n}} y_n^\varepsilon \| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n) \|_{L_p(E^{n-1})} dy_n \Big\|_{L_\theta(E_+^1)} +$$

$$+ \Big\| t^{-(r_j-\tilde{k}_j)\varkappa_j-\frac{1}{\theta}+\tilde{s}_j\varkappa_j} \int_t^\infty v^{-1+\varepsilon_m-\tilde{k}_j\varkappa_j-\frac{\varkappa_n}{p'}-\varepsilon\varkappa_n-\tilde{s}_j\varkappa_j} dv \times$$

$$\times \int_0^{v\varkappa_n} y_n^\varepsilon \| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n) \|_{L_p(E^{n-1})} dy_n \Big\|_{L_\theta(E_+^1)} \leqslant$$

$$\leqslant \Big\| t^{-\frac{1}{\theta}-\frac{\varkappa_n}{p'}-\varepsilon\varkappa_n} \int_0^{t^{\varkappa_n}} y_n^\varepsilon \| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n) \|_{L_p(E^{n-1})} dy_n \Big\|_{L_\theta(E_+^1)} \leqslant$$

$$\leqslant \Big\| t^{-\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p'}-\varepsilon} \int_0^t y_n^\varepsilon \| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n) \|_{L_p(E^{n-1})} dy_n \Big\|_{L_\theta(E_+^1)} \leqslant \| f \|_{L_p(E^n)},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Пусть* $f \in L_p^l(E^n)$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \theta \leqslant \infty$, $1 \leqslant m < n$, $\varepsilon_m = 1 - \frac{|\varkappa|}{p} + \frac{|\varkappa^{(m)}|}{q} - (\nu, \varkappa) > 0$, $r = (r_1, \ldots, r_m)$, $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_m)$, $r_j = l_j\varepsilon_m$, $\tilde{\sigma}_j = \tilde{s}_j + \tilde{k}_j > r_j > \tilde{k}_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, m)$. *Пусть еще* $P_{l-1}(x; f)$ — *многочлен из* (16)—(18). *Тогда существует след* $D^\nu f|_{E^m}$, *и* *выполняется неравенство*

$$\| D^{\nu}(f-P_{l-1})\|_{b^{r(\tilde{\sigma})}_{\tilde{q},\,\theta}(E^m)} \leqslant \| f \|_{L^l_p(E^n)}. \tag{46}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2. Вместо леммы 6 и интегральных представлений (15), (10) нужно воспользоваться леммой 7 и интегральными представлениями (19), (9).

Пусть $1 < p < q \leqslant \infty$, $p \leqslant \theta \leqslant \infty$, $\lambda = 1/p' + 1/q$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ (при $q = \theta = \infty$ возможно и $p = 1$; при $q = \theta = \infty$, $p = 1$ возможно и $\beta = 0$), $f \in L_p(E^1)$,

$$K_1(y,t) = \begin{cases} |y|^{-\lambda+\beta\gamma}|t|^{-\frac{1}{\theta}-\beta}, & |y|^{\gamma} \leqslant |t|, \\ 0, & |y|^{\gamma} > |t|; \end{cases}$$

$$K_2(y,t) = \begin{cases} |y|^{-\lambda-\beta\gamma}|t|^{-\frac{1}{\theta}+\beta}, & |y|^{\gamma} > |t|, \\ 0, & |y|^{\gamma} \leqslant |t|. \end{cases}$$

Тогда (см. [5, с. 39])

$$\left\| \int f(y) K_i(y-x,t)\,dt \right\|_{L_{q,\theta}(E^2)} \leqslant \| f \|_{L_p(E^n)}, \quad i = 1, 2. \tag{47}$$

Лемма 8. *Пусть* $1 < p < q \leqslant \infty$, $p \leqslant \theta \leqslant \infty$ (*при* $q = \theta = \infty$ *возможно и* $p = 1$), $\varepsilon_n = 1 - \frac{|\varkappa|}{p} + \frac{|\varkappa|}{q} - \mu > 0, r_j = l_j\varepsilon_n, \tilde{s}_j + \tilde{k}_j > r_j > \tilde{k}_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, $f \in L_p(E^n)$,

$$g_j(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{dv}{v^{|\varkappa|+\mu+\tilde{k}_j\varkappa_j}} \Delta_j^{\tilde{s}_j}(t) \int \Phi\left(\frac{y}{v^{\varkappa}}\right) f(x+y)\,dy,$$

где $\Phi(y) \in C_0^{\infty}(E^n)$ *и сосредоточена в кубе* $\{0 < \delta < x_i < 1,\ i = 1, \ldots, n\}$. *Тогда*

$$\| t^{-\frac{1}{\theta}-r_j+\tilde{k}_j} g_j(x^{(m)}, x', t)\|_{L_{q,\theta}(E^{n+1}_{+})} \leqslant c \| f \|_{L_p(E^n)}, \tag{48}$$

где постоянная c не зависит от f и x'.

Доказательство. Поступая, как и при оценке (45), с помощью перемены порядка интегрирования будем иметь

$$\| g_j(x,t)\|_{L_q(E^n)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_0^{t^{l_j}} \int_{\delta v^{\varkappa_n} < y_n < v^{\varkappa_n}} \frac{\| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n)\|_{L_p(E^{n-1})}\,dy_n\,dv}{v^{1-\varepsilon_n+\lambda\varkappa_n+\tilde{k}_j\varkappa_j}} \right\|_{L_q(E^1)} +$$

$$+ t^{\tilde{s}_j} \left\| \int_{t^{l_j}}^{\infty} \int_{\delta v^{\varkappa_n} < y_n < v^{\varkappa_n}} \frac{\| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n)\|_{L_p(E^{n-1})}\,dy_n\,dv}{v^{1-\varepsilon_n+\lambda\varkappa_n+(\tilde{k}_j+\tilde{s}_j)\varkappa_j}} \right\|_{L_q(E^1)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_{|y_n| < t^{l_j\varkappa_n}} \frac{\| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n)\|_{L_p(E^{n-1})}\,dy_n}{|y_n|^{\lambda-\tilde{\delta}l_n}} \int_0^{t^{l_j}} \frac{dv}{v^{1-(r_j-\tilde{k}_j)\varkappa_j+\tilde{\delta}}} \right\|_{L_q(E^1)} +$$

$$+ t^{\tilde{s}_j} \left\| \int_0^{\infty} \| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n)\|_{L_p(E^{n-1})}\,dy_n \int_{\max\{y_n^{l_n},\, t^{l_j}\}}^{\infty} \frac{dv}{v^{1+\lambda\varkappa_n+(\tilde{k}_j+\tilde{s}_j-r_j)\varkappa_j}} \right\|_{L_q(E^1)}, \tag{49}$$

где $\lambda = 1/p' + 1/q$, $0 < \tilde{\delta} < (r_j - \tilde{k}_j)\varkappa_j$. Отсюда, предварительно проинтегрировав по v в каждом слагаемом последней части (49), получим

$$\| t^{-\frac{1}{\theta} - r_j + \tilde{k}_j} g_j(x, t) \|_{L_{q,\theta}(E_+^{n+1})} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int\limits_{|y_n|^{l_n \varkappa_j} < |t|} |y_n|^{-\lambda + \tilde{\delta} l_n} |t|^{-\frac{1}{\theta} - \tilde{\delta} l_j} \| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n) \|_{L_p(E^{n-1})} dy_n \right\|_{L_{q,\theta}(E^2)} +$$

$$+ \left\| \int |t|^{-\frac{1}{\theta} + \tilde{k}_j + \tilde{s}_j - r_j} [|y_n|^{l_n} + |t|^{l_j}]^{-\lambda\varkappa_n - (\tilde{k}_j + \tilde{s}_j - r_j)\varkappa_j} \times \right.$$

$$\left. \times \| f(y^{(n-1)}, x_n + y_n) \|_{L_p(E^{n-1})} dy_n \right\|_{L_{q,\theta}(E^2)}. \tag{50}$$

Полагая $\mu_j = \tilde{k}_j + \tilde{s}_j - r_j$ и замечая, что

$$\frac{|t|^{-\frac{1}{\theta} + \mu_j}}{[|y_n|^{l_n} + |t|^{l_j}]^{\lambda\varkappa_n + \mu_j \varkappa_j}} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} |y_n|^{-\lambda + \delta_1 l_n \varkappa_j} |t|^{-\frac{1}{\theta} - \delta_1}, & |y_n|^{l_n \varkappa_j} \leqslant |t|, \quad 0 < \delta_1 \leqslant \varkappa_n l_j \lambda, \\ |y_n|^{-\lambda - \delta_2 l_n \varkappa_j} |t|^{-\frac{1}{\theta} + \delta_2}, & |y_n|^{l_n \varkappa_j} > |t|, \quad 0 < \delta_2 \leqslant \tilde{k}_j + \tilde{s}_j - r_j, \end{cases}$$

на основании оценки (50) с помощью оценки (47) (при $q = \theta = \infty$, $p = 1$ полагаем $\delta_1 = 0$) получаем неравенство (48).

Теорема 4. *Пусть* $f \in L_p^l(E^n)$, $1 < p < q \leqslant \infty$, $p \leqslant \theta \leqslant \infty$ (*при* $q = \theta = \infty$ *возможно и* $p = 1$), $\varepsilon_n = 1 - \frac{|\varkappa|}{p} + \frac{|\varkappa|}{q} - (\nu, \varkappa) > 0$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$, $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $r_j = l_j \varepsilon_n$, $\tilde{\sigma}_j = \tilde{s}_j + \tilde{k}_j > r_j > \tilde{k}_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. *Пусть еще* $P_{l-1}(x; f)$ — *многочлен из* (16)—(18). *Тогда выполняется неравенство*

$$\| D^\nu (f - P_{l-1}) \|_{b_{q,\theta}^{r(\tilde{\sigma})}(E^n)} \leqslant \| f \|_{L_p^l(E^n)}. \tag{51}$$

Для доказательства этой теоремы надо воспользоваться представлением (19) и оценить с помощью леммы 8 каждый из интегралов его правой части.

Замечание 3. Если $\nu_j + \tilde{\sigma}_j \geqslant \sigma_j$ или $\nu_j + \tilde{\sigma}_j \geqslant l_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, то многочлены $P_{\sigma-1}(x; f)$ или $P_{l-1}(x; f)$ в неравенствах (35) или (46), (51) можно не писать, так как они исчезают при взятии соответствующих производных и конечных разностей в левых частях этих неравенств.

Пусть функция φ локально суммируемая на E^{n-1}. Рассмотрим в полупространстве E_+^n функцию

$$F_s(x) = x_n^{-|\bar{\lambda}| + s} \int \Omega\left(\frac{\bar{y}}{x_n^{\bar{\lambda}}}\right) \varphi(\bar{x} + \bar{y})\, d\bar{y} = R_s[\varphi], \tag{52}$$

где s — неотрицательное целое число, $\bar{y} = y^{(n-1)}$, $\bar{\lambda} = \lambda^{(n-1)}$, $\lambda_j > 0$ $(j = 1, \ldots$ $\ldots, n-1)$,

$$\Omega(\bar{y}) = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{d^{\beta_j}}{dy_j^{\beta_j}} \left[\frac{y_j^{\beta_j - 1}}{(\beta_j - 1)!} \int\limits_0^{y_j} K_j(t)\, dt \right],$$

где $K_j(t) = [a_j(t)]^2$, функции $a_j(t) \in C_0^\infty(E^1)$ и сосредоточены на интервале $0 < \delta < t < 1$, β_j — достаточно большие натуральные числа,

$$\int K_j(t)\,dt = 1.$$

Лемма 9. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_i > l_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\varepsilon = 1 - \frac{s}{l_n} - \frac{1}{pl_n} > 0$, $s \geqslant 0$ *целое*, $\varphi \in b_p^{r(\bar\sigma)}(E^{n-1})$, $r = (r_1, \ldots, r_{n-1})$, $r_j = \varepsilon l_j$ $(j = 1, \ldots, n-1)$, $\bar\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$. *Тогда для функции* $F_s(x)$ (52) *при* $\lambda_j = l_n \varkappa_j$ *имеет место неравенство*

$$\| F_s \|_{b_p^{l(\sigma)}(E_+^n)} \leqslant \| \varphi \|_{b_p^{r(\bar\sigma)}(E^{n-1})}. \tag{53}$$

Доказательство. В силу замечания 2 для получения неравенства (53) достаточно оценить

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left(\int_0^\infty \frac{\| \Delta_j^{\sigma_j}(t) F_s \|_{L_p(E_+^n)}^p \, dt}{t^{1+pl_j}} \right)^{1/p} + \left(\int_0^\infty \frac{\| \Delta_n^k(t) D_n^s F_s \|_{L_p(E_+^n)}^p \, dt}{t^{1+p(l_n-s)}} \right)^{1/p} = \sum_{j=1}^{n-1} A_j^{1/p} + A_n^{1/p}, \tag{54}$$

где $k + s = \sigma_n$.

Имеем

$$A_j = \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+pl_j}} \int_0^{t^{1/\lambda_j}} \| \Delta_j^{\sigma_j}(t) F_s \|_{L_p(E^{n-1})}^p dx_n + \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+pl_j}} \int_{t^{1/\lambda_j}}^\infty \| \Delta_j^{\sigma_j}(t) F_s \|_{L_p(E^{n-1})}^p dx_n = J_1 + J_2. \tag{55}$$

С помощью обобщенного неравенства Минковского получим

$$J_1 \leqslant \int_0^\infty \frac{\| \Delta_j^{\sigma_j}(t) \varphi(\bar x) \|_{L_p(E^{n-1})}^p \, dt}{t^{1+pl_j}} \int_0^{t^{1/\lambda_j}} x_n^{sp} dx_n \leqslant \int_0^\infty \frac{\| \Delta_j^{\sigma_j}(t) \varphi(\bar x) \|_{L_p(E^{n-1})}^p \, dt}{t^{1+pr_j}}. \tag{56}$$

Далее (см. [3]),

$$\begin{aligned} D_j^{\sigma_j} F_s(\bar x, x_n) = \\ &= \frac{(-1)^{\sigma_j}}{x_n^{\sigma_j \lambda_j - s}} \int \varphi(\bar x + x_n^{\bar\lambda} \bar y) \prod_{\substack{i=1\\ i \neq j}}^{n-1} \frac{d^{\beta_i}}{dy_i^{\beta_i}} \left(\frac{y_i^{\beta_i - 1}}{(\beta_i - 1)!} \int_0^{y_i} K_i(t)\,dt \right) \times \\ &\times \frac{d^{\sigma_j}}{dy_j^{\sigma_j}} \left[\frac{d^{\beta_j}}{dy_j^{\beta_j}} \left(\frac{y_j^{\beta_j - 1}}{(\beta_j - 1)!} \int_0^{y_j} K_j(t)\,dt \right) \right] d\bar y = \\ &= \frac{1}{x_n^{|\bar\lambda| - s + (\sigma_j + 1)\lambda_j}} \iint T_j \left(\frac{\bar y}{x_n^{\bar\lambda}}, \frac{\tau}{x_n^{\lambda_j}} \right) \Delta_j^{\sigma_j} \left(\frac{\tau}{\sigma_j} \right) \varphi(\bar x + \bar y)\, d\bar y\, d\tau, \end{aligned} \tag{57}$$

где $T_j(\bar y, \tau)$ — некоторая бесконечно дифференцируемая на E^n функция, сосредоточенная в кубе $\{0 < x_i < 1,\ i = 1, \ldots, n-1,\ 0 < \tau < 1\}$.

Пользуясь равенством (57), оценкой (30), обобщенным неравенством Минковского и неравенством Гёльдера, меняя порядок интегрирования и интегрируя по t и x_n, получим

$$J_2 \leqslant \int_0^\infty \frac{t^{\sigma_j p} dt}{t^{1+pl_j}} \int_{t^{1/\lambda_j}}^\infty \frac{dx_n}{x_n^{\lambda_j+(\sigma_j\lambda_j-s)p}} \int_0^{x_n^{\lambda_j}} \left\| \Delta_j^{\sigma_j}\left(\frac{\tau}{\sigma_j}\right) \varphi(\bar{x}) \right\|_{L_p(E^{n-1})}^p d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \left\| \Delta_j^{\sigma_j}\left(\frac{\tau}{\sigma_j}\right) \varphi(\bar{x}) \right\|_{L_p(E^{n-1})}^p d\tau \int_{\tau^{1/\lambda_j}}^\infty \frac{dx_n}{x_n^{\lambda_j+(\sigma_j\lambda_j-s)p}} \int_0^{x_n^{\lambda_j}} \frac{dt}{t^{1+(l_j-\sigma_j)p}} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \frac{\| \Delta_j^{\sigma_j}(\tau) \varphi(\bar{x}) \|_{L_p(E^{n-1})}^p d\tau}{\tau^{1+pr_j}}. \tag{58}$$

Покажем теперь, как оценивается последнее слагаемое в (54). Интеграл A_n разбиваем на два:

$$A_n = \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+p(l_n-s)}} \int_0^t \| \Delta_n^k(t) D_n^s F_s \|_{L_p(E^{n-1})}^p dx_n +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+p(l_n-s)}} \int_t^\infty \| \Delta_n^k(t) D_n^s F_s \|_{L_p(E^{n-1})}^p dx_n = J_3 + J_4. \tag{59}$$

При оценке J_3 воспользуемся тем, что

$$D_n^s F_s(\bar{x}, x_n) = s!\, \varphi(\bar{x}) + \int_0^{x_n} D_\zeta^{s+1} F_s(\bar{x}, \zeta)\, d\zeta$$

для почти всех $\bar{x} \in E^{n-1}$. Отсюда следует, что

$$| \Delta_n^k(t) D_n^s F_s(\bar{x}, x_n) | \leqslant \int_0^{(k+1)t} | D_\zeta^{s+1} F_s(\bar{x}, \zeta) |\, d\zeta. \tag{60}$$

Непосредственным подсчетом показывается, что

$$D_\zeta^s F_s(\bar{x}, \zeta) = \sum_\nu \frac{c_\nu}{\zeta^{(\nu,\bar{\lambda})}} \int \varphi(\bar{x}+\bar{y}) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^{\beta_i}}{dy_i^{\beta_i}} \left[\frac{y_i^{\beta_i-1+\nu_i}}{(\beta_i-1)!} K_i^{(\nu_i-1)}\left(\frac{y_i}{\zeta^{\lambda_i}}\right) \right] d\bar{y}, \tag{61}$$

где суммирование ведется по всем векторам $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{n-1})$, координаты ν_i ($i = 1, \ldots, n-1$) которых независимо друг от друга принимают значения $0, 1, \ldots, s$; c_ν — некоторые постоянные. При $\nu_i = 0$ выражение, стоящее под знаком произведения в (61), надо заменить на

$$\frac{d^{\beta_i}}{dy_i^{\beta_i}} \left[\frac{y_i^{\beta_i-1}}{(\beta_i-1)!} \int_0^{y_i/\zeta^{\lambda_i}} K_i(t)\, dt \right].$$

Поступая, как и при выводе равенства (57), получим

$$D_\zeta^{s+1} F_s(\bar{x}, \zeta) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_\nu \frac{c_{\nu,j}}{\zeta^{1+\lambda_j}} \int \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} \frac{d^{\beta_i}}{dy_i^{\beta_i}} \left[\frac{y_i^{\beta_i-1}}{(\beta_i-1)!} \left(\frac{y_i}{\zeta^{\lambda_i}}\right)^{\nu_i} K_i^{(\nu_i-1)}\left(\frac{y_i}{\zeta^{\lambda_i}}\right) \right] \times$$

$$\times \frac{d^{\beta_j}}{dy_j^{\beta_j}}\left[\frac{y_j^{\beta_j}}{(\beta_j-1)!}\frac{d}{dy_j/\zeta^{\lambda_j}}\left(\left(\frac{y_j}{\zeta^{\lambda_j}}\right)^{\nu_j} K_j^{(\nu_j-1)}\left(\frac{y_j}{\zeta^{\lambda_j}}\right)\right)\right]\varphi(\bar{x}+\bar{y})\,d\bar{y} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\nu}\frac{1}{\zeta^{1+|\bar{\lambda}|+\lambda_j}}\iint T_{\nu,j}\left(\frac{\bar{y}}{\zeta^{\bar{\lambda}}},\frac{\tau}{\zeta^{\lambda_j}}\right)\Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right)\varphi(\bar{x}+\bar{y})\,d\bar{y}\,d\tau, \qquad (62)$$

где $T_{\nu,j}(\bar{y},\tau)$ — некоторые бесконечно дифференцируемые финитные функции, сосредоточенные в кубе $\{0<x_i<1,\ i=1,\ldots,n-1,\ 0<\tau<1\}$, $c_{\nu,j}=-\lambda_j c_\nu$.

Пользуясь неравенством (60), равенством (62) и обобщенным неравенством Минковского, интегрируя по x_n и применяя неравенство Гёльдера для функций

$$\xi^{-(1+\lambda_j-\delta)1/p'},\quad \zeta^{-(1+\lambda_j)\frac{1}{p}-\frac{\delta}{p'}}\left\|\Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right)\varphi(\bar{x})\right\|_{L_p(E^{n-1})},$$

$\delta>0$ (достаточно малое), меняя порядок интегрирования и интегрируя по ζ и t, считая, что $\beta_j\geqslant\sigma_j$ $(j=1,\ldots,n-1)$, получим

$$J_3\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^\infty\frac{dt}{t^{1+p(l_n-s)}}\int_0^t\left[\int_0^{(k+1)t}\frac{d\zeta}{\zeta^{1+\lambda_j}}\int_0^{\zeta^{\lambda_j}}\left\|\Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right)\varphi(\bar{x})\right\|_{L_p(E^{n-1})}d\tau\right]^p dx_n\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^\infty\frac{dt}{t^{p(l_n-s)}}\left(\int_0^{(k+1)t}\frac{d\zeta}{\zeta^{1+\lambda_j-\delta}}\int_0^{\zeta^{\lambda_j}}d\tau\right)^{p/p'}\int_0^{(k+1)t}\frac{d\zeta}{\zeta^{1+\lambda_j+\delta(p-1)}}\times$$

$$\times\int_0^{\zeta^{\lambda_j}}\left\|\Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right)\varphi(\bar{x})\right\|^p_{L_p(E^{n-1})}d\tau\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^\infty\left\|\Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right)\varphi(\bar{x})\right\|^p_{L_p(E^{n-1})}d\tau\times$$

$$\times\int_{\tau^{1/\lambda_j}/(k+1)}^\infty\frac{dt}{t^{p(l_n-s)-\delta(p-1)}}\int_{\tau^{1/\lambda_j}}^\infty\frac{d\zeta}{\zeta^{1+\lambda_j+\delta(p-1)}}\leqslant\|\varphi\|^p_{b_p^{r}(\bar{\sigma})(E^{n-1})}. \qquad (63)$$

С помощью дифференцирования равенства (62) по ζ получим, что

$$|D_\zeta^{s+k}F_s(\bar{x},\zeta)|\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\zeta^{k+|\bar{\lambda}|+\lambda_j}}\iint\limits_{\substack{0<y_i<\zeta^{\lambda_i}\\ 0<\tau<\zeta^{\lambda_j}}}\left|\Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right)\varphi(\bar{x}+\bar{y})\right|d\bar{y}\,d\tau. \qquad (64)$$

Замечая, что

$$|\Delta_n^k(t)\,D_n^sF_s(\bar{x},\zeta)|\leqslant t^{k-1}\int_{x_n}^{x_n+kt}|D_\zeta^{s+k}F_s(\bar{x},\zeta)|\,d\zeta,$$

пользуясь оценкой (64) и обобщенным неравенством Минковского, применяя неравенство Гёльдера, меняя порядок интегрирования и интегрируя последовательно по ζ, t и x_n, найдем

$$J_4\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^\infty\frac{t^{(k-1)p}dt}{t^{1+p(l_n-s)}}\int_t^\infty\left[\int_{x_n}^{x_n+kt}\frac{d\zeta}{\zeta^{k+\lambda_j}}\int_0^{\zeta^{\lambda_j}}\left\|\Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right)\varphi(\bar{x})\right\|_{L_p(E^{n-1})}d\tau\right]^p dx_n\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^\infty \frac{t^{(k-1)p}dt}{t^{1+p(l_n-s)}} \int_t^\infty dx_n \left(\int_{x_n}^{x_n+kt} \frac{d\zeta}{\zeta^{k+\lambda_j}} \int_0^{\zeta^{\lambda_j}} d\tau \right)^{p/p'} \int_{x_n}^{x_n+kt} \frac{d\zeta}{\zeta^{k+\lambda_j}} \int_0^{\zeta^{\lambda_j}} \left\| \Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right) \varphi(\bar{x}) \right\|^p_{L_p(E^{n-1})} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^\infty \left\| \Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right) \varphi(\bar{x}) \right\|^p_{L_p(E^{n-1})} d\tau \int_{\tau^{1/\lambda_{j/(k+1)}}}^\infty \frac{dx_n}{x_n^{kp+\lambda_j}} \int_0^{x_n} \frac{dt}{t^{2+p(l_n-s-k)}} \int_{x_n}^{x_n+kt} d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant \| \varphi \|^p_{b_p^r(\bar{\sigma})(E^{n-1})}. \tag{65}$$

В силу (54) — (56), (58), (59), (63) и (65) получаем требуемую оценку (53).

Лемма 10. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $l_i > 0$ *целые* $(i = 1, \ldots, n)$, $\varepsilon = 1 - \frac{s}{l_n} - \frac{1}{pl_n} > 0$, $s \geqslant 0$ *целое*, $\varphi \in b_p^{r(\bar{l})}(E^{n-1})$, $r = (r_1, \ldots, r_{n-1})$, $r_j = \varepsilon l_j$ $(j = 1, \ldots, n-1)$, $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_{n-1})$. *Тогда для функции* $F_s(x)$ (52) *при* $\lambda_j = l_n \varkappa_j$ *имеет место неравенство*

$$\| F_s \|_{L_p^l(E_+^n)} \leqslant \| \varphi \|_{b_p^{r(\bar{l})}(E^{n-1})}. \tag{66}$$

Доказательство. С помощью (57), обобщенного неравенства Минковского и неравенства Гёльдера, перемены порядка интегрирования и интегрирования по x_n, для любого $j = 1, \ldots, n-1$ получим

$$\| D_j^{l_j} F_s \|^p_{L_p(E_+^n)} \leqslant \int_0^\infty \frac{dx_n}{x_n^{\lambda_j + (l_n - s)p}} \int_0^{x_n^{\lambda_j}} \left\| \Delta_j^{l_j}\left(\frac{\tau}{l_j}\right) \varphi(\bar{x}) \right\|^p_{L_p(E^{n-1})} d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \left\| \Delta_j^{l_j}\left(\frac{\tau}{l_j}\right) \varphi(\bar{x}) \right\|^p_{L_p(E^{n-1})} d\tau \int_{\tau^{1/\lambda_j}}^\infty \frac{dx_n}{x_n^{\lambda_j + (l_n - s)p}} \leqslant \int_0^\infty \frac{\| \Delta_j^{l_j}(\tau) \varphi(\bar{x}) \|^p_{L_p(E^{n-1})} d\tau}{\tau^{1+pr_j}}. \tag{67}$$

В силу условий леммы $l_n \geqslant s + 1$. Поэтому (см. (62)) имеем

$$| D_n^{l_n} F_s | = | D_n^{l_n - s}(D_n^s F_s) | \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{x_n^{l_n - s + |\bar{\lambda}| + \lambda_j}} \iint\limits_{\substack{0 < y_i < x_n^{\lambda_i} \\ 0 < \tau < x_n^{\lambda_j}}} \left| \Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right) \varphi(\bar{x} + \bar{y}) \right| d\bar{y}\, d\tau.$$

Отсюда, поступая, как и при оценке (67), и считая, что $\beta_j \geqslant l_j$ $(j = 1, \ldots, n-1)$, находим

$$\| D_n^{l_n} F_s \|^p_{L_p(E_+^n)} \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^\infty \frac{dx_n}{x_n^{\lambda_j + (l_n - s)p}} \int_0^{x_n^{\lambda_j}} \left\| \Delta_j^{\beta_j}\left(\frac{\tau}{\beta_j}\right) \varphi(\bar{x}) \right\|^p_{L_p(E^{n-1})} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^\infty \frac{\| \Delta_j^{\beta_j}(\tau) \varphi(\bar{x}) \|^p_{L_p(E^{n-1})} d\tau}{\tau^{1+pr_j}} \leqslant \| \varphi \|^p_{b_p^{r(\bar{l})}(E^{n-1})}. \tag{68}$$

В силу (67), (68) получаем требуемую оценку (66).

Теорема 5. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_i > l_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\varepsilon_s = 1 - \frac{s}{l_n} - \frac{1}{pl_n} > 0$, $\varphi_s \in b_p^{r^{[s]}(\bar{\sigma})}(E^{n-1})$, $r^{[s]} = (r_1^{[s]}, \ldots, r_{n-1}^{[s]})$, $r_j^{[s]} = l_j \varepsilon_s$ $(s = 0, 1, \ldots, S$, $j = 1, \ldots$

$\ldots, n-1)$, $\overline{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$. *Тогда существует функция* $F \in b_p^{l(\sigma)}(E^n)$ *такая, что* $D_n^s F|_{E^{n-1}} = \varphi_s$ *и*

$$\|F\|_{b_p^{l(\sigma)}(E^n)} \leqslant \sum_{s=0}^{S} \|\varphi_s\|_{b_p^{r^{[s]}(\overline{\sigma})}(E^{n-1})}. \tag{69}$$

Доказательство. Так как пространство $b_p^{l(\sigma)}(E_+^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, допускает линейное ограниченное распространение с E_+^n на E^n (см. [4]), то искомое продолжение достаточно осуществить в полупространство $x_n > 0$.

Рассмотрим интегральные операторы $R_s[\varphi]$, $s = 0, 1, \ldots, S$ (52). Для почти каждого $\bar{x} \in E^{n-1}$ имеем

$$\lim_{x_n \to +0} D_n^{\mu} R_s[\varphi] = \begin{cases} 0, & \mu < s, \\ s!\,\varphi(\bar{x}), & \mu = s. \end{cases} \tag{70}$$

Пользуясь теоремой 2 и леммой 9 (см. также замечание 3), получим

$$\|D_n^k R_s[\varphi_s]\|_{b_p^{r^{[k]}(\overline{\sigma})}(E^{n-1})} \leqslant \|R_s[\varphi_s]\|_{b_p^{l(\sigma)}(E_+^n)} \leqslant \|\varphi_s\|_{b_p^{r^{[s]}(\overline{\sigma})}(E^{n-1})}, \quad s, k = 0, 1, \ldots, S. \tag{71}$$

В качестве искомой может быть взята функция

$$F = \sum_{k=0}^{S} \frac{1}{k!} R_k[\psi_k], \qquad \psi_k = \varphi_k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} D_n^k R_i[\psi_i]|_{E^{n-1}}. \tag{72}$$

Учитывая (70), нетрудно видеть, что

$$D_n^s F|_{E^{n-1}} = \varphi_s, \qquad s = 0, 1, \ldots, S.$$

С помощью леммы 9 и неравенств (71) для функции F устанавливается неравенство (69), что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 6. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $l_i > 0$ *целые* $(i = 1, \ldots, n)$, $\varepsilon_s = 1 - \frac{s}{l_n} - \frac{1}{pl_n} > 0$, $\varphi_s \in b_p^{r^{[s]}(\bar{l})}(E^{n-1})$, $r^{[s]} = (r_1^{[s]}, \ldots, r_{n-1}^{[s]})$, $r_j^{[s]} = l_j \varepsilon_s$ $(s = 0, 1, \ldots, S,\ j = 1, \ldots, n-1)$, $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_{n-1})$. *Тогда существует функция* $F \in L_p^l(E^n)$ *такая, что* $D_n^s F|_{E^{n-1}} = \varphi_s$ *и*

$$\|F\|_{L_p^l(E^n)} \leqslant \sum_{s=0}^{S} \|\varphi_s\|_{b_p^{r^{[s]}(\bar{l})}(E^{n-1})}. \tag{73}$$

Доказательство. Требуемое продолжение достаточно осуществить в полупространство $x_n > 0$, так как пространство $L_p^l(E_+^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, допускает линейное ограниченное распространение с E_+^n на E^n. В качестве искомой может быть взята функция (72). Неравенство (73) следует из леммы 10 и теоремы 3.

В формулировках приводимых ниже теорем будем считать, что $1 \leqslant m < n$, $\varepsilon_m^{[\nu]} = 1 - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\nu_j}{l_j} - \frac{1}{p} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{l_j}$, $N = \{\nu \geqslant 0\colon\ \varepsilon_m^{[\nu]} > 0,\ \nu_1 = \ldots = \nu_m = 0\}$.

С помощью последовательного применения $n - m$ раз теоремы 5 (теоремы 6) доказываются следующие две теоремы.

Теорема 7. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_i > l_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\varepsilon_m^{[\nu]} > 0$, $\varphi_\nu \in b_p^{r^{[\nu]}(\tilde\sigma)}(E^m)$, $r^{[\nu]} = (r_1^{[\nu]}, \ldots, r_m^{[\nu]})$, $r_j^{[\nu]} = l_j \varepsilon_m^{[\nu]}$ $(\nu \in N,\ j = 1, \ldots, m)$, $\tilde\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$. *Тогда существует функция* $F \in b_p^{l(\sigma)}(E^n)$ *такая, что* $D^\nu F|_{E^m} = \varphi_\nu$ *и*

$$\|F\|_{b_p^{l(\sigma)}(E^n)} \leqslant \sum_{\nu \in N} \|\varphi_\nu\|_{b_p^{r^{[\nu]}(\tilde\sigma)}(E^m)}.$$

Теорема 8. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $l_i > 0$ *целые* $(i = 1, \ldots, n)$, $\varepsilon_m^{[\nu]} > 0$, $\varphi_\nu \in b_p^{r^{[\nu]}(\tilde l)}(E^m)$,

$$r^{[\nu]} = (r_1^{[\nu]}, \ldots, r_m^{[\nu]}),\ r_j^{[\nu]} = l_j \varepsilon_m^{[\nu]} \qquad (\nu \in N,\ j = 1, \ldots, m),$$
$$\tilde l = (l_1, \ldots, l_m).$$

Тогда существует функция $F \in L_p^l(E^n)$ *такая, что* $D^\nu F|_{E^m} = \varphi_\nu$ *и*

$$\|F\|_{L_p^l(E^n)} \leqslant \sum_{\nu \in N} \|\varphi_\nu\|_{b_p^{r^{[\nu]}(\tilde l)}(E^m)}.$$

Теорема 9. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_i > l_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\varepsilon_m^{[\nu]} > 0$, $\varphi_\nu \in b_p^{r^{[\nu]}(\sigma^{[\nu]})}(E^m)$, $r^{[\nu]} = (r_1^{[\nu]}, \ldots, r_m^{[\nu]})$, $\sigma^{[\nu]} = (\sigma_1^{[\nu]}, \ldots, \sigma_m^{[\nu]})$, $\sigma_j^{[\nu]} > r_j^{[\nu]} = l_j \varepsilon_m^{[\nu]}$ $(\nu \in N,\ j = 1, \ldots, m)$, $P_{\sigma^{[\nu]}-1} = P_{\sigma^{[\nu]}-1}(x^{(m)}; \varphi_\nu)$ — *многочлены из* (11), (12) *и* (14),

$$P(x) = \sum_{\nu \in N} \frac{x^\nu}{\nu!} P_{\sigma^{[\nu]}-1}(x^{(m)}; \varphi_\nu). \tag{74}$$

Тогда существует функция $F \in b_p^{l(\sigma)}(E^n)$ *такая, что* $D^\nu F|_{E^m} = \varphi_\nu$ *и*

$$\|F - P\|_{b_p^{l(\sigma)}(E^n)} \leqslant \sum_{\nu \in N} \|\varphi_\nu\|_{b_p^{r^{[\nu]}(\sigma^{[\nu]})}(E^m)}. \tag{75}$$

Доказательство. В силу теоремы 2 для функций $\varphi_\nu \in b_p^{r^{[\nu]}(\sigma^{[\nu]})}(E^m)$ справедливы неравенства

$$\|\varphi_\nu - P_{\sigma^{[\nu]}-1}\|_{b_p^{r^{[\nu]}(\tilde\sigma)}(E^m)} \leqslant \|\varphi_\nu\|_{b_p^{r^{[\nu]}(\sigma^{[\nu]})}(E^m)}, \qquad \tilde\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m). \tag{76}$$

Далее, на основании теоремы 7 существует функция $\tilde F \in b_p^{l(\sigma)}(E^n)$ такая, что $D^\nu \tilde F|_{E^m} = \varphi_\nu - P_{\sigma^{[\nu]}-1}$ и

$$\|\tilde F\|_{b_p^{l(\sigma)}(E^n)} \leqslant \sum_{\nu \in N} \|\varphi_\nu - P_{\sigma^{[\nu]}-1}\|_{b_p^{r^{[\nu]}(\tilde\sigma)}(E^m)}. \tag{77}$$

Полагая $F(x) = \tilde F(x) + P(x)$ и замечая, что $D^\nu F|_{E^m} = \varphi_\nu$, с помощью неравенств (76) — (77) получим требуемую оценку (75).

Теорема 10. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $l_i > 0$ *целые* $(i = 1, \ldots, n)$, $\varepsilon_m^{[\nu]} > 0$, $\varphi_\nu \in b_p^{r^{[\nu]}(\sigma^{[\nu]})}(E^m)$, $r^{[\nu]} = (r_1^{[\nu]}, \ldots, r_m^{[\nu]})$, $\sigma^{[\nu]} = (\sigma_1^{[\nu]}, \ldots, \sigma_m^{[\nu]})$, $\sigma_j^{[\nu]} > r_j^{[\nu]} = l_j \varepsilon_m^{[\nu]}$ $(\nu \in N,\ j = 1, \ldots, m)$, $P(x)$ — *многочлен* (74). *Тогда существует функция* $F \in L_p^l(E^n)$ *такая, что* $D^\nu F|_{E^m} = \varphi_\nu$ *и*

$$\|F - P\|_{L_p^l(E^n)} \leqslant \sum_{\nu \in N} \|\varphi_\nu\|_{b_p^{r^{[\nu]}(\sigma^{[\nu]})}(E^m)}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 9. Вместо теоремы 7 надо воспользоваться теоремой 8.

Доказательство вышеприведенных теорем вложения для пространств $L_p^l(E^n)$ при $1 < p < \infty$ и $b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$ при $1 < \rho$, $\theta < \infty$ можно провести другим способом. Этот способ базируется на известных теоремах вложения для пространств $W_p^l(E^n)$, $B_{p,\theta}^l(E^n)$ и следующих теоремах.

Теорема (О. В. Бесов [1]). *Пусть* $f \in L_p^l(E^n)$, $1 < p < \infty$, $P_{l-1}(x; f)$ — *многочлен из* (16) — (18) *и* $f^*(x) = f(x) - P_{l-1}(x; f)$. *Тогда существует последовательность* $\varphi_k \in C_0^\infty(E^n)$ *такая, что для любого* $R > 0$ *при* $k \to \infty$

$$\| \varphi_k - f^* \|_{L_p(|x|<R)} + \| \varphi_k - f^* \|_{L_p^l(E^n)} \to 0.$$

Теорема 11. *Пусть* $f \in b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$, $1 < p$, $\theta < \infty$, $P_{\sigma-1}(x; f)$ — *многочлен из* (11), (12), (14) *и* $f^*(x) = f(x) - P_{\sigma-1}(x; f)$. *Тогда существует последовательность* $\varphi_k \in C_0^\infty(E^n)$ *такая, что для любого* $R > 0$ *при* $k \to \infty$

$$\| \varphi_k - f^* \|_{L_p(|x|<R)} + \| \varphi_k - f^* \|_{b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)} \to 0. \tag{78}$$

Случай $p = \theta$ этой теоремы содержится в аналогичной теореме для весового пространства $b_{p,\alpha}^{l(\sigma)}(E^n)$ [6]. Доказательство в общем случае проводится по тому же плану, что и при $p = \theta$. Поэтому не проводя его целиком, остановимся лишь на доказательстве одной вспомогательной леммы, так как в доказательстве ее частного случая при $p = \theta$ в работе [6] имеется ошибка.

Лемма 11. *Всякий одночлен* x^α *аппроксимируется функциями* $C_0^\infty(E^n)$ *с любой точностью в норме*

$$\| f \|_{L_p(|x|<R)} + \| f \|_{b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)}, \qquad R > 0, \tag{79}$$

если выполняется одно из условий: a) $(\alpha, \varkappa) \leqslant 1 - |\varkappa|/p$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 < \theta \leqslant \infty$; b) $(\alpha, \varkappa) < 1 - |\varkappa|/p$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$.

Доказательство. Пусть $r = \sqrt[m]{x_1^{ml_1} + \ldots + x_n^{ml_n}}$, $m > \max\limits_i \frac{\sigma_i}{l_i}$, m четное, и $\psi(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция переменного $t \in E^1$, причем $\psi(t) = 1$, $t < 1/2$, $\psi(t) = 0$, $t > 1$.

Покажем, что при $\eta \to +\infty$ норма (79) разности

$$g_\eta(x) = x^\alpha - x^\alpha \psi\left(\frac{\ln r}{\ln \eta}\right)$$

стремится к нулю. Этим лемма будет доказана.

Заметим, что в условиях леммы $l_i > \alpha_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ и для достаточно больших η $\| g_\eta \|_{L_p(|x|<R)} = 0$. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что при $\eta \to +\infty$

$$\| t^{-\frac{1}{\theta} - l_i + \alpha_i} \Delta_i^{\sigma_i - \alpha_i}(t) D_i^{\alpha_i} g_\eta(x) \|_{L_{p,\theta}(E_+^{n+1})} \to 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{80}$$

Не нарушая общности, можно считать, что $\sigma_i = l_i + \delta_i$, $0 < \delta_i \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n)$. Положим $\varepsilon = 1 - (\alpha, \varkappa) - |\varkappa|/p$. В условиях леммы $\varepsilon \geqslant 0$. Отметим, что

$$\Delta_i^{\sigma_i - \alpha_i}(t) D_i^{\alpha_i} g_\eta(x) = \Delta_i^{\sigma_i - \alpha_i}(t) D_i^{\alpha_i}\left[x^\alpha \psi\left(\frac{\ln r}{\ln \eta}\right)\right].$$

Далее (см. [5, с. 227]), имеем при $\eta > 2$

$$\left| D_i^{\mu_i}\left[x^\alpha \psi\left(\frac{\ln r}{\ln \eta}\right)\right]\right| \leqslant \frac{c\,|x^\alpha|}{r^{\mu_i \varkappa_i} \ln \eta}, \qquad \alpha_i < \mu_i \leqslant \sigma_i. \tag{81}$$

Пользуясь оценкой (30), неравенством (81) и свойствами функции $\psi(t)$, переходя к обобщенным сферическим координатам (см. [5, с. 54]), получим при $\eta \to +\infty$

$$\| t^{-\frac{1}{\theta}-l_i+\alpha_i} \| \Delta_i^{\sigma_i-\alpha_i}(t) D_i^{\alpha_i} g_\eta(x) \|_{L_p(E^n)} \|_{L_\theta(0<t<\eta^{\varkappa_i/2})} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\ln \eta} \left(\int_0^{\eta^{\varkappa_i/2}} \frac{dt}{t^{1-\theta(\sigma_i-l_i)}} \right)^{1/\theta} \left\| \frac{x^\alpha}{r^{\sigma_i \varkappa_i}} \right\|_{L_p(\sqrt{\eta}<r<\eta)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\ln \eta} \eta^{\frac{\varkappa_i(\sigma_i-l_i)}{2}} \left(\int_{\sqrt{\eta}}^{\eta} \frac{dr}{r^{\sigma_i \varkappa_i p-(\alpha, \varkappa)p-|\varkappa|+1}} \right)^{1/p} \leqslant \frac{1}{\eta^{\varepsilon/2} \ln \eta} \to 0. \tag{82}$$

Замечая, что при $\eta > 2$

$$\left| D_i^{\alpha_i} \left[x^\alpha \psi \left(\frac{\ln r}{\ln \eta} \right) \right] \right| \leqslant c \left| \frac{x^\alpha}{x_i^{\alpha_i}} \right|,$$

с помощью перехода к обобщенным сферическим координатам найдем при $\eta \to +\infty$

$$\| t^{-\frac{1}{\theta}-l_i+\alpha_i} \| \Delta_i^{\sigma_i-\alpha_i}(t) D_i^{\alpha_i} g_\eta(x) \|_{L_p(E^n)} \|_{L_\theta(t>\eta^{2\varkappa_i})} \leqslant \frac{1}{\eta^{1-\alpha_i \varkappa_i+\varepsilon}} \to 0. \tag{83}$$

Докажем теперь, что при $\eta \to +\infty$

$$\| t^{-\frac{1}{\theta}-l_i+\alpha_i} \| \Delta_i^{\sigma_i-\alpha_i}(t) D_i^{\alpha_i} g_\eta(x) \|_{L_p(E^n)} \|_{L_\theta(\eta^{\varkappa_i/2}<t<\eta^{2\varkappa_i})} \to 0.$$

Полагая $E_i^{n-1} = \{\bar{x} : \bar{x} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\}$, выражая конечную разность порядка $\sigma_i - \alpha_i$ от функции $D_i^{\alpha_i}[x^\alpha \psi(\ln r / \ln \eta)]$ через интеграл от производной порядка σ_i функции $x^\alpha \psi(\ln r / \ln \eta)$ и пользуясь неравенством (81), делая замену переменной $\zeta_j = t u_j$ $(j = 1, \ldots, \sigma_i - \alpha_i)$ и применяя обобщенное неравенство Минковского, последовательно оценивая интегралы по $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, сходящиеся в условиях леммы, и делая замену переменной $x_i = t(u_1 + \ldots + u_{\sigma_i-\alpha_i}) y_i$, замечая, что интеграл по $u_1, \ldots, u_{\sigma_i-\alpha_i}$ и интеграл по y_i сходятся в условиях леммы, получим при $\eta \to +\infty$

$$J(\eta) = \| t^{-\frac{1}{\theta}-l_i+\alpha_i} \| \Delta_i^{\sigma_i-\alpha_i}(t) D_i^{\alpha_i} g_\eta(x) \|_{L_p(x_i>0)} \|_{L_\theta(\eta^{\varkappa_i/2}<t<\eta^{2\varkappa_i})} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\ln \eta} \left\{ \int_{\eta^{\varkappa_i/2}}^{\eta^{2\varkappa_i}} \frac{dt}{t^{1+\theta(l_i-\alpha_i)}} \left[\int_0^\infty \int_{E_i^{n-1}} \left(\int_0^t \cdots \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \cdots \int_0^t \frac{|x_1^{\alpha_1} \ldots (x_i + \zeta_1 + \ldots + \zeta_{\sigma_i-\alpha_i})^{\alpha_i} \ldots x_n^{\alpha_n}| d\zeta_1 \ldots d\zeta_{\sigma_i-\alpha_i}}{\left(\sqrt[m]{x_1^{ml_1} + \ldots + (x_i + \zeta_1 + \ldots + \zeta_{\sigma_i-\alpha_i})^{ml_i} + \ldots + x_n^{ml_n}}\right)^{\sigma_i \varkappa_i}} \right)^p d\bar{x}\, dx_i \right]^{\frac{\theta}{p}} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\ln \eta} \left\{ \int_{\eta^{\varkappa_i/2}}^{\eta^{2\varkappa_i}} \frac{dt}{t^{1+\theta(l_i-\sigma_i)}} \left[\int_0^1 \cdots \int_0^1 du_1 \ldots du_{\sigma_i-\alpha_i} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\int_0^\infty \int_{E_i^{n-1}} \frac{|x_1^{\alpha_1} \ldots (x_i + t(u_1 + \ldots + u_{\sigma_i-\alpha_i}))^{\alpha_i} \ldots x_n^{\alpha_n}|^p \, d\bar{x}\, dx_i}{(|x_1|^{l_1} + \ldots + |x_i + t(u_1 + \ldots + u_{\sigma_i-\alpha_i})|^{l_i} + \ldots + |x_n|^{l_n})^{\sigma_i \varkappa_i p}} \right)^{\frac{1}{p}} \right]^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\ln \eta} \left\{ \int\limits_{\eta^{\varkappa_i/2}}^{\eta^{2\varkappa_i}} \frac{dt}{t^{1+\theta\varepsilon/\varkappa_i}} \left[\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \frac{du_1 \ldots du_{\sigma_i-\alpha_i}}{(u_1 + \ldots + u_{\sigma_i-\alpha_i})^{\delta_i+\varepsilon/\varkappa_i}} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\int\limits_0^\infty \frac{dy_i}{(1+y_i)^{1+\delta_i p+\varepsilon p/\varkappa_i}} \right)^{\frac{1}{p}} \right]^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant \frac{1}{\eta^{\varepsilon/2} (\ln \eta)^{1/\theta'}} \to 0. \tag{84}$$

Положим $A = \sigma_i - \alpha_i$. С помощью замены переменной и с учетом (84) получаем, что при $\eta \to +\infty$

$$\| t^{-\frac{1}{\theta} - l_i + \alpha_i} \| \Delta_i^{\sigma_i-\alpha_i}(t) D_i^{\alpha_i} g_\eta(x) \|_{L_p(-\infty < x_i < -At)} \|_{L_\theta(\eta^{\varkappa_i/2} < t < \eta^{2\varkappa_i})} = J(\eta) \to 0. \tag{85}$$

При оценке выражения

$$\mathcal{J}(\eta) = \| t^{-\frac{1}{\theta} - l_i + \alpha_i} \| \Delta_i^{\sigma_i-\alpha_i}(t) D_i^{\alpha_i} g_\eta(x) \|_{L_p(-At < x_i < 0)} \|_{L_\theta(\eta^{\varkappa_i/2} < t < \eta^{2\varkappa_i})}$$

при $\alpha_i \geqslant 1$ рассмотрим два случая.

I. Пусть

$$\alpha_i = \begin{cases} \sigma_i - 1, & 0 < \delta_i < 1, \\ \sigma_i - 2, & \delta_i = 1. \end{cases}$$

Положим $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$. С помощью неравенства Минковского и замены переменной получим

$$\mathcal{J}(\eta) \leqslant \sum_{s=0}^{\alpha_i-1} \left\{ \int\limits_{\eta^{\varkappa_i/2}}^{\eta^{2\varkappa_i}} \frac{dt}{t^{1+\theta(l_i-\alpha_i)}} \left[\int\limits_{-At}^{At} \int\limits_{E_i^{n-1}} \left| \bar{x}^{\bar{\alpha}} x_i^{\alpha_i-s} D_i^{\alpha_i-s} \psi\left(\frac{\ln r}{\ln \eta}\right) \right|^p d\bar{x}\, dx_i \right]^{\frac{\theta}{p}} \right\}^{\frac{1}{\theta}} +$$

$$+ \left\{ \int\limits_{\eta^{\varkappa_i/2}}^{\eta^{2\varkappa_i}} \frac{dt}{t^{1+\theta(l_i-\alpha_i)}} \left[\int\limits_{-At}^{0} \int\limits_{E_i^{n-1}} \left| \bar{x}^{\bar{\alpha}} \Delta_i^{\sigma_i-\alpha_i}(t) \psi\left(\frac{\ln r}{\ln \eta}\right) \right|^p d\bar{x}\, dx_i \right]^{\frac{\theta}{p}} \right\}^{\frac{1}{\theta}} = \sum_{s=0}^{\alpha_i-1} J_s(\eta) + J_{\alpha_i}(\eta). \tag{86}$$

Пользуясь неравенством

$$\left| x_i^{\alpha_i-s} D_i^{\alpha_i-s} \psi\left(\frac{\ln r}{\ln \eta}\right) \right| \leqslant \frac{c\, |x_i^{\alpha_i}|}{r^{\alpha_i \varkappa_i} \ln \eta}, \qquad s = 0, 1, \ldots, \alpha_i - 1,$$

делая последовательно замену переменной $t = \tau^{\varkappa_i}$ и $x_j = \tau^{\varkappa_j} y_j$ ($j = 1, \ldots, n$), замечая, что полученный интеграл по $\bar{y}$, y_i в рассматриваемых предположениях сходится, имеем при $\eta \to +\infty$

$$J_s(\eta) \leqslant \frac{1}{\ln \eta} \left\{ \int\limits_{\eta^{\varkappa_i/2}}^{\eta^{2\varkappa_i}} \frac{dt}{t^{1+\theta(l_i-\alpha_i)}} \left[\int\limits_{-At}^{At} \int\limits_{E_i^{n-1}} \left| \frac{x^\alpha}{r^{\alpha_i \varkappa_i}} \right|^p d\bar{x}\, dx_i \right]^{\frac{\theta}{p}} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\ln \eta} \left\{ \int\limits_{\eta^{1/2}}^{\eta^2} \frac{d\tau}{\tau^{1+\theta\varepsilon}} \left[\int\limits_{-A}^{A} \int\limits_{E_i^{n-1}} \left| \frac{y^\alpha}{r^{\alpha_i \varkappa_i}} \right|^p d\bar{y}\, dy_i \right]^{\frac{\theta}{p}} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant \frac{1}{\eta^{\varepsilon/2} (\ln \eta)^{1/\theta'}} \to 0. \tag{87}$$

Применяя формулу Лагранжа, выполняя последовательно замену переменной $t = \tau^{\varkappa_i}$ и $x_j = \tau^{\varkappa_j} y_j$ ($j = 1, \ldots, n$), замечая, что полученный интеграл по $\bar{y}$, y_i в рассматриваемых предположениях сходится, находим при $\eta \to +\infty$

$$J_{\alpha_i}(\eta) \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int\limits_{\eta^{\varkappa_i/2}}^{\eta^{2\varkappa_i}} \frac{dt}{t^{1+\theta(l_i-\alpha_i)}} \left[\int\limits_{-At}^{At} \int\limits_{E_i^{n-1}} \left| \bar{x}^{\bar{\alpha}} \left[\psi\left(\frac{\ln \sqrt[m]{x_1^{ml_1} + \ldots + (x_i+t)^{ml_i} + \ldots + x_n^{ml_n}}}{\ln \eta} \right) - \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. - \psi\left(\frac{\ln r}{\ln \eta}\right)\right]\right|^p d\bar{x}\, dx_i \right]^{\frac{\theta}{p}} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant \frac{1}{\ln \eta} \left\{ \int\limits_{\eta^{\varkappa_i/2}}^{\eta^{2\varkappa_i}} \frac{dt}{t^{1+\theta(l_i-\alpha_i)}} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\int\limits_{-At}^{At} \int\limits_{E_i^{n-1}} \left| \bar{x}^{\bar{\alpha}} \ln \frac{x_1^{ml_1} + \ldots + (x_i+t)^{ml_i} + \ldots + x_n^{ml_n}}{x_1^{ml_1} + \ldots + x_n^{ml_n}} \right|^p d\bar{x}\, dx_i \right]^{\frac{\theta}{p}} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\ln \eta} \left\{ \int\limits_{\eta^{1/2}}^{\eta^2} \frac{d\tau}{\tau^{1+\theta\varepsilon}} \left[\int\limits_{-A}^{A} \int\limits_{E_i^{n-1}} \left| \bar{y}^{\bar{\alpha}} \ln\left(1 + \frac{(1+y_i)^{ml_i} - y_i^{ml_i}}{r^m}\right) \right|^p d\bar{y}\, dy_i \right]^{\frac{\theta}{p}} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\eta^{\varepsilon/2} (\ln \eta)^{1/\theta'}} \to 0. \tag{88}$$

II. Пусть

$$\alpha_i < \begin{cases} \sigma_i - 1, & 0 < \delta_i < 1, \\ \sigma_i - 2, & \delta_i = 1. \end{cases}$$

Положим $\tilde{s} = 1$, если $0 < \delta_i < 1$, и $\tilde{s} = 2$, если $\delta_i = 1$. Имеем

$$\mathcal{J}(\eta) \leqslant \left\{ \int\limits_{\eta^{\varkappa_i/2}}^{\eta^{2\varkappa_i}} \frac{dt}{t^{1+\theta(l_i-\alpha_i)}} \left[\int\limits_{-At}^{At} \int\limits_{E_i^{n-1}} \left| \Delta_i^{\sigma_i-\alpha_i-\tilde{s}}(t)\, D_i^{\alpha_i} \left[x^{\alpha} \psi\left(\frac{\ln r}{\ln \eta}\right)\right]\right|^p d\bar{x}\, dx_i \right]^{\frac{\theta}{p}} \right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Замечая, что $\sigma_i - \tilde{s} > \alpha_i$, и поступая, как и при оценке (84), вводя обозначение $\zeta = u_1 + \ldots + u_{\mu_i}$, $\mu_i = \sigma_i - \alpha_i - \tilde{s}$, получим при $\eta \to +\infty$

$$\mathcal{J}(\eta) \leqslant \frac{1}{\eta^{\varepsilon/2} \ln \eta} \left\{ \int\limits_{\eta^{\varkappa_i/2}}^{\eta^{2\varkappa_i}} \frac{dt}{t} \left[\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \frac{du_1 \ldots du_{\mu_i}}{(u_1 + \ldots + u_{\mu_i})^{\delta_i - \tilde{s}}} \left(\int\limits_{-A/\zeta}^{A/\zeta} \frac{dy_i}{|1+y_i|^{1+p(\delta_i-\tilde{s})}} \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\eta^{\varepsilon/2} (\ln \eta)^{1/\theta'}} \to 0. \tag{89}$$

Из (86) — (89) следует, что при $\alpha_i \geqslant 1$

$$\mathcal{J}(\eta) \to 0, \quad \eta \to +\infty. \tag{90}$$

Доказательство (90) при $\alpha_i = 0$ аналогично доказательству оценки (88). В силу (82), (83), (84), (85) и (90) получаем (80). Лемма доказана.

Приведем лишь доказательства теоремы 2 при $1 < p$, $\theta < \infty$ и теоремы 9 при $1 < p < \infty$, так как остальные приводимые выше теоремы при указанных дополнительных ограничениях на p и θ доказываются аналогично.

Доказательство теоремы 2 при $1 < p$, $\theta < \infty$. Пусть $f \in b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)$ и $P_{\sigma-1}(x; f)$ — многочлен из (11), (12), (14). Введем в рассмотрение функцию $f^*(x) = f(x) - P_{\sigma-1}(x; f)$. Для функции f^* в силу теоремы 11 существует последовательность $\varphi_k \in C_0^{\infty}(E^n)$ такая, что имеет место (78). Так как $\varphi_k \in B_{p,\theta}^l(E^n)$, то в условиях теоремы (см. [4]) имеем

$$\| D^{\nu} \varphi_k \|_{b_{q,\tilde{\theta}}^{r(\tilde{\sigma})}(E^m)} \leqslant \| \varphi_k \|_{b_{p,\theta}^{l(\sigma)}(E^n)}. \tag{91}$$

Функция f^* локально на E^n принадлежит пространству $B^l_{p,\theta}$. Отсюда, принимая во внимание (78), заключаем, что в условиях теоремы существует след $D^\nu f^* |_{E^m}$ и для любого $R > 0$ при $k \to \infty$

$$\| D^\nu (\varphi_k - f^*) \|_{b^{r(\tilde\sigma)}_{q,\tilde\theta}(|x^{(m)}|<R)} \leqslant \| \varphi_k - f^* \|_{L_p(|x|<2R)} + \| \varphi_k - f^* \|_{b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)} \to 0. \tag{92}$$

С помощью предельного перехода при $k \to \infty$ в неравенстве (91) в силу (78) и (92) получаем

$$\| D^\nu f^* \|_{b^{r(\tilde\sigma)}_{q,\tilde\theta}(E^m)} \leqslant \| f^* \|_{b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)}.$$

Заменяя в последнем неравенстве функцию f^* на $f - P_{\sigma-1}$, получим

$$\| D^\nu (f - P_{\sigma-1}) \|_{b^{r(\tilde\sigma)}_{q,\tilde\theta}(E^m)} \leqslant \| f \|_{b^{l(\sigma)}_{p,\theta}(E^n)},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 9 при $1 < p < \infty$. Пусть $\varphi_\nu \in b_p^{r[\nu](\sigma[\nu])}(E^m)$ и $P_{\sigma[\nu]-1}(x^{(m)}; \varphi_\nu)$ — многочлены из (11), (12), (14), $\nu \in N$. Введем в рассмотрение функции $\varphi^*_\nu(x^{(m)}) = \varphi_\nu(x^{(m)}) - P_{\sigma[\nu]-1}(x^{(m)}; \varphi_\nu)$. Для функций φ^*_ν в силу теоремы 11 существуют последовательности $\varphi_{k,\nu} \in C_0^\infty(E^m)$ такие, что для любого $R > 0$ при $k \to \infty$

$$\| \varphi_{k,\nu} - \varphi^*_\nu \|_{L_p(|x^{(m)}|<R)} + \| \varphi_{k,\nu} - \varphi^*_\nu \|_{b_p^{r[\nu](\sigma[\nu])}(E^m)} \to 0. \tag{93}$$

Так как $\varphi_{k,\nu} \in B_p^{r[\nu]}(E^m)$, то в условиях теоремы (см. [4, 7]) существуют функции $F_k(x)$ такие, что $D^\nu F_k |_{E^m} = \varphi_{k,\nu}$ и

$$\| F_k \|_{b_p^{l(\sigma)}(E^n)} \leqslant \sum_{\nu \in N} \| \varphi_{k,\nu} \|_{b_p^{r[\nu](\sigma[\nu])}(E^m)}. \tag{94}$$

Функции φ^*_ν локально на E^m принадлежат соответственно пространствам $B_p^{r[\nu]}$. Поэтому, принимая во внимание (93), заключаем, что в условиях теоремы существует функция F^* такая, что $D^\nu F^* |_{E^m} = \varphi^*_\nu$ и для любого $R > 0$ при $k \to \infty$

$$\| F_k - F^* \|_{b_p^{l(\sigma)}(|x|<R)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu \in N} \left(\| \varphi_{k,\nu} - \varphi^*_\nu \|_{L_p(|x^{(m)}|<2R)} + \| \varphi_{k,\nu} - \varphi^*_\nu \|_{b_p^{r[\nu](\sigma[\nu])}(E^m)} \right) \to 0. \tag{95}$$

С помощью предельного перехода при $k \to \infty$ в неравенстве (94) в силу (93) и (95) получаем, что $D^\nu F^* |_{E^m} = \varphi^*_\nu$ и

$$\| F^* \|_{b_p^{l(\sigma)}(E^n)} \leqslant \sum_{\nu \in N} \| \varphi^*_\nu \|_{b_p^{r[\nu](\sigma[\nu])}(E^m)}.$$

Заменяя в последнем неравенстве функции φ^*_ν на $\varphi_\nu - P_{\sigma[\nu]-1}$ и полагая

$$F(x) = F^*(x) + P(x), \qquad P(x) = \sum_{\nu \in N} \frac{x^\nu}{\nu!} P_{\sigma[\nu]-1}(x^{(m)}; \varphi_\nu),$$

получим, что $D^\nu F|_{E^m} = \varphi_\nu$ и

$$\|F - P\|_{b_p^{l(\sigma)}(E^n)} \leqslant \sum_{\nu\in N} \|\varphi_\nu\|_{b_p^{r[\nu](\sigma[\nu])}(E^m)},$$

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 4. В установленных выше неравенствах рассматривались функции f, определенные на всем пространстве E^n или E^m. Полученные результаты сохраняются и для тех областей из E^n (или из E^m), для которых возможно распространение функций за пределы области на все пространство с помощью оператора, ограниченного в полунорме из правой части соответствующего неравенства. Классы таких областей выделены в работах [8, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бесов О. В.* Поведение дифференцируемых функций в бесконечности и плоскость финитных функций.— Труды МИАН СССР, 1969, 105, с. 3—14.
2. *Успенский С. В.* О дифференциальных свойствах решений квазиэллиптических уравнений в неограниченных областях.— ДАН СССР, 1968, 181, № 3, с. 562—564.
3. *Ильин В. П.* Интегральные представления дифференцируемых функций и их применение к вопросам продолжения функций классов $W_p^{(l)}(G)$. — Сиб. мат. журн., 1967, 8, № 3, с. 573—586.
4. *Ильин В. П., Солонников В. А.* О некоторых свойствах дифференцируемых функций многих переменных.— Труды МИАН СССР, 1962, 66, с. 205—226.
5. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
6. *Никольский Ю. С.* Поведение на бесконечности функций с заданными в L_p дифференциально-разностными свойствами.— Труды МИАН СССР, 1974, 131, с. 182—198.
7. *Никольский Ю. С.* Теоремы вложения неизотропных весовых пространств дифференцируемых функций.— Труды МИАН СССР, 1976, 140, с. 212—251.
8. *Бесов О. В.* Продолжение функций из L_p^l и W_p^l.— Труды МИАН СССР, 1967, 89, с. 5—17.
9. *Бесов О. В.* О плотности финитных функций в $\mathscr{L}_{p,\theta}^l$ и распространение функций.— Труды МИАН СССР, 1967, 89, с. 18—30.