В. С. Конюх, Неприводимые локально нильпотентные линейные группы, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1998, том 4, выпуск 4, 1345–1364

Неприводимые локально нильпотентные линейные группы*

В. С. КОНЮХ
Белорусский государственный университет

Посвящается памяти
Дмитрия Алексеевича Супруненко

УДК 522.186

Ключевые слова: локально нильпотентные линейные группы, неприводимые группы.

Аннотация

Дана полная классификация неприводимых максимальных локально нильпотентных линейных групп над произвольным полем.

Abstract

V. S. Konjuh, Irreducible locally nilpotent linear groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 4 (1998), № 4, p. 1345–1364.

Maximal irreducible locally nilpotent linear groups over an arbitrary field are classified.

В теории локально нильпотентных линейных групп оставался открытым вопрос о строении неприводимых групп над произвольным полем. Решению этой задачи посвящена настоящая работа.

Изучение локально нильпотентных линейных групп было предпринято в начале 50-х годов Д. А. Супруненко [2–5]. В работах [2–7] получена полная классификация максимальных локально нильпотентных подгрупп группы $GL(n, P)$ в случаях, когда поле P алгебраически замкнуто, конечно или является полем действительных чисел. Изучение неприводимых локально нильпотентных линейных групп во всех перечисленных выше случаях проводилось по единой схеме. Вначале устанавливалась мономиальность таких групп. Затем задача сводилась к описанию нильпотентных подгрупп симметрической группы.

Локально нильпотентные линейные группы над произвольным полем изучались в работах [2, 8–11, 15]. В [9, 15] рассматривались неразложимые локально нильпотентные линейные группы. Для совершенного поля изучение таких подгрупп сведено к абсолютно неприводимому случаю. В [8]

*Редакционная коллегия выражает благодарность Р. Т. Вольвачеву, взявшему на себя труд по окончательной подготовке этой статьи к публикации.

Фундаментальная и прикладная математика 1998, том 4, № 4, с. 1345–1364.

установлено, что в $GL(n,P)$ тогда и только тогда существуют абсолютно неприводимые локально нильпотентные линейные группы, когда для любого простого делителя q числа n в мультипликативной группе P^* поля P есть элемент порядка q. Изучение таких подгрупп сведено к случаю, когда $n = q^\alpha$, q — простое число. В свою очередь, последняя задача сведена к классификации абсолютно неприводимых q-подгрупп Силова проективной линейной группы $PGL(q^\alpha, P)$. (Когда мы говорим, что подгруппа G/P^* группы $GL(n,P)/P^*$ абсолютно неприводима, примитивна и т. д., то имеем в виду, что этим свойством обладает подгруппа G группы $GL(n,P)$.) Так что, по существу, основное содержание этой работы составляет классификация абсолютно неприводимых q-подгрупп Силова группы $PGL(q^\alpha, P)$.

В данной работе изучение максимальных неприводимых локально нильпотентных подгрупп проводится по следующей схеме. На первом этапе задача сводится к примитивному случаю. Существенным отличием от алгебраически замкнутого поля здесь является то, что на системах импримитивности может индуцироваться любая нильпотентная транзитивная группа подстановок. Изучение примитивных групп, не обязательно максимальных, проводится с помощью инвариантного ряда $G \supset V \supset K \supset E_n$, где K — коммутант G, V — централизатор K в G. В конечном итоге задача сводится к классификации двухступенно нильпотентных примитивных линейных групп. Приводится полное решение последней задачи.

Отметим, что существование в $GL(n,P)$ примитивных нильпотентных линейных групп определяется наличием в фактор-группах $P^*/(P^*)^{p_i}$ (p_i — простой делитель числа n) подгрупп специального вида, а число классов сопряженных подгрупп существенно зависит от индекса $P^* : (P^*)^{p_i}$. В частности, если хотя бы для одного из чисел p_i этот индекс бесконечен, то и множество максимальных локально нильпотентных подгрупп группы $GL(n,P)$ также разбивается на бесконечное число классов несопряженных подгрупп.

В отношении терминологии мы придерживаемся книги [1]. Элементы подгруппы P^*E_n группы $GL(n,P)$ мы будем, как правило, отождествлять с соответствующими элементами поля P. Пусть p — простое число, а P — поле, в котором есть элемент порядка p. Следуя [13], мы будем говорить, что пара $\langle P,p\rangle$ удовлетворяет условиям (I), если $p > 2$ или же $p = 2$ и в P^* есть элемент порядка 4, (II), если $p = 2$, в P^* нет элемента четвертого порядка, а мультипликативная группа поля $P(i)$, $i^2 = -1$, содержит группу типа 2^∞.

Пусть $p = 2$, в P^* нет элемента порядка 4 и существует такое число α, что в $(P(i))^*$, $i^2 = -1$, есть элемент ε порядка 2^α, но нет элемента порядка $2^{\alpha+1}$. Если τ — нетривиальный автоморфизм поля $P(i)$, то $\tau(\varepsilon)\cdot\varepsilon \in P$, $(\tau(\varepsilon)\varepsilon)^{2^\alpha} = 1$. Следовательно, $\tau(\varepsilon)\varepsilon = \pm 1$. Поэтому мы будем говорить, что в рассматриваемом случае пара $\langle P,p\rangle$ удовлетворяет условию (III), если $\tau(\varepsilon) = -\varepsilon^{-1}$, и условию (IV), если $\tau(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}$.

Замечание 1. Если пара $\langle P, p\rangle$ удовлетворяет условию (IV), то $\operatorname{char} P = 0$ (доказательство замечания см. в [13], с. 1033).

1. Некоторые известные результаты. Предварительные леммы

Для удобства читателей приведем несколько известных результатов, которые будут часто использоваться в дальнейшем.

В силу теоремы 28.4 из [1] при изучении максимальных неприводимых локально нильпотентных линейных групп достаточно ограничиться абсолютно неприводимым случаем.

Предложение 1 (Д. А. Супруненко, [1]). *Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа n, $G \supset P^*$ — абсолютно неприводимая локально нильпотентная подгруппа группы $GL(n, P)$. Тогда $G = G_1 \dot{\times} \dots \dot{\times} G_k$, где G_j — абсолютно неприводимая локально нильпотентная подгруппа группы $GL(p_j^{\alpha_j}, P)$, $j = 1, \dots, k$, $\dot{\times}$ — знак кронекеровского произведения. Группа G тогда и только тогда максимальна среди локально нильпотентных подгрупп группы $GL(n, P)$, когда группа G_j максимальна среди локально нильпотентных подгрупп группы $GL(p_j^{\alpha_j}, P)$, $j = 1, \dots, k$.*

Предложение 2 (Д. А. Супруненко, [8]).

(i) *Пусть G — максимальная абсолютно неприводимая локально нильпотентная подгруппа группы $GL(p^\alpha, P)$. Тогда G/P^* — p-подгруппа Силова группы $PGL(p^\alpha, P)$.*

(ii) *Пусть G/P^* — p-подгруппа Силова группы $PGL(p^\alpha, P)$, причем G — абсолютно неприводимая группа. Тогда G — максимальная локально нильпотентная подгруппа группы $GL(p^\alpha, P)$.*

Предложения 1 и 2 сводят задачу классификации максимальных локально нильпотентных линейных подгрупп группы $GL(n, P)$ к задаче классификации абсолютно неприводимых силовских подгрупп группы $PGL(p^\alpha, P)$.

Предложение 3 (Д. А. Супруненко, [1]). *Пусть V — максимальная неприводимая двухступенно нильпотентная подгруппа группы $GL(n, P)$, Σ^* — центр V. Тогда*

1) *Σ^* — мультипликативная группа некоторого расширения Σ поля P, степень $m = \Sigma : P$ делит число n, а $\operatorname{char} P$ не делит число $r = nm^{-1}$;*

2) *$V = (u_1)(v_1) \dots (u_t)(v_t)\Sigma^*$, где $(u_i, v_i) = \varepsilon_i$ — элемент группы Σ^* порядка $\nu_i, \nu_{i+1}/\nu_i, \nu_1 \dots \nu_t = r$,*

$$i \neq j \to (u_i, u_j) = (u_i, v_j) = (v_i, v_j) = 1;$$

3) *$V : \Sigma^* = \langle V\rangle_\Sigma : \Sigma = r^2$.*

Замечание 2. Отметим, что если центр двухступенно нильпотентной подгруппы V группы $GL(n,P)$ является мультипликативной группой некоторого поля Σ, то из абсолютной неприводимости V над Σ следует ее максимальность среди двухступенно нильпотентных подгрупп группы $GL(n,P)$.

Действительно, пусть $V \subseteq V_1$, где V_1 — максимальная двухступенно нильпотентная подгруппа $GL(n,P)$, Σ_1^* — центр V_1. Так как V абсолютно неприводима над Σ, то $\Sigma_1^* \subseteq \Sigma^*$. В силу предложения 3 Σ_1^* — мультипликативная группа некоторого поля Σ_1, степень $\Sigma : \Sigma_1$ равна порядку факторгруппы $\Sigma^* : \Sigma_1^*$. Последнее возможно только в случае, когда $\Sigma = \Sigma_1$, $V = V_1$.

Лемма 1 (критерий примитивности [16]). *Пусть V — максимальная неприводимая двухступенно нильпотентная подгруппа группы $GL(n,P)$, Z — центр V, α — экспонента факторгруппы V/Z. Группа V тогда и только тогда примитивна, когда из условий $a \in V$ и $a^\alpha = 1$ следует, что $a \in Z$.*

Лемма 2. *Пусть пара $\langle P,p\rangle$ удовлетворяет условию* (I), $\Sigma = P(a)$, *где a — корень уравнения $x^{p^r} - \lambda = 0$, $\lambda \in P$. Тогда из условий $b \in \Sigma$ и $b^{p^m} = \beta \in P$ следует, что $b = ca^l$, $c \in P$, l — целое число.*

Доказательство. Пусть n — такое число, что $a^{p^n} = \alpha \in P$, $a^{p^{n-1}} \notin P$. Будем считать также, что $b^{p^{m-1}} \notin P$. Так как в поле P есть первообразный корень степени p из 1, а при $p = 2$ — первообразный корень степени 4 из 1, то $\alpha, \beta \notin (P^*)^p$ и $\alpha, \beta \notin \{-4k^4\}$ при $p = 2$. Поэтому уравнения $x^{p^n} - \alpha = 0$ и $x^{p^m} - \beta = 0$ неприводимы над P (см. [18, с. 252]). Если $n = 1$, то $m \leqslant 1$, и утверждение леммы следует из леммы 2.3 ([17, с. 143]). Дальше доказательство будем проводить индукцией по n. Пусть $n > 1$, $d = a^p$, $\Sigma_p = P(d)$. Тогда $\Sigma : \Sigma_p = p$ и, следовательно, $b = ka^s$, где $k \in \Sigma_p$. Очевидно, для некоторого числа q $k^{p^q} \in P$. По предположению индукции $k = \rho d^r$, $\rho \in P$. Поэтому $b = ka^s = ca^l$, $c \in P$, l — целое число. Лемма доказана.

Лемма 3. *Предположим, что в мультипликативной группе поля P есть элемент η порядка p^l, $l \geqslant 1$, p — простое число, но нет элемента порядка p^{l+1}. Пусть $\Sigma = P(\varepsilon)$, где $\varepsilon^{p^\alpha} = \eta$, $\alpha \geqslant 1$, Γ — p-подгруппа Силова группы Σ^*, Γ_1 — p-подгруппа Силова фактор-группы Σ^*/P^*. Тогда*

1) если пара $\langle P,p\rangle$ не удовлетворяет условию (IV), *то $\Gamma_1 = \Gamma P^*/P^*$. Если же пара $\langle P,p\rangle$ удовлетворяет условию* (IV), *то Γ_1 — группа с двумя образующими: $(\varepsilon_1)P^*$, где ε_1 — образующий элемент силовской 2-подгруппы группы Σ^*, и $(1+\eta_1)P^*$, η_1 — образующий элемент силовской 2-подгруппы группы $(P(i))^*$, $i^2 = -1$;*

2) пусть $\Sigma \neq P(i)$. Группа Галуа $G(\Sigma/P)$ тогда и только тогда циклична, когда пара $\langle P,p\rangle$ не удовлетворяет условию (IV).

Доказательство. Утверждение 1) следует из леммы 2 и из леммы 4-6 [14]. Как известно, группа $G(\Sigma/P)$ либо циклична, либо имеет два образующих элемента τ_1 и τ_2, где $\tau_1(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}$. Очевидно, в последнем случае пара $\langle P,p\rangle$ удовлетворяет условию (IV). Предположим теперь, что $G(\Sigma/P)$ — циклическая группа, причем $\Sigma \neq P(i)$. Пусть τ — образующий элемент группы $G(\Sigma/P)$,

α — такое число, что $\varepsilon^{2^\alpha} = \eta_1 \in P(i)$, а $\varepsilon^{2^{\alpha-1}} \notin P(i)$. Если $\tau(\eta_1) = \eta_1^{-1}$, то $\tau(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}d$, где $d^{2^\alpha} = 1$. Очевидно, $\tau^2(\varepsilon) = \varepsilon\tau(d)d^{-1}$, $|\tau(d)d^{-1}| < 2^\alpha$. С другой стороны, так как τ^2 — образующий элемент группы $G(\Sigma/P(i))$ и $|G(\Sigma/P(i))| = 2^\alpha$, то $\tau^2(\varepsilon) = \varepsilon d_1$, где $|d_1| = 2^\alpha$. Противоречие. Следовательно, $\tau\eta_1 = -\eta_1^{-1}$, пара $\langle P, p\rangle$ удовлетворяет условию (IV). Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть $\Sigma \neq P(i)$. Группа Галуа $G(\Sigma/P)$ тогда и только тогда циклична, когда циклична p-подгруппа Силова факторгруппы Σ^*/P^*.*

Следствие 2. *Если P — поле положительной характеристики, то $G(\Sigma/P)$ — циклическая группа.*

Доказательство. См. замечание 1.

2. Редукция к примитивным группам

Пусть Γ — максимальная абсолютно неприводимая импримитивная локально нильпотентная подгруппа группы $GL(n,P)$, $n = p^t$, $t > 0$, p — простое число. $P^n = Q_1 \dot{+} \ldots \dot{+} Q_\mu$ — разложение пространства P^n на системы импримитивности группы Γ. Пусть, далее, $\psi\colon \Gamma \to S_\mu$ — гомоморфизм группы Γ в симметрическую группу S_μ, определяемый этим разложением. Тогда $\psi(\Gamma)$ — транзитивная p-группа. Так как p-подгруппа Силова группы S_μ является сплетением циклов длины p, то существует разложение пространства P^n на системы импримитивности группы Γ вида

$$P^n = L_1 \dot{+} \ldots \dot{+} L_p. \tag{1}$$

Пусть $\varphi\colon \Gamma \to S_p$ — гомоморфизм, определяемый этим разложением, $G = \ker\varphi|L_1$ — ограничение группы $\ker\varphi$ на подпространство L_1, $S_p(G)$ — силовская p-подгруппа группы G, $u_{11},\ldots,u_{1m}$, $m = p^{t-1}$, — базис подпространства L_1. В качестве базиса пространства P^n возьмем систему векторов

$$u_{11},\ldots,u_{1m},\ldots,u_{p1},\ldots,u_{pm}, \tag{2}$$

где $u_{ki} = a^{k-1}u_{1i}$, $a \in \Gamma$, $a \notin \ker\varphi$, $1 < k \leqslant p$.

Очевидно, в базисе (2) матрица оператора a имеет вид

$$a = h(g) = \begin{bmatrix} 0 & g \\ E_{n-m} & 0 \end{bmatrix}, \quad g \in G. \tag{3}$$

Пусть $b \in \ker\varphi$. Тогда $b = \operatorname{diag}[g_1,\ldots,g_p]$, где $g_i \in G$, $i = 1,\ldots,p$. Так как $\Gamma/P^* - p$ — группа (см. предложение 2), то $b^{p^\alpha} = \lambda \in P$ и, следовательно, $g_i^{p^\alpha} = g_1^{p^\alpha}$, $i = 1,\ldots,p$. Отсюда в силу того, что коммутант группы G — p-группа, следует, что $g_i = g_1 d_i$, $d_i \in S_p(G)$. Пусть H — подгруппа $GL(n,P)$, состоящая из всех матриц вида $\operatorname{diag}[g_1d_1,\ldots,g_1d_p]$, $g_1 \in G$, $d_i \in S_p(G)$, а $\Gamma_1 = \{h(g), H\}$ — группа, порожденная подгруппой H и матрицей $h(g)$. Очевидно, $\Gamma_1/P^* - p$ — группа, причем $\Gamma \subseteq \Gamma_1$. Отсюда и из максимальности группы Γ следует, что $\Gamma = \Gamma_1$, а группа G максимальна среди локально нильпотентных подгрупп группы $GL(n,P)$.

Обозначение. Зафиксируем базис (2) пространства P^n. Пусть G — максимальная абсолютно неприводимая локально нильпотентная подгруппа группы $GL(m,P)$, H — подгруппа $GL(n,P)$, состоящая из всех матриц вида

$$\operatorname{diag}[ad_1,\dots,ad_p],\quad a\in G,\ \ d_i\in S_p(G).$$

Подгруппу группы $GL(n,P)$, порожденную матрицей $h(g)$, $g\in G$, и группой H, будем обозначать $\Gamma(g,G)$. Очевидно, (1) — разложение пространства P^n на системы импримитивности группы $\Gamma(g,G)$. Подгруппу группы G, порожденную группой $S_p(G)$ и всеми элементами вида g^p, $g\in G$, обозначим G^p.

Теорема 1.

(i) *Пусть Γ — максимальная абсолютно неприводимая импримитивная локально нильпотентная подгруппа группы $GL(n,P)$, $n=p^t$. Тогда Γ сопряжена в $GL(n,P)$ с группой $\Gamma(g,G)$.*

(ii) *Группы $\Gamma_1=\Gamma(g_1,G)$ и $\Gamma_2=\Gamma(g_2,G)$ тогда и только тогда сопряжены в $GL(n,P)$, когда $g_1=g_2^ra$, $1\leqslant r<p$, $a\in G^p$.*

(iii) *Группа $\Gamma(g,G)$ почти всегда максимальна среди локально нильпотентных подгрупп группы $GL(n,P)$. Исключение составляют лишь случаи, когда*

1) *$n=2^t$, $g\in G^p$, G — примитивная группа, причем $|S_p(G)|=2$;*

2) *$t>1$, $g\in G^p$, а группа G сопряжена с группой $\Gamma(g_1,G_1)$, $g_1\notin G^p$.*

Доказательство. Утверждение (i) было доказано выше.

(ii) Пусть $g_1=g_2^ra^pd$, $1\leqslant r<p$, $a\in G$, $d\in S_p(G)$. Так как $\Gamma(g_1,G)=\Gamma(g_1d^{-1},G)$, то мы можем считать, что $d=E_m$. Положим $c=h^r(g_2)(a\dot\times E_p)$. Пусть b — матрица перехода от базиса (2) к базису

$$u_{11},\dots,u_{1m},cu_{11},\dots,cu_{1m},\dots,c^{p-1}u_{1m}.$$

Непосредственно проверяется, что $b^{-1}\Gamma_2b=\Gamma_1$. Обратно. Пусть $b\Gamma_1b^{-1}=\Gamma_2$, H — подгруппа Γ_i, $i=1,2$, порожденная всеми матрицами вида

$$\operatorname{diag}[ud_1,\dots,ud_p],\quad u\in G, d_i\in S_p(G).$$

Если $g_1,g_2\in G^p$, то наше утверждение доказано. Пусть $g_1\notin G^p$. Тогда $bh(g_1)b^{-1}=h^r(g_2)h$, $h\in H$, $0\leqslant r<p$. Так как Γ_i/P^*p — группа, то для некоторого числа α $[b(g_1\dot\times E_p)b^{-1}]^{p^\alpha}=(g_1\dot\times E_p)^{p^\alpha}$. Отсюда в силу того, что коммутант группы Γ_i является p-группой, получаем

$$g_1\dot\times E_p=(g_2^r\dot\times E_p)h^pd_1,\quad d_1\in S_p(H).$$

Поэтому $g_1=g_2^ra^pd$, где $d\in S_p(G)$, $a\in G$. Так как $g_1\notin G^p$, то $r\geqslant 1$.

(iii) Пусть K — коммутант группы $\Gamma(g,G)$. Так как группа P^* содержит элемент порядка p, то $|S_p(H)|=|S_p(G)|^p\geqslant p^p$ и прямые вычисления показывают, что в случаях, когда $p>2$; $p=2$, а G — импримитивная группа; $p=2$, G — примитивная группа, причем $|S_p(G)|>2$, среди неприводимых частей группы K есть неэквивалентные. Рассмотрим, например, последний случай. Если $S_p(G)\notin P^*$, то, так как центр G равен P^*, существуют элементы $a \in G$, $d \in S_p(G)$, такие что $(a,d) = d_1 \neq 1$. Тогда $(a \dot{\times} E_2, \operatorname{diag}[d, E_{2^{t-1}}]) = \operatorname{diag}[d_1, E_{2^{t-1}}] \in K$, и следовательно, среди неприводимых частей K группы есть неэквивалентные. Если же $S_p(G) \subset P^*$, то, так как $|S_p(G)| > 2$, группа P^* содержит элемент i порядка 4. Очевидно,

$$(h(g), \operatorname{diag}[iE_{2^{t-1}}, E_{2^{t-1}}]) = \operatorname{diag}[-iE_{2^{t-1}}, iE_{2^{t-1}}] \in K,$$

и следовательно, ограничения группы K на подпространства L_i, $i = 1, 2$, неэквивалентны.

Пусть $\Gamma \subset \Gamma_1$, где Γ_1 — локально нильпотентная группа. Поскольку Γ_1 — N-группа [16], то будем считать, что $\Gamma \triangle \Gamma_1$. Рассмотрим отдельно следующие случаи:

1) $g \notin G^p$,

2) G — примитивная группа, причем при $p = 2$ $|S_p(G)| > 2$,

3) $t > 1$, $g \in G^p$, G — импримитивная группа и G не сопряжена с группой $\Gamma(g_1, G_1)$, где $g_1 \notin G^p$.

Случай 1). Пусть $a \in \Gamma_1$, $h \in H$ и $aha^{-1} = h^r(g)h_1$, $h_1 \in H$, $0 \leqslant r < p$. Так как Γ/P^* — p-группа, $K \subset S_p(\Gamma)$, то для некоторого числа l $ah^{p^l}a^{-1} = h^{p^l}$ и, следовательно,

$$aha^{-1} = h^r(g)h_1 = hd, \quad d \in S_p(\Gamma).$$

Возводя обе части последнего равенства в степень p, получим $(g^r \dot{\times} E_p)h_1^p d_1 = h^p d_2$, $d_i \in S_p(H)$. Так как $g \notin G^p$, то $r = 0$, $aHa^{-1} = H$. Поэтому для $h \in H$ $h(aL_i) = aL_i$. Так как неприводимые части группы H попарно неэквивалентны, то $aL_i = L_j$ и, следовательно, $a = h^p(g)b$, где $b = \operatorname{diag}[g_1, \ldots, g_p]$. В силу максимальности G $g_i \in G$, $a \in \Gamma$, $\Gamma = \Gamma_1$, Γ максимальна среди локально нильпотентных подгрупп группы $GL(n, P)$.

Случай 2). Из примитивности группы G следует, что неприводимые части группы K/L_i попарно эквивалентны. Очевидно, для $a \in \Gamma_1$ $aKa^{-1} = K$. Как отмечалось выше, среди неприводимых частей группы K есть неэквивалентные. Поэтому $aL_i = L_j$. Рассуждения, аналогичные приведенным в конце доказательства случая 1), показывают, что $a \in \Gamma$, $\Gamma = \Gamma_1$.

Случай 3). Так как $K \triangle \Gamma_1$, причем среди неприводимых частей группы K есть неэквивалентные, то Γ_1 — импримитивная группа. Пусть

$$P^n = Q_1 \dotplus \ldots \dotplus Q_p \text{ —}$$

разложение пространства P^n на системы импримитивности Γ_1, $\psi\colon \Gamma_1 \to S_p$ — гомоморфизм, определяемый этим разложением, $H_1 = \ker \psi$. Если $H \subset H_1$, то $Q_i = L_j$ и в силу максимальности G $H = H_1$, $\Gamma = \Gamma_1$. Пусть $H \not\subset H_1$, $H_2 = H \cap H_1$. Тогда $H : H_2 = p$. Так как представители различных смежных классов H по H_2 линейно независимы над кольцом $\langle H_2 \rangle_P$, а $\langle H \rangle_P : P = p^{2(t-1)+1}$, то $\langle H_2 \rangle_P : P = p^{2(t-1)}$. Пусть p^ρ — степень неприводимой части группы H_2, p^k — число неэквивалентных частей. Из импримитивности группы G следует, что $|S_p(G)| > p$. Так как группа H содержит подгруппу D порядка $|S_p(G)|^p$, а $H : H_2 = p$, то среди неприводимых частей группы H_2 есть неэквивалентные, и следовательно, $k > 0$. Очевидно,

$p^{2(t-1)} = \langle H_2 \rangle_P : P \leqslant p^{2\rho+k}$. Отсюда в силу того, что $\rho + k \leqslant t$, получаем $\rho \geqslant t-2$. Если $\rho = t-1$, то $Q_j = L_j$, $H \subseteq H_1$. Противоречие. Таким образом, $\rho = t-2$, $k = 2$, неприводимые части группы H абсолютно неприводимы и попарно неэквивалентны.

Пусть $L_1 = L_{11} \dot{+} \ldots \dot{+} L_{1p}$ — разложение L_1 в прямую сумму инвариантных и неприводимых относительно группы H_2 пространств, $G_1 = G|L_{11}$. Тогда группа G сопряжена с группой $\Gamma(g_1, G_1)$. Так как $H : H_2 = p$, то, очевидно, $g_1 \notin G^p$. Противоречие. Таким образом, в случаях 1)–3) Γ максимальна среди локально нильпотентных подгрупп группы $GL(p^t, P)$. Пусть $p = 2$, G — примитивная группа, причем $|Sp(G)| = 2$, $\Gamma = \Gamma(E_{p^{t-1}}, G)$. Положим

$$a = \begin{bmatrix} E_{p^{t-1}} & E_{p^{t-1}} \\ E_{p^{t-1}} & -E_{p^{t-1}} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, $a^2 = 2$, а $\Gamma a^{-1} = \Gamma$, группа Γ_1, порожденная элементом a и группой Γ, локально нильпотентна, $\Gamma \subset \Gamma_1$.

Непосредственно проверяется, что группа $\Gamma(Ep^{t-1}, G)$, где $G = \Gamma(g_1, G_1)$, $g_1 \notin G_1^p$, сопряжена с собственной подгруппой группы $\Gamma(g_1 \dot{\times} E_p, G_2)$, где $G_2 = \Gamma(E_{p^{t-2}}, G_1)$. Теорема доказана.

Следствие. *Множество максимальных неприводимых мономиальных локально нильпотентных подгрупп группы $GL(n, P)$ тогда и только тогда разбивается на конечное число классов сопряженных подгрупп, когда для любого простого делителя p числа n индекс $P^* : (P^*)^p$ конечен.*

Доказательство. Пусть $\Gamma = \Gamma(g, G)$, $H = \{h \mid h \in \Gamma,\ h = \mathrm{diag}[g_1, \ldots, g_p],\ g_i \in G\}$. Тогда $H = (G \dot{\times} E_p)S_p(H)$, и следовательно, $H^p = (G^p \dot{\times} E_p)Sp(H)$, $H : H^p = G : G^p$. Если $g \in G^p$, то $\Gamma^p = H^p$, $\Gamma : \Gamma^p = \Gamma : H^p = p(G : G^p)$. Если же $g \notin G^p$, то $\Gamma^p : H^p = p$, $\Gamma : \Gamma^p = G : G^p$. Таким образом, индекс $\Gamma : \Gamma^p$ тогда и только тогда конечен, когда конечен индекс $G : G^p$. Поэтому если Γ — мономиальная группа, то индекс $\Gamma : \Gamma^p$ тогда и только тогда конечен, когда конечен индекс $P^* : (P^*)^p$. Из последнего замечания и из теоремы 1 вытекает следствие.

Теорема 1 сводит задачу классификации максимальных импримитивных локально нильпотентных подгрупп группы $GL(n, P)$ к аналогичной задаче для групп меньшей размерности и, следовательно, в конечном итоге к классификации примитивных локально нильпотентных линейных групп.

3. Примитивные локально нильпотентные линейные группы

На протяжении этого параграфа $G \supset P^*$ — абсолютно неприводимая примитивная локально нильпотентная подгруппа группы $GL(n, P)$, K — коммутант G, V — централизатор K в G, $\Sigma = \langle K \rangle_P$, Z — центр V. В силу предложения 1 мы ограничимся случаем, когда $n = p^t$, где $p \neq \operatorname{char} P$ — простое число, $t \geqslant 1$.

Теорема 2.

(1) *K — абелева p-группа, поле $\Sigma = P(\varepsilon)$, где $\varepsilon \in K$, $\varepsilon^{p^\beta} = 1$.*

(2) *$G/V \cong G(\Sigma/P)$.*

(3) *Коммутант группы V содержится в P^*, V — абсолютно неприводимая примитивная двухступенно нильпотентная подгруппа группы $GL(r, \Sigma)$, где $r = \rho^t/(\Sigma : P)$.*

(4) *Пусть B/P^* — p-подгруппа Силова факторгруппы Σ^*/P^*. Тогда группа $G_1 = GB$ почти всегда максимальна среди локально нильпотентных подгрупп группы $GL(n, P)$. Исключение составляет лишь случай, когда $p = 2$, P^* не содержит элемента порядка 4. G — двухступенно нильпотентная группа , причем периодическая часть группы G не содержится в P^*.*

Доказательство. (1) Так как G/P^* — p-группа [1, теорема 28.1], то K — тоже p-группа. Пусть

$$E_n = Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset G \text{ —}$$

верхний центральный ряд группы G, а s — такое число, что $[G, Z_i]$ при $i < s$ — абелева группа, а группа $[G, Z_s]$ неабелева. Очевидно, s не предельное число. Положим $[G, Z_{s-1}] = D$. Из примитивности группы G следует, что $\langle D \rangle_P = \Delta$ — поле. Любой элемент поля Δ представим в виде $\alpha_1\varepsilon_1 + \cdots + \alpha_m\varepsilon_m$, $\varepsilon_i \in D$. Так как D — p-группа, то $\Delta = P(\varepsilon)$, где ε — p-элемент. Следовательно, группа Галуа $G(\Delta/P)$ абелева. Поэтому $K \subset A$, где A — централизатор группы D в G. Пусть теперь a и b — два неперестановочных элемента группы $[G, Z_s]$, $D_1 = \{a, D\}$, $\Delta_1 = \langle D_1 \rangle_P$. Поскольку $a \in K \subset A$ и $a \in Z_{s-1}$, то D_1 — абелев нормальный делитель группы G и, следовательно Δ_1 — поле. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что $G(\Delta_1/P)$ — абелева группа. Поэтому $b \in K \subset A_1$, где A_1 — централизатор группы D_1 в G. Противоречие. Следовательно, K — абелева p-группа, $\Sigma = P(\varepsilon)$, где $\varepsilon^{p^\beta} = 1$.

(2) Так как P — подполе неподвижных элементов поля Σ при действии группы G на Σ (т. е. $k \to g^{-1}kg$, $k \in \Sigma$, $g \in G$), то $G/V \cong G(\Sigma/P)$.

(3) Очевидно, для любых $v_1, v_2 \in V$, $g \in G$ $g(v_1, v_2)g^{-1} = (gv_1g^{-1}, gv_2g^{-1}) = (k_1v_1, k_2v_2) = (v_1, v_2)$, $k_i \in K$. Поэтому (v_1, v_2) принадлежит центру группы G. Так как G абсолютно неприводима над P, то $(v_1, v_2) \in P$.

Так же, как и при доказательстве леммы 20.1 [1], можно доказать, что $\langle G \rangle_P : P = (G : V)(\langle V \rangle_\Sigma : \Sigma)(\Sigma : P) = n^2$. Отсюда получаем $< V >_\Sigma : \Sigma = r^2$. Следовательно, группу V можно рассматривать как абсолютно неприводимую подгруппу группы $GL(r, \Sigma)$. Пусть $a \in V$ и $a^{p^l} = 1$, где p^l — экспонента факторгруппы V/Z. Очевидно, группа H, порожденная a и Z, является абелевым нормальным делителем G. Из примитивности G следует, что $\langle H \rangle_P$ — поле. Так как V — двухступенно нильпотентная группа, то Z содержит элемент η

порядка p^l (см. предложение 3). Поэтому $a = \eta^m \in Z$. Отсюда в силу леммы 1 следует, что V — примитивная подгруппа группы $GL(r,\Sigma)$.

(4) Пусть $G_1 = GB \subset G_2$, где G_2 — локально нильпотентная группа. Так как G_2 — N-группа [15], то мы можем считать, что $G_1 \Delta G_2$. Непосредственно проверяется, что коммутант K_1 группы G_1 содержится в группе B. Поэтому централизатор группы K_1 в G_1 совпадает с группой VB и, следовательно, $VB\Delta G_2$. Пусть V_1 — централизатор группы K_1 в G_2, $v \in VB$, $g \in V_1$, $a = (g,v)$, $m = p^l$ — экспонента факторгруппы VB/B. Нетрудно видеть, что

$$a^m = \varepsilon^q g v^m g^{-1} v^{-m},$$

где $\varepsilon = (v^{-1}, gvg^{-1})$, $q = m(m-1)/2$. Так как $v^m \in B$, $\varepsilon^m = 1$ (см. предложение 3), а $\langle B\rangle_P = \langle K_1\rangle_P = \Sigma$, то $a^q = \pm 1$. Из последнего равенства в силу примитивности группы VB следует, что если $p > 2$ или $p = m = 2$, а $\{b \mid b \in VB,\ b^2 = \pm 1\} \subset B$, то $a \in B$.

Пусть $m = 2^l$, $l > 1$. Тогда $(a^2)^m = 1$ и, следовательно, $a^2 \in B, (a,v)^2 = (a^2, v) = 1$. Поэтому $gv^2g^{-1} = \pm a^2 v^2$, $(gv^2g^{-1})^{\frac{m}{2}} = a^m v^m = gv^m g^{-1} = v^m$. Отсюда получаем, что $a^m = 1$, $a \in B$. Таким образом, в случаях, когда $p > 2$; $p = 2$, $m = 2^l$, $l > 1$; $p = m = 2$, а множество всех элементов четвертого порядка группы VB содержится в B, группа, порожденная элементом g и группой VB, является двухступенно нильпотентной группой. Так как группа VB абсолютно неприводима над Σ, то в силу замечания 2 $V\Sigma^* = VB\Sigma^*$ — максимальная двухступенно нильпотентная подгруппа группы $GL(r,\Sigma)$. Поэтому в перечисленных выше случаях $V_1 \subset V\Sigma^*$. Из абсолютной неприводимости и локальной нильпотентности группы G_2 следует, что V_1/P^* — p-группа. Так как B/P^* — p-подгруппа Силова факторгруппы Σ^*/P^*, то $V_1 = VB$. Отсюда в силу того, что $G_2/V_1 \cong G(\Sigma/P)$, следует равенство $G_1 = G_2$.

Пусть теперь $p = m = 2$, причем существует элемент $a \in VB$, такой что $a^2 = -1$, $a \notin B$. Очевидно, в этом случае P^* не содержит элемента порядка 4, $\Sigma = P$, $G = V$, группа G представима в виде $G = (a_1)(b_1)\dots(a_t)(b_t)P^*$, где $a_1^2 = -1$, $a_i^2, b_i^2 \in P^*$, $(a_i, b_i) = -1$, а элементы, принадлежащие различным парам, перестановочны (см. предложение 3). Положим $a_i' = a_i$, $b_1' = a_1 b_1$, $b_i' = b_i$ при $i > 1$. Очевидно, $(a_i')^2 = a_i^2$, $(b_i')^2 = b_i^2$, $(a_i', b_j') = (a_i, b_j)$. В силу теоремы 20.8 [1], существует элемент $g \in GL(p^t, P)$, такой что $ga_ig^{-1} = a_i'$, $gb_ig^{-1} = b_i'$. Нетрудно видеть, что $(g^2, v) = \pm 1$ для любого $v \in G$. Следовательно, $g^2 \in G$, группа G_1, порожденная g и G, является локально нильпотентной группой. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если пара $\langle P, p\rangle$ не удовлетворяет условию* (II), *то G — нильпотентная группа.*

Доказательство. В силу предложения 3 $V : Z = \langle V\rangle_\Sigma : \Sigma = r^2$. Из лемм 2, 3 следует, что в случае, когда пара $\langle P, p\rangle$ не удовлетворяют условию (II), Z/P^* — конечная группа. Поэтому индекс $G : P^*$ конечен, G — нильпотентная группа.

Следствие 2. *Пусть G^p — подгруппа группы G, порожденная силовской p-подгруппой группы G и множеством всех элементов вида g^p, $g \in G$. Индекс $G : G^p$ тогда и только тогда конечен, когда конечен индекс $P^* : (P^*)^p$.*

Доказательство. Из теоремы 2 и леммы 3 следует, что индекс $G : KP^*$ конечен. Поэтому если индекс $P^* : (P^*)^p$ конечен, то конечен и индекс $G : K(P^*)^p$. Отсюда следует конечность индекса $G : G^p$.

Обратно, пусть индекс $G : G^p$ конечен. Тогда конечен индекс $P^* : (P^* \cap G^p)$ и, следовательно, конечен индекс $P^* : (P^*)^p$.

Если $p > 2$, то в силу леммы 2 силовская p-подгруппа B/P^* группы Σ^*/P^* порождается элементом εP^*. Поэтому $B = Z$, $Z : P^* = \Sigma : P$. Отсюда и из теоремы 2 вытекает

Следствие 3. *Пусть m — нечетное число и $G \supset P^*$ — абсолютно неприводимая примитивная локально нильпотентная подгруппа группы $GL(m, P)$. Тогда $G : P^* = m^2, G$ максимальна среди локально нильпотентных подгрупп группы $GL(m, P)$.*

Лемма 4. *Пусть D — периодическая часть группы V. Тогда возможны только следующие случаи:*

1) $D \subset Z$;

2) $D = (a)Z_0$, где $Z_0 = Z \cap D$, $|a| > p^\alpha$, p^α — экспонента факторгруппы V/Z;

3) $D = (a)(b)Z_0$, где $a^2 = b^2 = (a, b) = -1$. *В этом случае $p^\alpha = 2$, P^* не содержит элемента порядка* 4.

Доказательство. Если $D = (a)Z_0$ и $a \notin Z_0$, то в силу леммы 1 $|a| > p^\alpha$. Предположим теперь, что группа D/Z_0 содержит прямое произведение двух циклических подгрупп $(a_1)Z_0$ и $(a_2)Z_0$. Мы можем считать, что $|a_1| = p^{\alpha_1} = n_1$, $|a_2| = p^{\alpha_2} = n_2$, $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$. Тогда $a_1^{p^\alpha} = \eta$, $a_2^{p^\alpha} = \eta^d$, $\eta \in Z_0$. Пусть $a = a_1^d$, $b = a_1^d a_2^{-1}$, $\eta_1 = (a_2^{-1}, a)$. Непосредственно проверяется, что $b^{p^\alpha} = \eta_1^q = \pm 1$, где $q = p^\alpha(p^\alpha - 1)/2$. В силу леммы 1 $b^{p^\alpha} = -1$, $b^2 \in Z_0$, и следовательно, $a_1^{2d}, a_2^2 \in Z_0$. Отсюда получаем $\eta_1^2 = (a_2^{-2}, a) = 1$, $\eta_1 = -1$. С другой стороны, как отмечалось выше, $b^{p^\alpha} = \eta_1^q = -1$, поэтому $\alpha = 1$, $p = 2$. Так как V — примитивная подгруппа $GL(r, \Sigma)$, то линейная P-оболочка группы $(b)Z$ — поле, поэтому в P нет элемента порядка 4. Отсюда следует, что для любого элемента $v \in D$ $v^2 = \pm 1$.

Пусть C — централизатор группы, порожденной элементами a и b в V. Нетрудно видеть, что $V = (a)(b)C$. Если теперь $v \in C$ и $v^2 = -1$, то $(av)^2 = 1$. В силу леммы 1 $v \in Z_0$. Лемма доказана.

В силу теоремы 2 K — абелева p-группа. Если $K \subset P$, то порядок группы K совпадает с экспонентой факторгруппы V/Z (см. предложение 3). Пусть $K \not\subset P$. В этом случае существует число p^l, такое что в группе P^* есть элемент η порядка p^l, но нет элемента порядка p^{l+1}.

Лемма 5. *Пусть $K \not\subset P$, а пара $\langle P, p\rangle$ удовлетворяет условию* (II). *Тогда K — группа типа 2^∞. В остальных случаях K — конечная циклическая группа. Если пара $\langle P, p\rangle$ удовлетворяет условию* (I), *то $|K| \leqslant p^t$.*

Пусть пара $\langle P, p\rangle$ не удовлетворяет условию (IV), $K \not\subset P$, $\Sigma \neq P(i)$, ε — *образующий элемент группы* K. *Тогда* $\varepsilon = (g, v)$, *где* $g \in G$, $v \in V$, *причем* $v^{p^l} = \lambda\varepsilon$, $v^{p^{l-1}} \notin Z$.

Доказательство. Из леммы 3 и теоремы 2 следует, что если пара $\langle P, p\rangle$ не удовлетворяет условию (II), то K — конечная циклическая p-группа. Так как $G/V \cong G(\Sigma/P)$, то в случае, когда пара $\langle P, p\rangle$ удовлетворяет условию (II), K является группой типа 2^∞.

Пусть пара $\langle P, p\rangle$ удовлетворяет условию (I), $|K| = p^\mu$, ε — образующий элемент группы K, $\alpha = \mu - l$. Тогда уравнение $X^{p^\alpha} - \eta = 0$ неприводимо над P, а группа Галуа $G(\Sigma P)$ циклична. Поэтому степень неприводимой части группы K равна p^α, причем $\alpha \leqslant t$ и $G/V \cong G(\Sigma/P)$ — тоже циклическая группа. Следовательно, $\varepsilon = (g, v)$, где $g \in G$, $v \in V$. Пусть p^s — минимальное число, для которого $v^{p^s} \in Z$. Так как V — абсолютно неприводимая двухступенно нильпотентная подгруппа группы $CL(r, \Sigma)$, где $r = p^t/(\Sigma : P) = p^{t-\alpha}$, то $s \leqslant t - \alpha$ и $s \leqslant l$ (см. предложение 3). Из леммы 3 следует, что $vp^s = \lambda\varepsilon^\rho$, $\lambda \in P$. Поскольку $gvg^{-1} = \varepsilon v$, то $gv^{p^s}g^{-1} = \lambda\varepsilon^{p^{s+\rho}}$. С другой стороны, $G/V \cong G(\Sigma/P)$, и поэтому $g\varepsilon g^{-1} = q\varepsilon$, где $q \in \Sigma$, $q^{p^\alpha} = 1$, $gv^{p^s}g^{-1} = g\lambda\varepsilon^\rho g^{-1} = \lambda q^\rho \varepsilon^\rho$.

Таким образом, $\varepsilon^{p^{s+\rho}} = q^\rho \cdot \varepsilon^\rho$, $\varepsilon^{p^{s+\alpha}} = q^{\rho p^\alpha} = 1$. Отсюда и из условий $|\varepsilon| = p^{l+\alpha}$, $s \leqslant l$ получаем $l = s \leqslant t - \alpha$, $\mu = l + \alpha \leqslant t$, $(\rho, p) = 1$. Следовательно, $vp^l = \lambda\varepsilon_1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon^\rho$ — образующий элемент группы K, причем $v^{p^{l-1}} \notin Z$. Предположим теперь, что пара $\langle P, p\rangle$ удовлетворяет условию (III). Тогда $p^l = 2$. В силу леммы 3 G/V — циклическая группа. Поэтому $\varepsilon = (g, v)$, $g \in G$, $v \in V$, $v^2 \in Z$. Так как группа Z порождается элементом ε и $P^*, \Sigma \neq P(i)$, то $v \notin Z$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Если m — нечетное число, то порядок коммутанта абсолютно неприводимой примитивной локально локально нильпотентной подгруппы группы $GL(m, P)$ не превосходит m.*

Следствие 2. *Пусть m — нечетное число, а P^* содержит элемент порядка m. Тогда любая абсолютно неприводимая примитивная локально нильпотентная подгруппа группы $GL(m, P)$ двухступенно нильпотентна.*

Теорема 3. *Пусть $G \supset P^*$ — подгруппа группы $GL(p^t, P)$, K — коммутант G, $\Sigma = \langle K\rangle_P$, V — централизатор K в G, Z — центр V. Если Z/P^* — p-группа, а группы G, V, K удовлетворяют условиям* (1)–(3) *теоремы* 2, *то G — абсолютно неприводимая локально нильпотентная подгруппа группы $GL(p^t, P)$.*

Доказательство. Повторив доказательство леммы 20.1 из [1], мы получим, что $\langle G\rangle_P : P = (G : V)(\langle V\rangle_P : P)$. Так как V абсолютно неприводима над Σ, а $G/V \cong G(\Sigma/P)$, то $\langle G\rangle_P : P = p^{2t}$, G — абсолютно неприводимая подгруппа $GL(p^t, P)$.

В силу предложения 1 V/Z — p-группа. Так как G/V и Z/P^* — тоже

p-группы, то G/P^* — p-группа. Отсюда и следует локальная нильпотентность группы G.

Пусть $P^n = L_1 \dot{+} \ldots \dot{+} L_\mu$ — разложение пространства P^n на системы импримитивности группы G, $n = p^t$, T — группа подстановок, индуцируемая G на множестве систем импримитивности $L_1, \ldots, L_\mu$. Так как T — транзитивная p-группа, то T является подгруппой сплетения циклов длины p. Поэтому существует разложение пространства P^n на системы импримитивности группы G вида

$$P^n = Q_1 \dot{+} \ldots \dot{+} Q_p. \tag{4}$$

Пусть $\varphi\colon G \to S_p$ — естественный гомоморфизм. Очевидно, $G/\ker\varphi$ — абелева группа. Поэтому $K \subset \ker\varphi$ и, следовательно, (4) можно рассматривать как разложенные пространства Σ^r на системы импримитивности V. Так как группа V удовлетворяет условию (2) теоремы 2, последнее невозможно. Теорема доказана.

Теоремы 2, 3 сводят изучение неприводимых примитивных локально нильпотентных линейных групп к изучению примитивных двухступенных нильпотентных линейных групп.

4. Примитивные двухступенно нильпотентные линейные группы

В этом параграфе $n = p^t$, p — простое число, $t \geqslant 1$, P — поле, содержащее элемент порядка p. Представим число n в виде

$$n = \nu_1 \ldots \nu_k, \tag{5}$$

где $\nu_i > 1$, $\nu_j | \nu_i$ при $i < j$, причем в группе P^* есть элемент порядка ν_1. Пусть $\Theta_1, \gamma_1, \ldots, \Theta_k, \gamma_k$ — такие элементы поля P, что

α) из равенства $(-1)^m \lambda^{\nu_1} \Theta_1^{n_1\beta_1} \ldots \gamma_k^{n_k\beta_k} = 1$, где $n_i = \nu_1 \nu_i^{-1}$, $\nu_i > \alpha_i$, $\beta_i \geqslant 0$, $\lambda \in P$, $m = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_s\beta_s$, s — такое число, что $\nu_1 = \cdots = \nu_s \neq \nu_{s+1}$, следует, что $\alpha_i = \beta_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$;

β) в поле $P(u_1, \ldots, u_k)$, $u_i^{\nu_i} = \Theta_i$, есть элементы $l_1, \ldots, l_k$, такие что $\sigma_i(l_i)\sigma_i^2(l_i) \ldots \sigma_i^{\nu_i}(l_i) = \gamma_i$, где $\sigma_i \in G(P(u_1, \ldots, u_k)/P)$, $|\sigma_i| = \nu_i$, $\sigma_i(u_j) = u_j$ при $i \neq j$, причем $\sigma_i(l_j)l_i = \sigma_j(l_i)l_j$, $i, j = 1, \ldots, k$.

Отметим, что условие β) заведомо выполняется, если γ_i является нормой некоторого элемента l_i поля $P(u_i)$. Из условия α) следует, что $P(u_i) : P = \nu_i$. Положим

$$\begin{gathered} u_i = E_{\nu_1 \ldots \nu_{i-1}} \dot{\times} \begin{bmatrix} 0 & \Theta_i \\ E_{\nu_i - 1} & 0 \end{bmatrix} \dot{\times} E_{\nu_{i+1} \ldots \nu_k}, \\ v_i = (E_{\nu_1 \ldots \nu_{i-1}} \dot{\times} \operatorname{diag}[1, \varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_i^{\nu_i - 1}] \dot{\times} E_{\nu_{i+1} \ldots \nu_k}) l_i, \end{gathered} \tag{6}$$

где l_i — элементы поля $P(u_1, \ldots, u_k) = \langle (u_1) \ldots (u_k) \rangle_P$, определяемые условием β), а элементы ε_i определяются равенством $\sigma_i(u_i) = \varepsilon_i^{-1} u_i$ (см. β)).

Группу, порожденную элементами $u_1, v_1, \dots, v_k$ и группой P^*, обозначим $V_{\nu_1\dots\nu_k}(\Theta, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$, элементы u_i, v_i назовем s-образующими элементами группы $V_{\nu_1\dots\nu_k}(\Theta_1, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$.

Подгруппу факторгруппы $P^*/(P^*)^{\nu_1}$, порожденную элементами

$$(-1)^{\nu_1+1}(P^*)^{\nu_1}, \quad \bar{\Theta}_i = \Theta_i^{n_i}(P^*)^{\nu_1},$$
$$\bar{\gamma}_i = \gamma_i^{n_i}(P^*)^{\nu_1}, \quad n_i = \nu_1/\nu_i^{-1}, \quad i = 1, \dots, k,$$

будем обозначать $\bar{V}_{\nu_1\dots\nu_k}(\Theta_1, \gamma_1, \dots, \gamma_k) = \bar{V}$. Очевидно, группа $\bar{V}$ совпадает с группой, порожденной всеми элементами вида $(v)^{\nu_1}(P^*)^{\nu_1}$, $v \in V = V_{\nu_1\dots\nu_k}(\Theta_1, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$. Из условия α) следует, что отображение $\varphi\colon V/P^* \to \bar{V}$ для $vP^* \in V/P^*$, $\varphi(v) = (v)^{\nu_1}(P^*)^{\nu_1}$ при $p > 2$ является изоморфизмом.

Теорема 4.

(i) $V_{\nu_1\dots\nu_k}(\Theta_1, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$ — *абсолютно неприводимая примитивная двухступенная нильпотентная подгруппа группы* $GL(n, P)$.

(ii) *Пусть* $V \supset P^*$ — *абсолютно неприводимая примитивная подгруппа группы* $GL(n, P)$. *Тогда существуют: разложение числа n вида (5); элементы* $\Theta_1, \gamma_1, \dots, \Theta_k, \gamma_k \in P^*$, *удовлетворяющие условиям* α) *и* β); *элемент* $g \in GL(n, P)$, *такие что*

$$gVg^{-1} = V_{\nu_1\dots\nu_k}(\theta_1, \gamma_1, \dots, \gamma_k).$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $(v_i, u_i) = \varepsilon_i$, $(u_i, v_j) = (u_i, u_j) = 1$ при $i \neq j$. Нетрудно видеть, что $(v_i, v_j) = 1$. Действительно, пусть

$$d_i = E_{\nu_1\dots\nu_{i-1}} \dot{\times} \operatorname{diag}[1, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_i^{\nu_i - 1}] \dot{\times} E_{\nu_{i+1}\dots\nu_k}.$$

Так как $d_i u_i d_i^{-1} = \varepsilon_i u_i$, $d_i u_j d_i^{-1} = u_j$ при $i \neq j$, то $d_i^{-1} l d_i = \sigma_i(l)$ $\forall l \in P(u_1, \dots, u_k)$ (см. (6)). Поэтому $d_i l_i d_j l_j = d_i d_j \sigma_j(l_i) l_j$. В силу условия β) $\sigma_j(l_i) l_j = \sigma(l_j) l_i$, следовательно, $d_i l_i d_j l_j = d_j d_i \sigma_i(l_j) l_i = d_j l_j d_i l_i$. Так как $v_i = d_i l_i$, то $(v_i, v_j) = 1$. Из этих соотношений следует двухступенная нильпотентность группы $V = V_{\nu_1\dots\nu_k}(\Theta_1, \gamma_1, \dots, \Theta_k, \gamma_k)$, а также линейная независимость n^2 элементов $u_1^{\alpha_1} v_1^{\beta_1} \dots u_k^{\alpha_k} v_k^{\beta_k}$, $0 \leqslant \alpha_j, \beta_j < \nu_j$ (см. [1, теорема 20.4]).

Таким образом V — абсолютно неприводимая двухступенно нильпотентная подгруппа группы $GL(n, P)$. Пусть $v = \lambda u_1^{\alpha_1} v_1^{\beta_1} \dots v_k^{\beta_k} \in V$. Тогда $v^{\nu_1} = (-1)^{\alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_s\beta_s} \times \lambda^{\nu_1} \Theta_1^{n_1\alpha_1} \gamma_1^{n_1\beta_1} \dots \gamma_k^{n_k\beta_k}$, где $0 \leqslant \alpha_j, \beta_j < \nu_j$, а s — такое число, что $\nu_1 = \dots = \nu_s \neq \nu_{s+1}$, $n_i = \nu_1 \nu_i^{-1}$. Так как элементы $\Theta_1, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ удовлетворяют условию α), то из равенства $v^{\nu_1} = 1$ следует, что $v \in Z$. В силу леммы 1 V — примитивная группа. Поскольку $P^* \subset V$, то V максимальна среди двухступенно нильпотентных подгрупп группы $GL(n, P)$ (см. замечание 2).

В силу предложения 3 и замечания 2 группа V представима в виде

$$V = (u_1)(v_1) \dots (u_k)(v_k) P^*,$$

где $u_i^{\nu_i} = \Theta_i$, $v_i^{\nu_i} = \gamma_i$, $\Theta_i, \gamma_i \in P$, $(v_i, u_i) = \varepsilon_i$, ε_i — элемент порядка ν_i из P^*, $\nu_{i+1}|\nu_i$, $\nu_1 \dots \nu_k = n$, а элементы, принадлежащие различным парам, перестановочны. Пусть $A = (u_1)(u_2)\dots(u_k)P^*$. Очевидно, A — абелев нормальный делитель V. Так как V — примитивная группа, то $\Delta = \langle A \rangle_P$ — поле. Ввиду предложения 3 $\Delta : P = n$. Следовательно, $\Delta = P(u_1, \dots, u_k)$, где $u_i^{\nu_i} = \Theta_i$, элементы $u_1, \dots, u_k$ одновременно приводятся к виду (6). Непосредственно проверяется что $(v_i, u_j) = (d_i, u_j)$, где

$$d_i = E_{\nu_1 \dots \nu_{i-1}} \dot{\times} \operatorname{diag}[1, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_i^{\nu_i - 1}] \dot{\times} E_{\nu_{i+1} \dots \nu_k}.$$

Поэтому $(d_i^{-1} v_i, u_j) = 1$, $j = 1, \dots, k$. Так как централизатор поля Δ в $GL(n, P)$ совпадает с Δ, то $v_i = d_i l_i$, $l_i \in \Delta$. Из условий $v \in V$ и $v^{\nu_1} = 1$ в силу примитивности группы V следует, что $v \in P^*$. Поэтому элементы $\Theta_1, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ удовлетворяют условию α).

Положим $d_i^{-1} l d_i = \sigma_i(l)$ $\forall l \in \Delta$. Очевидно, $\sigma_i \in G(\Delta|P)$, $\sigma_i(u_i) = d_i^{-1} u_i d_i = \varepsilon_i^{-1} u_i$, $\sigma_i(u_j) = u_j$ при $i \neq j$. Из равенств $v_i = d_i l_i$ и $v_i^{\nu_i} = \gamma_i$ следует, что $\gamma_i = \sigma_i(l_i) \dots \sigma_i^{\nu_i}(l_i)$. Так как $v_i v_j = d_i l_i d_j l_j = d_i d_j \sigma_j(l_i) l_j = d_j l_j d_i l_i = d_i d_j \sigma_i(l_j) l_i$, то $\sigma_j(l_i) l_j = \sigma_i(l_j) l_i$.

Следовательно, элементы $\Theta_1, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ удовлетворяют условию β). Теорема доказана.

Пусть N — множество всех подгрупп группы $GL(n, P)$ вида $V = V_{\nu_1 \dots \nu_k}(\Theta_1, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$, а $\overline{N}$ — множество всех подгрупп факторгруппы $P^*/(P^*)^{\nu_1}$ вида $\overline{V} = \overline{V}_{\nu_1 \dots \nu_k}(\Theta_1, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$, где $n = \nu_1 \dots \nu_k$ — любое разложение числа n вида (5). Рассмотрим отображение $\psi \colon N \to \overline{N}$ для $v \in N$, $\psi(V) = \overline{V}$. Как отмечалось выше, группа $\overline{V}$ совпадает с группой, порожденной всеми элементами вида $v^{\nu_1}(P^*)^{\nu_1}$, $v \in V$. Поэтому если $V_1, V_2 \in N$ и $g V_1 g^{-1} = V_2$, $g \in GL(n, P)$, то $\psi(V_1) = \psi(V_2)$. Пусть $V' = V_{\nu_1 \dots \nu_k}(\Theta'_1, \gamma'_1, \dots, \gamma'_k)$, где $\Theta'_i = \lambda_i^{\nu_1} \Theta_i$, $\gamma'_i = \gamma_i c_i^{\nu_1}$, $c_i, \lambda_i \in P^*$, u'_i, v'_i — s-образующие элементы группы V'. Тогда $(u'_i, v'_i) = \varepsilon_i^r$. Если $\varepsilon_i = \varepsilon_i^r$, $i = 1, \dots, k$, то группы V и V' сопряжены в $GL(n, P)$ (см. [1, теорема 20.8]). Отсюда в силу того, что каждая подгруппа из $\overline{N}$ конечна, следует, что множество $\psi^{-1}(\overline{N})$ разбивается на конечное число классов сопряженных подгрупп. Таким образом, справедлива

Лемма 6. *Множество абсолютно неприводимых примитивных двухступенно нильпотентных подгрупп группы $GL(n, P)$ тогда и только тогда разбивается на конечное число классов сопряженных подгрупп, когда для любого разложения числа n вида (2) конечно число подгрупп фактор-группы $P^*/(P^*)^{\nu_1}$ вида $\overline{V}_{\nu_1 \dots \nu_k}(\theta_1, \gamma_1 \dots \gamma_k)$.*

Следствие 1. *Если для любого простого делителя p числа m индекс $P^* : (P^*)^p$ конечен, то конечно и число классов сопряженных абсолютно неприводимых максимальных локально нильпотентных подгрупп группы $GL(m, P)$.*

Теорема 5. *Пусть m — нечетное число, P — поле, содержащее первообразный корень из 1 степени m. Множество абсолютно неприводимых максимальных локально нильпотентных подгрупп группы $GL(m, P)$ тогда и только* *тогда разбивается на конечное число классов сопряженных подгрупп, когда для любого простого делителя p числа m конечен индекс $P^* : (P^*)^p$.*

Доказательство. В силу предложения 1 достаточно ограничиться случаем $m = p^t$, $t > 0$. Пусть N_{p^t} — множество максимальных абсолютно неприводимых локально нильпотентных подгрупп группы $GL(p^t, P)$. Предположим, что множество Np^t разбивается на конечное число классов сопряженных подгрупп. Тогда в силу теоремы 1 для любой подгруппы $G \in N_{p^s}$, $s < t$, индекс $G : G^p$ конечен. Следовательно, конечен и индекс $P^* : (P^*)^p$.

Обратно. Пусть индекс $P^* : (P^*)^p$ конечен, A_{p^s}, B_{p^s}, $t \geqslant s \geqslant 1$, — подмножества множества N_{p^s}, состоящие из примитивных и импримитивных подгрупп. Так как $p > 2$, то любая подгруппа из A_{p^s} двухступенно нильпотентна (см. следствие 2 леммы 5). Отсюда и из леммы 6 следует, что множество A_{p^s} разбивается на конечное число классов сопряженных подгрупп. В силу теоремы 1 множество B_p и, следовательно, множество N_p разбивается на конечное число классов сопряженных подгрупп. Дальше применяем индукцию по s. Пусть $\Gamma \in B_{p^{s+1}}$. Тогда группа Γ сопряжена с группой $\Gamma(g, G)$, $G \in N_{p^s}$. Из конечности индекса $P^* : (P^*)^p$ следует конечность индекса $G : G^p$ (см. следствие 2 теоремы 2). Поэтому множество подгрупп из $B_{p^{s+1}}$ вида $\Gamma(g, G)$ разбивается на конечное число классов сопряженных. В силу предположения индукции N_p разбивается на конечное число классов сопряженных подгрупп. Следовательно, и множество B_{p^s} разбивается на конечное число классов сопряженных подгрупп. Предложение доказано.

5. Не двухступенно нильпотентные группы

Пусть $G \supset P^*$ — абсолютно неприводимая примитивная максимальная локально нильпотентная подгруппа группы $\Gamma L(n, P)$, $n = p^t$, p — простое число, K — коммутант G, $\Sigma = \langle K \rangle_P$. Если $K \subset P$, то G — двухступенно нильпотентная группа, сопряженная (в силу теоремы 4) с группой вида $V_{\nu_1 \ldots \nu_k}(\theta_1, \gamma_1 \ldots \gamma_k)$. Пусть $K \not\subset P$. Тогда согласно теореме 2 существует число l, такое что в P^* есть элемент η порядка p^l, но нет элемента порядка p^{l+1}. Рассмотрим вначале следующие случаи: а) $n = 2$, б) $n > 2$, а пара $\langle P, p \rangle$ удовлетворяет одному из условий (I)–(III).

Случай а). Если $i \in P$, $i^2 = -1$, то в силу теоремы 2 любая абсолютно неприводимая примитивная локально нильпотентная подгруппа группы $GL(2, P)$ двухступенно нильпотентна. Пусть $i \notin P$, $\Sigma = P(i)$, Z/P^* — 2-подгруппа Силова факторгруппы Σ^*/P^* (см. лемму 3). Будем рассматривать Z как подгруппу группы $GL(2, P)$. Пусть τ — образующий элемент группы Галуа $G(\Sigma/P)$, g — такой элемент $GL(2, P)$, что $g^2 = 1$, $g^{-1} \sigma g = \tau \sigma$ $\forall \sigma \in \Sigma$. Группу, порожденную элементом $g\sigma$, $\sigma \in \Sigma$, и группой Z, будем обозначать G_σ.

Лемма 7.

1. G_σ — *абсолютно неприводимая примитивная локально нильпотентная подгруппа группы* $GL(2,P)$.

2. $aGa^{-1} = G_\sigma$, $a \in GL(2,P)$.

3. *Две группы* G_{σ_1} *и* G_{σ_2} *тогда и только тогда сопряжены в* $GL(2,P)$, *когда* $\sigma_2 = \sigma_1\tau(c)c^{-1}z$, *где* $c \in \Sigma$, $z \in Z$, $\tau \in G(\Sigma/P)$.

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из теоремы 3, а утверждение 2 — из теоремы 2. Пусть $bG_{\sigma_1}b^{-1} = G_{\sigma_2}$. Тогда $bZb^{-1} = Z$. Поэтому $b = g\sigma_1 c$, $c \in \Sigma$, $cG_{\sigma_1}c^{-1} = G_{\sigma_2}$, $cg\sigma_1 c^{-1} = g\tau(c)c^{-1}\sigma_1 = g\sigma_2 z$, $z \in Z$. Отсюда получаем $\sigma_2 = \sigma_1\tau(c)c^{-1}z$.

Обратно. Пусть $\sigma_2 = \sigma_1\tau(c)c^{-1}z$, где $c \in \Sigma$, $z \in Z$. Тогда $cg\sigma_1c^{-1} = g\tau(c)c^{-1}\sigma_1 = g\sigma_2 z^{-1}$ и, следовательно, $cG\sigma_1c^{-1} = G\sigma_2$. Лемма доказана.

Случай б). Пусть $\Sigma = P(\varepsilon)$, где $\varepsilon^{p^\beta} = \eta$, $\beta > 0$, причем $r = \Sigma : P = p^\alpha < p^t = n$, Z — p-подгруппа Силова факторгруппы Σ^*/P^*. Пусть, далее, $V = V_{\nu_1\ldots\nu_k}(\theta_1, \gamma_1 \ldots \gamma_k)$ (см. § 4) — такая подгруппа группы $GL(r,\Sigma)$, что 1) $\theta_i, \gamma_i \in Z$, $i = 1,\ldots,k$, $\nu_1 = p^l$; 2) если пара $\langle P, p\rangle$ удовлетворяет одному из условий (I), (III), причем в последнем случае $\Sigma \neq P(i)$, то $\theta_1 = \lambda\varepsilon$, $\lambda \in P$. Положим $V_{p^\alpha\nu_1\ldots\nu_k}(\theta_1,\gamma_1\ldots\gamma_k) = (u_1)(v_1)\ldots(v_k)P^* = V_{p^\alpha}$, где $u_1, v_1, \ldots, v_k$ — s-образующие элементы группы V. Очевидно, $V = V_{p^\alpha}\Sigma^*$. Будем рассматривать группу V_{p^α} как подгруппу группы $GL(n,P)$.

Лемма 8. *Из сопряженности групп* V_{p^α} *и* $V'_{p^\alpha\nu_1\ldots\nu_k}(\theta'_1,\gamma'_1\ldots\gamma'_k)$ *в группе* $GL(n,P)$ *следует их сопряженность в группе* $GL(r,\Sigma)$.

Доказательство. Пусть $gV_{p^\alpha}g^{-1} = V'_{p^\alpha}$, $g \in GL(n,P)$, очевидно, $gZg^{-1} = Z$. Так как $\theta_i, \gamma_i \in Z$, а пара $\langle P, p\rangle$ удовлетворяет одному из условий (I), (III), причем в последнем случае $\Sigma \neq P(i)$, то в силу леммы 3 $\theta_i = \lambda_i\varepsilon^{\alpha_i}$, $\gamma_i = r_i\varepsilon^{\beta_i}$. Положим $gZg^{-1} = \tau(z)$ $\forall z \in Z$, $\tau \in G(\Sigma/P)$. Нетрудно видеть, что $\tau(\varepsilon) = c^{\nu_1}\varepsilon$, $c \in Z$. Действительно, если $p = 2$, то $\nu_1 = p^l = 2$, $\tau(\varepsilon) = \varepsilon^{2k+1} = c^{\nu_1}\varepsilon$, где $c = \varepsilon^k$. Пусть $p > 2$. Тогда $\varepsilon^{p^\alpha} = \eta$, $\tau(\varepsilon) = c_1\varepsilon$, $c_1^{p^\alpha} = 1$. Так как $|\varepsilon| = p^{l+\alpha}$, $\nu_1 = p^l$, то $c_1 = \varepsilon^{\nu_1 k}$, $\tau(\varepsilon) = c^{\nu_1}\varepsilon$, $c = \varepsilon^k$. Поэтому $g\theta_i g^{-1} = c_i^{\nu_i}\theta_i$, $g\gamma_i g^{-1} = d_i^{\nu_i}\gamma_i$, где $c_i, d_i \in Z$. Пусть $a_i = c_i^{-1}gu_ig^{-1}$, $b_i = d_i^{-1}gv_ig^{-1}$. Очевидно, $a_i, b_i \in V'_{p^\alpha}$, $a_i^{\nu_i} = u_i^{\nu_i}$, $b_i^{\nu_i} = v_i^{\nu_i}$. Так как коммутант группы V_{p^α} содержится в поле P, то $(a_i, b_j) = (u_i, v_j)$, $i, j = 1,\ldots,k$. Поэтому существует элемент $u \in GL(r,\Sigma)$, такой что $uu_iu^{-1} = a_i$, $uv_iu^{-1} = b_i$ ([1, теорема 20.8]) и, следовательно, $uV_{p^\alpha}u^{-1} = V'_{p^\alpha}$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть* N_{p^α} — *нормализатор группы* V_{p^α} *в* $GL(n,P)$. *Тогда верны следующие утверждения.*

1. $N_{p^\alpha} = \{g, V\}$, *где* $g^{p^\alpha} \in V_{p^\alpha}$, $V = V_{p^\alpha}\Sigma^*$.

2. $G_{p^\alpha} = \{g, V_{p^\alpha}|\}$ — *абсолютно неприводимая примитивная максимальная локально нильпотентная подгруппа группы* $GL(n,P)$.

3. *Группы* G_{p^α} *и* $G'_{p^\alpha} = \{g\sigma, V_{p^\alpha},\ \sigma \in \Sigma\}$ *тогда и только тогда сопряжены в* $GL(n,P)$, *когда* $\sigma = \tau(c)c^{-1}z$, $c \in \Sigma$, $z \in Z$, $\tau \in G(\Sigma/P)$, $|\tau| = p^\alpha$.

4. *Если G — такая абсолютно неприводимая примитивная максимальная локально нильпотентная подгруппа группы $GL(n,P)$, что $\langle K\rangle_P=\Sigma$, где K — коммутант G, то G сопряжена в $GL(n,P)$ с группой типа G_{p^α}.*

Доказательство. 1. Пусть V_1 — централизатор группы Σ^* в N_{p^α}, $v\in V_1$, $u\in V$, $d=(u,v)$. Тогда $d^{\nu_1}=\pm1$, так как V — примитивная подгруппа $GL(r,\Sigma)$, а в Σ^* есть элемент порядка p^{ν_1}, то $d\in\Sigma$. Поэтому группа, порожденная элементом v и группой V, двухступенно нильпотентна. Поскольку V максимальна среди двухступенно нильпотентных подгрупп группы $GL(r,\Sigma)$, то $v\in V$, $V_1=V$. Пусть τ — образующий элемент группы Галуа $G(\Sigma/P)$, а b — такой элемент $GL(n,P)$, что $b^{-1}zb=\tau(z)$ $\forall z\in\Sigma$. Положим

$$a_i=c_i^{-1}b^{-1}u_ib,\quad b_i=d_i^{-1}b^{-1}v_ib,$$

где $\tau(\theta_i)=c_i^{\nu_i}\theta_i$, $\tau(\gamma_i)=d_i^{\nu_i}\gamma_i$ (см. доказательство леммы 7). Очевидно,

$$a_i^{\nu_i}=u_i^{\nu_i},\quad b_i^{\nu_i}=v_i^{\nu_i},\quad (a_i,b_j)=(u_i,v_j).$$

Поэтому существует элемент $u\in GL(r,\Sigma)$, такой что

$$u^{-1}a_iu=u_i,\quad u^{-1}b_iu=v_i,\quad i=1,\dots,k.$$

Пусть $g=bu$. Тогда $g\in N_{p^\alpha}$. Так как $N_{p^\alpha}/V\cong G(\Sigma/P)$, то $N_{p^\alpha}=\{g,V\}$, $g^{p^\alpha}=d\in V$ и, следовательно, $d^{\nu_1}=z\in\Sigma$. Из равенства $g^{-1}dg=z$ вытекает, что $z\in P$, $g^{p^\alpha}=d\in V_{p^\alpha}$. Очевидно, $G_{p^\alpha}=\{g,V_{p^\alpha}\}$ — локально нильпотентная группа.

2. Пусть K — коммутант группы G_{p^α}. Непосредственно проверяется, что $\langle K\rangle_P=\Sigma$, группы G_{p^α}, V_{p^α}, K удовлетворяют условиям (1)–(3) теоремы 2. В силу теоремы 3 G_{p^α} — абсолютно неприводимая примитивная максимальная локально нильпотентная подгруппа группы $L(n,P)$.

3. Пусть $aG_{p^\alpha}a^{-1}=G'_{p^\alpha}$. Тогда $aV_{p^\alpha}a^{-1}=V_{p^\alpha}$ и, следовательно, $a=cg$, $c\in\Sigma$. Очевидно, $cG_{p^\alpha}c^{-1}=G'_{p^\alpha}$, $cgc^{-1}=g\tau(c)c^{-1}\in G'_{p^\alpha}$. Поэтому $\sigma=\tau(c)c^{-1}z$. Тогда $cgc^{-1}=g\tau(c)c^{-1}=g\sigma z^{-1}$. Поэтому $cG_{p^\alpha}c^{-1}=G'_{p^\alpha}$.

4. Утверждение 4 следует из теорем 2 и 4. Лемма доказана.

Замечание 3. Из лемм 6 и 9 следует, что в том случае, когда пара $\langle P,p\rangle$ удовлетворяет одному из условий (I)–(III), число классов сопряженных абсолютно неприводимых примитивных локально нильпотентных подгрупп группы $GL(p^t,P)$ определяется двумя параметрами. Первый — это число классов сопряженных подгрупп группы $GL(r,\Sigma)$ вида V_{p^α}. Оно определяется теоремой 5. Второй — индекс $\Sigma^*:N(\Sigma^*)$, где $N(\Sigma^*)$ — множество всех элементов поля Σ, норма которых над P равна 1 (в силу теоремы 90 Гильберта [18, с. 243]). $N(\Sigma^*)=a\mid a\in\Sigma,\ a=\tau(c)(c^{-1}),\ c\in\Sigma\}$, τ — образующий элемент группы $G(\Sigma/P)$.

Теорема 6. *Пусть G — абсолютно неприводимая примитивная локально нильпотентная подгруппа группы $GL(p^t,P)$, $p>2$, $t\geqslant1$, K — коммутант G. Тогда верны следующие утверждения.*

1. $p\leqslant|K|=d\leqslant p^t$.

2. *Если в группе P^* есть элемент порядка d, то G сопряжена в $GL(p^t, P)$ с группой вида $V_{\nu_1 \ldots, \nu_k}(\theta_1, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)$. Если же в P^* нет элемента порядка d, то G сопряжена с группой G_{p^α}, $p^\alpha = \langle K \rangle_P : P$, определяемой леммой 9.*

Утверждения теоремы следуют из лемм 5, 9 и теоремы 4. В случае, когда пара $\langle P, p \rangle$ удовлетворяет условию (IV), редукция к двуступенно нильпотентным группам усложняется тем, что группа Галуа $G(\Sigma/P)$, $\Sigma = P(\varepsilon)$, $\varepsilon^{2^\beta} = 1$, $\Sigma \neq P(i)$, нециклична. Нетрудно видеть, что утверждение 4 леммы 9 в этом случае не имеет места. Пусть Z/P^* — 2-подгруппа Силова факторгруппы Σ^*/P^*. Будем рассматривать Z как подгруппу группы $GL(n, P)$, $n = \Sigma : P$. В силу леммы 3 $G(\Sigma/P)$ — абелева группа с двумя образующими τ_1 и τ_2, $\tau_1(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}$, $\tau_2(i) = i$. Пусть t_1 и t_2 — такие элементы группы $GL(n, P)$, что $t_1 z t_1^{-1} = \tau_1(z)$, $t_2 z t_2^{-1} = \tau_2(z)$ $\forall z \in Z$, $(t_1, t_2) = 1$, $t_1^2, t_2^{p^\alpha} \in P$. Положим $G_\sigma = \{t_1\sigma, t_2(1 + \varepsilon), Z\}$, $\sigma \in P(i)$. Непосредственно проверяется, что G_σ/P^* — 2-группа, коммутант G_σ порождается элементом ε. Отсюда и из теоремы 3 следует, что G_σ — абсолютно неприводимая примитивная максимальная локально нильпотентная подгруппа группы $GL(n, P)$. Нетрудно видеть, что группы G_{σ_1} и G_{σ_2} тогда и только тогда сопряжены в $GL(n, P)$, когда $\sigma_1 = c\sigma_2$, $c \in Z$.

Литература

[1] Супруненко Д. А. Группы матриц. — М.: Наука, 1972.

[2] Супруненко Д. А. Неприводимые нильпотентные матричные группы // Мат. сб. — Т. 31. — С. 353–358.

[3] Супруненко Д. А. О матричных нильпотентных группах // Ученые зап. БГУ. — 1953. — Вып. 15. — С. 1–3.

[4] Супруненко Д. А. О неприводимых нильпотентных матричных группах // Мат. сб. — 1959. — Т. 35. — С. 501–512.

[5] Супруненко Д. А. Локально нильпотентные подгруппы полной линейной группы // Докл. АН СССР. — 1955. — Т. 102. — С. 41–44.

[6] Супруненко Д. А. Вещественные линейные локально нильпотентные группы // Мат. сб. — 1960. — Т. 50 (92). — С. 59–66.

[7] Супруненко Д. А., Апатенок Р. Ф. О нильпотентных линейных группах над конечным полем // Докл. АН БССР. — 1959. — Т. 3, № 12. — С. 475–478.

[8] Супруненко Д. А. Локально нильпотентные матричные группы над произвольным полем // Мат. сб. — 1965. — Т. 68, № 4. — С. 614–622.

[9] Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. Приводимые локально нильпотентные линейные группы // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1960. — Т. 24, № 6. — С. 787–806.

[10] Супруненко Д. А. Неприводимые части приводимой максимальной локально нильпотентной матричной группы // Изв. АН БССР. Сер. мат. — 1968. — Т. 32, № 3. — С. 527–532.

[11] Залесский А. Е. Разрешимые подгруппы мультипликативной группы простой алгебры // Докл. АН БССР. — 1963. — Т. 7. — С. 80–82.

[12] Супруненко Д. А. Линейные p-группы // Докл. АН БССР. — 1960. — Т. 4, № 6. — С. 233–235.

[13] Вольвачев Р. Т. Неприводимый абелев нормальный делитель локально нильпотентной линейной группы // Весцi АН БССР. Сер. Фiз.-мат. — 1966. — № 3. — С. 82–89.

[14] Платонов В. П. Теория алгебраических линейных групп и периодические группы // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1966. — Т. 30. — С. 573–620.

[15] Гаращук М. С. К теории обобщенных линейных групп // Докл. АН БССР. — 1960. — Т. 4, № 7. — С. 276–277.

[16] Конюх В. С. Метабелевы подгруппы полной линейной группы // Докл. АН БССР. — 1978. — Т. 12, № 5. — С. 389–392.

[17] Алгебраическая теория чисел / Под ред. Дж. Касселса и А. Фрелиха. — М.: Мир, 1969.

[18] Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968.

Статья поступила в редакцию в июне 1997 г.