А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин, Актуальные задачи, связанные с последовательностями Битти, *Чебышевский сб.*, 2017, том 18, выпуск 4, 97–106

DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-4-97-105

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 511.35, 517.15 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-97-105

АКТУАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ БИТТИ

А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин (г. Москва)

Аннотация

Последовательностями Битти в англоязычной литературе называют последовательности вида $[\alpha n]$ и, более общо, $[\alpha n+\beta]$, где α — некоторое положительное иррациональное число и β — некоторое вещественное число (если $\beta = 0$, то последовательность называется однородной, в противном случае — неоднородной). В отечественной литературе такие последовательности обычно называются антье-последовательностями специального вида или обобщёнными арифметическими прогрессиями. Изучение свойств этих последовательностей, начатое ещё в конце XIX века, активно продолжается и в наши дни. Настоящая статья содержит обзор основных направлений исследований последовательностей Битти с указанием ключевых результатов.

Исследование распределения простых чисел в последовательностях Битти, начатое в 1970-х годах, было продолжено в 2000-х, когда благодаря привлечению новых методов, удалось получить уточнения остаточных членов в асимптотических формулах. Широкий круг задач связан с суммами значений арифметических функций на последовательностях Битти. Рядом авторов получены асимптотические формулы для суммы значений функции делителей $\tau(n)$ и многомерной функции делителей $\tau_k(n)$, функции суммы делителей $\sigma(n)$, функции Эйлера $\varphi(n)$, характеров Дирихле, числа простых делителей $\omega(n)$. Помимо того, получен ряд результатов в задачах о квадратичных вычетах и невычетах в последовательностях Битти. С 1990-х годов актуальным направлением исследований стали аддитивные задачи, связанные с последовательностями Битти. Изучаются аналоги классических проблем гольдбахова типа, в которых простые числа принадлежат последовательностям Битти, а также иные задачи о представлении натуральных чисел в виде суммы, часть слагаемых которой является членами такой последовательности.

Ключевые слова: последовательность Битти, антье-последовательность, простые числа, среднее значение арифметической функции, суммы.

Библиография: 38 названий.

TOPICAL PROBLEMS CONCERNING BEATTY SEQUENCES

A. V. Begunts, D. V. Goryashin (Moscow)

Abstract

In English-language literature, Beatty sequence means a sequence of the form $[\alpha n]$ and, more generally, $[\alpha n+\beta]$, where α is a positive irrational number, β is a real number (if $\beta = 0$, then the sequence is called homogeneous, otherwise it is called non-homogeneous). In Russian literature, such sequences are usually referred to as greatest-integer sequences of a special form, or as generalized arithmetic progressions. The properties of these sequences have been under extensive study ever since late 19th century and up to nowadays. This paper contains a review of main directions in Beatty sequences research, and points out some key results.

The investigation of the distribution of prime numbers in Beatty sequences, once started in 1970s, was continued in 2000s, when due to application of new methods it became possible to improve estimates of remainder terms in asymptotic formulas. A wide range of tasks deal with sums of the values of arithmetical functions over Beatty sequences. Various authors obtained asymptotic formulas for sums of the values of divisor function $\tau(n)$ and multidimensional divisor function $\tau_k(n)$, of divisor-summing function $\sigma(n)$, of Euler function $\varphi(n)$, of Dirichlet characters, of prime divisor counting function $\omega(n)$. Besides that, there appeared various results concerning quadratic residues and nonresidues in Beatty sequences. Since 1990s additive tasks associated with Beatty sequences became a topical direction of study. Some analogues of classical Goldbach-type problems, where primes belong to Beatty sequences, are under research, along with tasks of representation of integers as a sum, a part of summands of which are members of such a sequence.

Keywords: Beatty sequences, integer sequence, prime numbers, mean value of a number-theoretic function, sums.

Bibliography: 38 titles.

Введение

Наряду с обычными арифметическими прогрессиями в последнее время активно изучаются свойства обобщённых арифметических прогрессий — антье-последовательностей вида $[\alpha n]$ и, более общо, $[\alpha n+\beta]$, где α — некоторое иррациональное число (аналог разности прогрессии), β — некоторое вещественное число (если $\beta=0$, то последовательность называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*). В англоязычной литературе последовательность чисел такого вида называют «Beatty sequence» по имени американского математика Сэмюэла Битти (Samuel Beatty), предложившего в 1926 г. в журнале American Mathematical Monthly [1] задачу о следующем свойстве таких последовательностей: если $\alpha,\beta>1$ — иррациональные числа и $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$, то каждое натуральное число принадлежит ровно одной из последовательностей $[\alpha n]$ и $[\beta n]$, т. е. $\mathbb{N}=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}[\alpha n]\sqcup\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}[\beta n]$. За рубежом это утверждение часто называют не только теоремой Битти, но и теоремой Рейли, так как оно сформулировано в опубликованной в 1894 г. книге Дж. У. Стратта (барона Рейли) [2].

Для некоторых частных иррациональных значений α последовательности Битти $[\alpha n]$ были глубоко исследованы и оказались связанными с различными разделами математики, например, последовательность Битти для $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ называется последовательностью Витхоффа и нашла применение в теории игр [3]. Активное исследование последовательностей Битти и их свойств продолжается и в наши дни, при этом отдельно выделяется класс *медленных* последовательностей Битти, для которых $0<\alpha<1$ (см., например, [4]).

1. Простые числа в последовательности Битти

В 1975 г. Д. Лейтман и Д. Вольке [5] рассмотрели задачу о распределении простых чисел в последовательности Битти. Они установили, что если $\pi(N)$ — количество всех простых чисел, не превосходящих N, а $\pi(N,\alpha)$ — количество тех из них, которые принадлежат последовательности $[\alpha n]$, то для почти всех значений $\alpha>0$ при $N\to\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\pi(N,\alpha)=\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p=[\alpha n],n\in\mathbb{N}}}1=\frac{\pi(N)}{\alpha}+O(N^{7/8+\varepsilon}),$$

где $\varepsilon>0$ произвольно. Таким образом, среди чисел вида $[\alpha n]$, $n\in\mathbb{N}$, содержится «правильная» доля всех простых чисел.

Отметим также, что для случая иррациональных алгебраических значений α Д. Лейтман и Д. Вольке получили асимптотическую формулу

$$\pi(N,\alpha) = \frac{\pi(N)}{\alpha} + O(Ne^{-c\sqrt{\ln N}}),$$

где $c = c(\alpha) > 0$ — некоторая постоянная.

Отечественные исследования по этой тематике инициировали профессора Г. И. Архипов и В. Н. Чубариков, поставившие своим ученикам ряд задач, связанных с изучением различных свойств антье-последовательностей. А. В. Бегунц [6, 7] получил новые оценки остаточного члена в асимптотических формулах для $\pi(N,\alpha)$. Его основной результат формулируется следующим образом. Пусть $\alpha > 0$ — иррациональное число, $\nu \geqslant 2$, и пусть неравенство

$$\left|\frac{1}{\alpha} - \frac{a}{q}\right| \geqslant \frac{1}{q^\nu}$$

имеет место для любых достаточно больших значений q и всех чисел a, взаимно простых с q. Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\pi(N,\alpha) = \frac{\pi(N)}{\alpha} + O(N^{\varkappa+\varepsilon}),$$

где $\varkappa = \max(1 - \frac{1}{2\nu}; 0{,}8)$, а $\varepsilon > 0$ произвольно. В частности, оценка остаточного члена в этой формуле вида $O(N^{0{,}8+\varepsilon})$ верна в двух следующих случаях: а) если иррациональное число α имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим; б) для почти всех вещественных значений $\alpha > 0$.

В 2009 г. В. Д. Бэнкс и И. Е. Шпарлинский [8] рассматривали задачу о простых числах более общего вида $p = q[\alpha n + \beta] + a$, где q и a — фиксированные натуральные числа, а также о простых числах в последовательности Битти $[\alpha n + \beta]$, принадлежащих заданной арифметической прогрессии. Дальнейшее обобщение этой задачи в 2016 г. предложил М. Мкауар [9], рассмотрев задачу о простых числах вида $p = [\alpha n + \beta]$ с дополнительным ограничением вида $f(p) \equiv a \pmod b$, где f — сильно q-аддитивная функция (например, число цифр в q-ичной системе счисления).

В 2016 г. Й. Стединг и М. Текнау [10] доказали аналог теоремы Линника о наименьшем простом числе в арифметической прогрессии для последовательности Битти $[\alpha n + \beta]$, где $\alpha > 1$ иррационально.

2. Суммы значений арифметических функций на последовательности Битти

Распределение значений других арифметических функций на числах вида $[\alpha n]$ изучалось многими авторами, при этом основные результаты можно условно разделить на три направления:

— результаты, связанные с показателем иррациональности числа α, в частности, справедливые для алгебраических чисел или чисел с ограниченными неполными частными;

— результаты, справедливые для для почти всех вещественных значений $\alpha > 0$;

— результаты, общие для широкого класса арифметических функций на данном классе последовательностей Битти.

Исследованы суммы значений функции делителей $\tau(n)$ (А. Г. Аберкромби [11], А. В. Бегунц [12], Ж. С. Лю и В. Г. Жай [13]) и многомерной функции делителей $\tau_k(n)$ (В. Г. Жай [14]), функции суммы делителей $\sigma(n)$ и функции Эйлера $\varphi(n)$ (А. В. Бегунц [15]), характеров Дирихле, числа простых делителей $\omega(n)$ (В. Д. Бэнкс и И. Е. Шпарлинский [16, 17, 18]).

Для всех перечисленных арифметических функций доказываются результаты вида

$$\sum_{n\leqslant N} f([\alpha n]) = \frac{1}{\alpha}\sum_{m\leqslant \alpha N} f(m) + R(N), \tag{1}$$

где $R(N)$ — остаточный член. Оценка величины $R(N)$, как правило, сводится к оценке тригонометрических сумм вида

$$\sum_{n\leqslant N} f(n)e^{2\pi i\alpha n}, \quad \sum_{m\leqslant M}\left|\sum_{n\leqslant N} f(n)e^{2\pi i\alpha mn}\right|. \tag{2}$$

В 2009 г. А. Г. Аберкромби, В. Д. Бэнкс и И. Е. Шпарлинский [19], применяя несколько другой подход, доказали асимптотическую формулу вида (1) для произвольной арифметической функции $f(n)$ и для почти всех значений $\alpha > 1$ со следующей оценкой остаточного члена:

$$R(N) \ll N^{\frac{2}{3}+\varepsilon} M(f, N),$$

где $M(f,N) = 1 + \max\{|f(n)|, n \leqslant N\}$. Отметим, что методы этой работы неприменимы для случая каких-либо конкретных иррациональных значений α (например, алгебраических).

В 2008 г. А. М. Гулоглу и К. В. Неванс [20], опираясь на оценку тригонометрических сумм вида (2) с мультипликативными коэффициентами $f(n)$, полученную Х. Монтгомери и Р. Воном [21], доказали следующую теорему: если $\alpha > 1$ — иррациональное число конечного типа[1], β — вещественное число и $f(n)$ — такая мультипликативная функция, что $|f(p)| \leqslant A$ для всех простых чисел p и $\sum\limits_{n\leqslant N} |f(n)|^2 \leqslant A^2 N$ для всех натуральных N, где $A \geqslant 1$ — некоторая постоянная, то

$$\sum_{[\alpha n+\beta]\leqslant N} f([\alpha n+\beta]) = \frac{1}{\alpha}\sum_{n\leqslant N} f(n) + O\left(\frac{N\ln\ln N}{\ln N}\right). \tag{3}$$

Условиям этой теоремы удовлетворяют, например, характеристические функции чисел, представимых в виде суммы двух квадратов, бесквадратных чисел и чисел, свободных от k-х степеней, а также функция $\frac{r_4(n)}{n}$, где $r_4(n)$ — количество представлений n в виде суммы четырех квадратов.

В 2013 г. Д.В. Горяшин рассмотрел двойственные задачи о распределении точных квадратов [22] и бесквадратных чисел [23] в последовательности Битти и получил асимптотические формулы с оценкой остатков (в частности, для случая бесквадратных чисел в формуле (3) получена более точная оценка остатка вида $O(N^{\frac{5}{6}+\varepsilon})$, если α — иррациональное алгебраическое число); им также доказано, что бесквадратные числа с чётным и нечётным числом простых делителей распределены в последовательности $[\alpha n]$ асимптотически поровну.

Ряд авторов рассматривали задачи о квадратичных вычетах и невычетах, а также первообразных корнях по заданному модулю в последовательности Битти (С. Н. Преображенский [24, 25, 26], М. З. Гараев [27], В. Д. Бэнкс и И. Е. Шпарлинский [16, 17]).

В 2008 г. В. Д. Бэнкс, М. З. Гараев, Д. Р. Хис-Браун и И. Е. Шпарлинский в совместной работе [28] доказали следующий результат: если α иррационально, то наименьший квадратичный невычет по модулю p в последовательности Битти $[\alpha n+\beta]$ не превосходит $p^{\frac{1}{4\sqrt{e}}+\varepsilon}$ для всех достаточно больших простых чисел p. Эта оценка соответствует известной границе Берджесса для наименьшего квадратичного невычета, являющейся наилучшей до сих пор.

[1]Числами конечного типа являются почти все вещественные числа, а также все алгебраические числа.

3. Аддитивные задачи, связанные с последовательностями Битти

В 1997 г. Г. И. Архипов, К. Буриев и В. Н. Чубариков [29] рассмотрели особое множество в бинарной проблеме гольдбахова типа — о представлении натурального числа N в виде $p_1 + [\alpha p_2]$, где p_1, p_2 — простые числа. Для его мощности они получили следующую оценку: если α — алгебраическое число, то $|E(N,\alpha)| \ll N^{\frac{7}{9}+\varepsilon}$. В 2000 г. Й. Брюдерн [30] показал, что из работы [31] вытекает оценка $|E(N,\alpha)| \ll N^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$, и рассмотрел более общую задачу о представлении числа N в виде $[\lambda_1 p_1] + [\lambda_2 p_2]$, где p_1, p_2 — простые числа. Для особого множества в этой задаче он получил оценку $|E(N,\lambda_1,\lambda_2)| \ll N^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, если $\lambda_1, \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ — алгебраические числа, причём $1, \lambda_1, \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$. В 2002 г. Г. И. Архипов и В. Н. Чубариков [32] при одном лишь условии, что $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ — иррациональное алгебраическое число, получили более сильную оценку: $|E(N,\lambda_1,\lambda_2)| \ll N^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$. Существенную роль в её доказательстве играет лемма о мере множества «больших дуг» в разбиении Фарея (ее полное доказательство опубликовано в статье Г. И. Архипова и В. Н. Чубарикова [33]; см. также [31, лемма 4]).

В 1999 г. С. Ю. Фаткина [34] рассмотрела видоизмененную тернарную проблему Гольдбаха о числе представлений натурального числа N в виде $N = p_1 + p_2 + [\sqrt{2}p_3]$, где p_1, p_2, p_3 — простые числа, с почти равными слагаемыми, т. е. с условиями $\frac{N}{3} - U < p_1 < \frac{N}{3} + U$, $\frac{N}{3} - U < p_2 < \frac{N}{3} + U$, $\frac{N}{3} - U < [\sqrt{2}p_3] < \frac{N}{3} + U$. Пользуясь методами работ Г. И. Архипова, К. Буриева и В. Н. Чубарикова, при $U = N^{\frac{5}{8}} \ln^c N$ (c — некоторая константа) она доказала следующую асимптотическую формулу для количества таких представлений:

$$I(N,U,\sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{U^2}{\ln^3 N} + O\left(\frac{U^2}{\ln^4 N}\right).$$

В. Д. Бэнкс, А. М. Гулоглу и К. В. Неванс [35] рассматривали задачу о представлении достаточно больших натуральных чисел в виде $N = p_1 + p_2 + \ldots + p_\nu$, где $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ — простые числа из последовательности $[\alpha n + \beta]$, $\nu \geqslant 3$, α — иррациональное число, $1 < \alpha < \nu$. А. Кумчев [36] обобщил их результаты на случай, когда каждое из простых чисел p_i принадлежит своей последовательности вида $[\alpha_i n + \beta_i]$, где хотя бы одно из отношений α_i/α_j иррационально, $1 \leqslant i, j \leqslant \nu$.

В работах [37, 38] Д. В. Горяшин получил асимптотические формулы со степенным понижением для количеств разбиений натурального числа N на одно и два бесквадратных слагаемых и слагаемое вида $[\alpha q]$, где q также бесквадратное, т. е. для количества представлений числа N в виде $q_1 + [\alpha q_2] = N$, и в виде $q_1 + q_2 + [\alpha q_3] = N$, соответственно, где q_1, q_2, q_3 — бесквадратные числа, $\alpha > 1$ — фиксированное иррациональное алгебраическое число.

Заключение

Обилие и разнообразие полученных в последнее время результатов свидетельствуют о том, что исследования, связанные с последовательностями Битти, по-прежнему актуальны. Можно ожидать, что применение новых методов позволить не только решить вновь поставленные задачи, но и улучшить результаты, достигнутые ранее.

В заключение авторы приносят благодарность своему научному руководителю профессору В. Н. Чубарикову, познакомившему их с этой тематикой, за полезные обсуждения при подготовке статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beatty S. Problem 3173 // Amer. Math. Monthly. 1926. Vol. 33, №3. P. 159.
2. Strutt J. W., 3rd Baron Rayleigh. The Theory of Sound. 1 (Second ed.). Macmillan. 1894. P. 123.
3. Wythoff, W. A. A modification of the game of nim // Nieuw Archief voor WisKunde. 1907. Vol. 7, №2. P. 199-202.
4. Kimberling C. and Stolarsky K. B. Slow Beatty sequences, devious convergence, and partitional divergence. // Amer. Math. Monthly. 2016. Vol. 123, №2. P. 267-273.
5. Leitman D., Wolke D. Primzahlen der Gestalt $[f(n)]$ // Math. Z. 1975. Vol. 45. P. 81-92.
6. Бегунц А. В. О простых числах в одной антье-последовательности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2004. №2. С. 71-74.
7. Бегунц А. В. О простых числах в антье-последовательности специального вида // Чебышевский сборник. 2006, Т. 7, №1. С. 163-171.
8. Banks W. D., Shparlinski I. E. Prime numbers with Beatty sequences // Colloq. Math. 2009. Vol. 115, №1. P. 9-16.
9. Mkaouar M. Beatty sequences and prime numbers with restrictions on strongly q-additive functions // Periodica Mathematica Hungarica. 2016. Vol. 72, №2. P. 139-150.
10. Steuding J., Technau M. The Least Prime Number in a Beatty Sequence // J. Number Theory. 2016. Vol. 169. P. 144-159.
11. Abercrombie A. G. Beatty sequences and multiplicative number theory // Acta Arith. 1995. Vol. 70. P. 195-207.
12. Бегунц А. В. Об одном аналоге проблемы делителей Дирихле // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2004. №6. Р. 52-56.
13. Lü G. S., Zhai W. G. The divisor problem for the Beatty sequences // Acta Math. Sinica. 2004. Vol. 47. P. 1213-1216.
14. Zhai W. G. A note on a result of Abercrombie // Chinese Sci. Bull. 1997. Vol. 42. P. 1151-1154.
15. Бегунц А. В. О распределении значений сумм мультипликативных функций на обобщенных арифметических прогрессиях // Чебышевский сборник. 2005, Т. 6, №2. С. 52-74.
16. Banks W. D., Shparlinski I. E. Non-residues and primitive roots in Beatty sequences // Bull. Austral. Math. Soc. 2006. Vol. 73. P. 433-443.
17. Banks W. D., Shparlinski I. E. Short character sums with Beatty sequences // Math. Res. Lett. 2006. Vol. 13. P. 539-547.
18. Banks W. D., Shparlinski I. E. Prime divisors in Beatty sequences // J. Number Theory. 2007. Vol. 123, №2. P. 413-425.
19. Abercrombie A. G., Banks W. D., Shparlinski I. E. Arithmetic functions on Beatty sequences // Acta Arith. 2009. Vol. 136. №1. P. 81-89.

20. Güloğlu A. M., Nevans C. W. Sums of multiplicative functions over a Beatty sequence // Bull. Austral. Math. Soc. 2008. Vol. 78. P. 327-334.

21. Montgomery H. L., Vaughan R. C. Exponential sums with multiplicative coefficients // Invent. Math. 1977. Vol. 43 №1. P. 69-82.

22. Горяшин Д. В. Точные квадраты вида $[\alpha n]$ // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14. №2. С. 68-73.

23. Горяшин Д. В. Бесквадратные числа в последовательности $[\alpha n]$ // Чебышевский сборник. 2013, Т. 14. №3. С. 60-66.

24. Преображенский С. Н. О наименьшем квадратичном невычете в арифметической последовательности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2001. №1. С. 54-56.

25. Преображенский С. Н. О степенных невычетах по простому модулю в специальной антье-последовательности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2001. №4. С. 59-60.

26. Преображенский С. Н. О наименьшем степенном невычете в антье-последовательности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2004. №1. С. 48-49.

27. Garaev M. Z. A note on the least quadratic non-residue of the integer sequences // Bull. Austral. Math. Soc. 2003. Vol. 68. P. 1-11.

28. Banks W. D., Garaev M. Z., Heath-Brown D. R., Shparlinski I. E. Density of non-residues in Burgess-type intervals and applications // Bull. London Math. Soc. 2008. Vol. 40. P. 88-96.

29. Архипов Г. И., Буриев К., Чубариков В. Н. О мощности особого множества в бинарных аддитивных задачах с простыми числами // Труды МИАН. 1997. Т. 218. С. 28-57.

30. Brüdern J. Some additive problems of Goldbach's type // Funct. et Approx. Comment. Math. 2000. Vol. 28. P. 45-73.

31. Brüdern J., Cook R.J., Perelli A. The Values of Binary Linear Forms at Prime Arguments // Sieve Methods, Exponential Sums and Their Applications in Number Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1997. P. 87-100.

32. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об исключительном множестве в бинарной проблеме гольдбахова типа // Докл. АН. 2002. Т. 387. №3. С. 295-296.

33. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. О мере «больших дуг» в разбиении Фарея // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, №4. С. 35-38.

34. Фаткина С. Ю. О представлении натурального числа суммой трех почти равных слагаемых, порожденных простыми числами // УМН. 2000. Т. 55, №1. С. 197-198.

35. Banks W., Güloğlu A. M., Nevans C. W. Representations of integers as sums of primes from a Beatty sequence // Acta Arith. 2007. Vol. 130. P. 255-275.

36. Kumchev A. V. On sums of primes from Beatty sequences // Integers. 2008. Vol. 8. P. 1-12.

37. Горяшин Д. В. Об одной аддитивной задаче с бесквадратными числами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013, Т. 13. №4. С. 41-47.

38. Горяшин Д. В. Бинарная аддитивная задача с бесквадратными числами // Ученые записки Орловского гос. ун-та. 2013. №6 (56). С. 38-41.

REFERENCES

1. Beatty, S. 1926, “Problem 3173“, *Amer. Math. Monthly*, vol. 33, no. 3, p. 159.
2. Strutt, J. W., 3rd Baron Rayleigh. 1894, *The Theory of Sound*. 1 (Second ed.), Macmillan, London, p. 123.
3. Wythoff, W. A. 1907, “A modification of the game of nim“, *Nieuw Archief voor WisKunde*, vol. 7, no. 2, pp. 199-202.
4. Kimberling, C., Stolarsky, K. B. 2016, “Slow Beatty sequences, devious convergence, and partitional divergence“, *Amer. Math. Monthly*, vol. 123, no. 2, pp. 267-273.
5. Leitman, D., Wolke, D. 1975, “Primzahlen der Gestalt $[f(n)]$“, *Math. Z.*, vol. 45, pp. 81-92.
6. Begunts, A. V. 2004, “On prime numbers in an integer sequence“, *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 59, no. 2, pp. 60–63.
7. Begunts, A. V. 2006, “On prime numbers in a greatest-integer sequence of a special form“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 7, no. 1, pp. 163-171. (Russian)
8. Banks, W. D., Shparlinski, I. E. 2009, “Prime numbers with Beatty sequences“, *Colloq. Math.*, vol. 115, no. 1, pp. 9-16.
9. Mkaouar, M. 2016, “Beatty sequences and prime numbers with restrictions on strongly q-additive functions“, *Periodica Mathematica Hungarica*, vol. 72, no. 2, pp. 139-150.
10. Steuding, J., Technau, M. 2016, “The Least Prime Number in a Beatty Sequence“, *J. Number Theory*, vol. 169, pp. 144-159.
11. Abercrombie, A. G. 1995, “Beatty sequences and multiplicative number theory“, *Acta Arith.*, vol. 70, pp. 195-207.
12. Begunts, A. V. 2004, “On an analogue of the dirichlet divisor problem“, *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 59, no. 6, pp. 37–41.
13. Lü, G. S., Zhai, W. G. 2004, “The divisor problem for the Beatty sequences“, *Acta Math. Sinica*, vol. 47, pp. 1213-1216.
14. Zhai, W. G. 1997, “A note on a result of Abercrombie“, *Chinese Sci. Bull.*, vol. 42, pp. 1151-1154.
15. Begunts, A. V. 2005, “On the distribution of the values of sums of multiplicative functions on generalized arithmetic progressions“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 6, no. 2, pp. 52-74.
16. Banks, W. D., Shparlinski, I. E. 2006, “Non-residues and primitive roots in Beatty sequences“, *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. 73, pp. 433-443.
17. Banks, W. D., Shparlinski, I. E. 2006, “Short character sums with Beatty sequences“, *Math. Res. Lett.*, vol. 13, pp. 539-547.
18. Banks, W. D., Shparlinski, I. E. 2007, “Prime divisors in Beatty sequences“, *J. Number Theory*, vol. 123, no. 2, pp. 413-425.
19. Abercrombie, A. G., Banks, W. D., Shparlinski, I. E. 2009, “Arithmetic functions on Beatty sequences“, *Acta Arith.*, vol. 136. no. 1, pp. 81-89.

20. Güloğlu, A. M., Nevans, C. W. 2008, "Sums of multiplicative functions over a Beatty sequence", *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. 78, pp. 327-334.

21. Montgomery, H. L., Vaughan, R. C. 1977, "Exponential sums with multiplicative coefficients", *Invent. Math.*, vol. 43, no. 1, pp. 69-82.

22. Goryashin, D.V. 2013, "Perfect squares of the form $[\alpha n]$". *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 14. no. 2, pp. 68-73. (Russian)

23. Goryashin, D.V. 2013, "Squarefree numbers in the sequence $[\alpha n]$", *Chebyshevskii Sbornik*, 2013, vol. 14. no. 3, pp. 60-66. (Russian)

24. Preobrazhenskii, S. N. 2001, "On the least quadratic non-residue in an arithmetic sequence", *Moscow Univ. Math. Bull.*, no. 56, pp. 44-46.

25. Preobrazhenskii, S. N. 2001, "On power non-residues modulo a prime number in a special integer sequence", *Moscow Univ. Math. Bull.*, no. 56, pp. 41-42.

26. Preobrazhenskii, S. N. 2004, "On the least power non-residue in an integer sequence", *Moscow Univ. Math. Bull.*, no. 59, pp. 33-35.

27. Garaev, M. Z. 2003, "A note on the least quadratic non-residue of the integer sequences", *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. 68, pp. 1-11.

28. Banks, W. D., Garaev, M. Z., Heath-Brown, D. R. & Shparlinski, I. E. 2008, "Density of non-residues in Burgess-type intervals and applications", *Bull. London Math. Soc.*, vol. 40, pp. 88-96.

29. Arkhipov, G. I., Buriev, K., Chubarikov, V. N. 1997, "On the power of a singular set in binary additive problems with prime numbers", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 218, pp. 23-52.

30. Brüdern, J. 2000, "Some additive problems of Goldbach's type", *Funct. et Approx. Comment. Math.*, vol. 28, pp. 45-73.

31. Brüdern, J., Cook, R. J. & Perelli, A. 1997, "The Values of Binary Linear Forms at Prime Arguments", *Sieve Methods, Exponential Sums and Their Applications in Number Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 87-100.

32. Arkhipov, G. I., Chubarikov, V. N. 2002, "The exceptional set in a Goldbach–type binary problem", *Doklady Mathematics*, vol. 66, no. 3, pp. 338–339.

33. Arkhipov, G. I., Chubarikov V. N. 2011. "On the measure of "large arcs" in the Farey partition", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 12, no. 4, pp. 39-42. (Russian)

34. Fatkina, S.Yu. 2000, "On the representation of a natural number as a sum of three almost equal terms generated by primes", *Russian Math. Surveys*, vol. 55, no. 1, pp. 171–172.

35. Banks, W., Güloğlu, A. M. & Nevans, C. W. 2007, "Representations of integers as sums of primes from a Beatty sequence", *Acta Arith.*, vol. 130, pp. 255-275.

36. Kumchev, A. V. 2008, "On sums of primes from Beatty sequences", *Integers*, vol. 8, pp. 1-12.

37. Goryashin, D. V. 2013, "On an additive problem with squarefree numbers", *Izv. Sarat. Univ. (N.S.), Ser. Mat. Mekh. Inform.*, vol. 13, no. 4(2), pp. 41-47. (Russian)

38. Goryashin D. V., 2013. "Binary additive problem with squarefree numbers", *Sci. Notes Orel State Univ.*, 2013. vol. 6, no. 56, pp. 38-41. (Russian)

Механико-математический факультет
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Получено 10.10.2017
Принято в печать 15.12.2017