Функциональный анализ и его приложения,
1984, т. 18, вып. 3, 57—62.

УДК 512.863

КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В КОНЕЧНОМЕРНОМ УНИТАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. Сергейчук

В статье предлагается более простой, чем в [1, 2], алгоритм приведения матрицы к каноническому виду преобразованиями унитарного подобия и дается описание матриц канонического вида.

Эта задача равносильна, в смысле работы [3], следующей более общей задаче, которая также решается предлагаемым алгоритмом. По аналогии с определением представления колчана [4] будем говорить, что задано унитарное представление ориентированного графа (допускаются петли и кратные дуги), если каждой его вершине v сопоставлено конечномерное унитарное пространство U_v, каждой дуге λ из v в w — линейное отображение φ_λ: $U_v \to U_w$. Требуется классифицировать все унитарные представления.

Выбрав во всех пространствах $U_v, U_w, \ldots$ ортонормированные базисы, получим систему матриц A_λ отображений φ_λ: $U_v \to U_w$. При перевыборе ортонормированных базисов матрица A_λ преобразуется в $B_\lambda = S_w^{-1} A_\lambda S_v$, где S_v, S_w — унитарные матрицы перехода к новым базисам. Поэтому классификация унитарных представлений ориентированного графа сводится к классификации систем матриц A_λ с точностью до таких преобразований. Нам будет удобнее задавать систему матриц A_λ в виде блоков одной блочной матрицы. В этой статье некоторые квадратные блоки рассматриваемых блочных матриц могут быть выделены штриховкой.

Определение 1. Унитарной задачей назовем следующую матричную задачу. Блочная матрица $A = (A_{ij})$ эквивалентна матрице $B = (S_i^{-1} A_{ij} R_j)$ с тем же расположением заштрихованных блоков, где S_i, R_j — унитарные матрицы, причем $S_i = R_j$ как только блок A_{ij} заштрихован. Требуется в каждом классе эквивалентных блочных матриц выбрать одну «каноническую» матрицу.

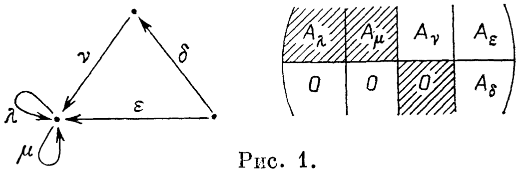


Рис. 1.

Переход к эквивалентной матрице будем называть допустимым преобразованием. В частности, матрица, состоящая из одного блока, приводится преобразованиями унитарной эквивалентности, если блок не заштрихован, унитарного подобия, если блок заштрихован.

Матрицы унитарного представления ориентированного графа можно разместить в блочной матрице так, что допустимые преобразования с ней будут соответствовать перевыбору базисов в унитарном представлении. Например, рис. 1.

§ 1. Алгоритм решения унитарной задачи

Прямой суммой матриц A и B будем называть матрицу $A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. В частности, $A \oplus 0_{m0} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \oplus 0_{0n} = (A 0)$, где 0_{m0} и 0_{0n} — «пустые» нулевые матрицы размера $m \times 0$ и $0 \times n$ соответственно, они задают линейные отображения пространств, одно из которых нульмерно.

Нам потребуются две леммы. Первая хорошо известна, вторая усиливает лемму Шура и содержится в работе [2].

Л е м м а 1. а) *Каждая матрица A унитарно эквивалентна матрице*

$$D = a_1E_1 \oplus \ldots \oplus a_{k-1}E_{k-1} \oplus 0, \tag{1}$$

где $a_1 > \ldots > a_{k-1} > 0$ — действительные числа; $E_1, \ldots, E_{k-1}$ — единичные матрицы; 0 — нулевая матрица размера $p \times q$, $p, q \geqslant 0$.

б) *Если $S^{-1}DR = D$, где S, R — унитарные матрицы; D — матрица вида (1), то $S = S_1 \oplus \ldots \oplus S_{k-1} \oplus S'$, $R = S_1 \oplus \ldots \oplus S_{k-1} \oplus R'$, S_i имеет равный с E_i размер.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Пусть $A = (a_{ij})$, $A^* = (\bar{a}_{ji})$, где $a \to \bar{a}$ — комплексное сопряжение. Матрица A^*A эрмитова, поэтому найдется унитарная матрица U такая, что $U^*A^*AU = \operatorname{diag}(b_1^2, \ldots, b_r^2, 0, \ldots, 0)$, где $b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_r > 0$ — действительные числа. Первые r столбцов матрицы AU попарно ортогональны, остальные столбцы нулевые. Обозначим через V любую унитарную матрицу, первые r столбцов которой те же, что и у матрицы $AU \operatorname{diag}(b_1^{-1}, \ldots, b_r^{-1}, 0, \ldots, 0)$. Тогда V^*AU имеет вид (1).

б) Поскольку $S^{-1}DR = D$, $S^* = S^{-1}$, $R^* = R^{-1}$, $D^* = D$, то $R^*D^*S^{*-1} = D^*$, $R^{-1}DS = D$. Отсюда $D^2S = SD^2$, $D^2R = R^2D$, поэтому S, R имеют блочно-диагональный вид.

Будем считать комплексные числа лексикографически упорядоченными: $a + bi \geqslant c + di$, если $a > c$, либо $a = c$, $b \geqslant d$.

Л е м м а 2. а) *Каждая квадратная матрица A унитарно подобна блочно-треугольной матрице*

$$F = (F_{ij}), \quad F_{ij} = 0 \quad \textit{при} \quad i < j, \quad F_{ii} = \lambda_i E_i, \tag{2}$$

где $i, j = 1, \ldots, k$; E_i — единичная матрица, $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k$, причем $F_{i+1,\, i}$ невырождена по строкам при $\lambda_i = \lambda_{i+1}$.

б) *Пусть $S^{-1}FS = F'$, где S — унитарная матрица; $F = (F_{ij})$ и $F' = (F'_{ij})$ вида (2), причем $F_{ij} = F'_{ij}$ при $i \leqslant j$. Тогда $S = S_1 \oplus \ldots \oplus S_k$, где S_i имеет равный с F_{ii} размер.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Пусть φ — оператор в унитарном пространстве V, заданный в некотором ортонормированном базисе матрицей A, $(x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_k)$ — его минимальный многочлен , $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k$. Выберем в пространстве V ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ такой, что $e_{s_i+1}, \ldots, e_n$ — базис пространства $(\varphi - \lambda_1 I) \ldots (\varphi - \lambda_i I)\, V$, где I — тождественный оператор, $1 \leqslant i < k$. Матрица оператора φ в этом базисе имеет вид (2), деления на блоки проходят между s_i-й и $(s_i + 1)$-й строками и между s_i-м и $(s_i + 1)$-м столбцами, $1 \leqslant i < k$.

б) Пусть $S = (S_{ij})$ разбита на блоки того же размера, что и $F = (F_{ij})$. Последовательно рассматривая в матрице $FS = SF'$ блоки с индексами $(1, k)$, $(1, k - 1), \ldots, (1, 1)$; $(2, k)$, $(2, k - 1), \ldots, (2, 2)$; $(3, k)$, $(3, k - 1), \ldots, (3, 3)$; ... и используя невырожденность по строкам блоков $F_{i+1,\, i}$ при $\lambda_{i+1} = \lambda_i$, получаем $S_{ij} = 0$ для всех $i < j$. Отсюда из унитарности S следует, что $S_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$. Лемма доказана.

Блок, не меняющийся при допустимых преобразованиях с блочной матрицей, назовем приведенным. Будем считать блоки лексикографически упорядоченными по индексам: $A_{11}, A_{12}, A_{13}, \ldots$ Унитарная задача принадлежит к классу матричных задач, которые А. В. Ройтер предложил называть самовоспроизводящимися: если в блочной матрице привести первый неприведенный блок к виду (1) или (2) и в дальнейшем ограничиться теми допустимыми преобразованиями, которые «не портят» вида этого блока, то полученная задача снова будет унитарной. Она определяется следующим образом.

Определение 2. Пусть A_{pq} — первый неприведенный блок матрицы $A = (A_{ij})$. В зависимости от расположения заштрихованных блоков он приводится преобразованиями унитарной эквивалентности или подобия. Приведем $A = (A_{ij})$ к матрице $\bar{A} = (\bar{A}_{ij})$, где в первом случае $\bar{A}_{pq} = a_1E_1 \oplus \oplus \ldots \oplus a_{k-1}E_{k-1} \oplus 0$ вида (1) и подблоки $a_1E_1, \ldots, a_{k-1}E_{k-1}$ заштрихованы, во втором случае $\bar{A}_{pq} = (F_{\alpha\beta})$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, k$, вида (2), и если A_{pq} был заштрихован, то подблоки $F_{11}, F_{22}, \ldots, F_{kk}$ заштрихованы. Блок $\bar{A}_{pq}$ разбит на k горизонтальных и k вертикальных полос, продолжим это разбиение на всю p-ю горизонтальную и всю q-ю вертикальную полосы матрицы $\bar{A}$. Если новые деления проходят через заштрихованный блок $\bar{A}_{ij}$, проведем еще перпендикулярные им деления так, чтобы он разбился на подблоки $\bar{A}_{ij} = (B_{\alpha\beta})$ с квадратными подблоками $B_{11}, B_{22}, \ldots, B_{kk}$ и снимем штриховку с подблоков $B_{\alpha\beta}$, $\alpha \neq \beta$. Так поступим со всеми заштрихованными блоками, через которые проходят новые деления. Полученную новую блочную матрицу назовем производной от блочной матрицы $A = (A_{ij})$ и обозначим A'.

Отметим, что A' определяется с точностью до эквивалентности.

Лемма 3. *Если блочные матрицы A, B эквивалентны, то и их производные A', B' эквивалентны.*

Доказательство. При построении A' мы вначале переходим к эквивалентной матрице $\bar{A} = (\bar{A}_{ij})$, приводя блок A_{pq} к виду (1) или (2). Очевидно, при построении B' приводится блок B_{pq} с теми же p, q. Так как A, B эквивалентны, то и $\bar{A}$, $\bar{B}$ эквивалентны, т. е. $\bar{B} = (S_i^{-1}\bar{A}_{ij}R_j)$, $\bar{B}_{pq} = S_p^{-1}A_{pq}R_q$. В силу лемм 1, б) и 2, б) S_p и R_q имеют блочно-диагональный вид, согласованный с дополнительным делением A' и B' на блоки. Лемма доказана.

Рассмотрим последовательность производных матриц: $A, A', A'', \ldots, A^{(t)}, \ldots$ Так как производная матрица содержит больше заштрихованных блоков, то эта последовательность закончится на некоторой матрице $A^{(s)}$, $s \geqslant 0$, для которой производная уже не определена. Это означает, что допустимые преобразования с матрицей $A^{(s)}$ не меняют ни один ее блок, т. е. $A^{(s)}$ эквивалентна только себе. Если при этом A эквивалентна B, то по лемме 3 $A^{(s)}$ эквивалентна $B^{(s)}$, а следовательно, $A^{(s)} = B^{(s)}$.

Определение 3. Пусть A — блочная матрица, $A^{(s)}$ — ее s-я производная, причем $(s + 1)$-я производная не определена. Укрупним в $A^{(s)}$ блоки до размеров блоков матрицы A и заштрихуем блоки, одинаково расположенные с заштрихованными блоками матрицы A. Полученную блочную матрицу назовем канонической и обозначим A^{∞}.

Из сказанного выше следует

Теорема 1. *Блочная матрица A эквивалентна канонической матрице A^{∞}. Если A, B эквивалентны, то $A^{\infty} = B^{\infty}$.*

§ 2. Схема канонической матрицы относительно преобразований унитарного подобия

Будем изучать строение канонической матрицы A^{∞}. Для простоты ограничимся случаем, когда исходная матрица A состоит из одного заштрихованного блока, т. е. приводится преобразованиями унитарного подобия.

Прямоугольник размера $m \times n$, разбитый на единичные клетки, назовем $(m \times n)$-прямоугольником (n-квадратом при $m = n$). Клетку, расположенную в i-й горизонтали и j-й вертикали, считая сверху вниз и слева направо, будем задавать парой (i, j), $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Каноническую матрицу A^{∞} размера $n \times n$ будем схематически изображать разбитым на зоны n-квадратом, в котором некоторые из клеток отмечены. Для этого сопоставим каждому элементу a_{ij} матрицы клетку (i, j). Матрица A^{∞} строится по A последовательным приведением блоков. Пусть A_{pq} — один из приводимых блоков. Если новый блок $\bar{A}_{pq}$ имеет вид (1), то сопоставленные его элементам клетки образуют зону, каждая клетка, сопоставленная ненулевому элементу, отмечена помещенным в ее центр кружком, причем кружки, соответствующие равным элементам из $\bar{A}_{pq}$, соединены линией. Если же $\bar{A}_{pq} = (F_{\alpha\beta})$ вида (2), то объединение клеток, сопоставленных элементам всех блоков $F_{\alpha\beta}$, $\alpha \leqslant \beta$, образует зону, причем клетки, расположенные на главной диагонали зоны, отмечены звездочками.

Пример канонической матрицы и ее схематическое изображение даны на рис. 2.

Мы предложим следующее описание множества канонических матриц A^∞. Вначале дадим явное определение множества всех схем вида рис. 2. Затем для каждой схемы опишем все канонические матрицы с этой схемой.

$$\begin{pmatrix} 3+i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3+i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & i & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & i & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

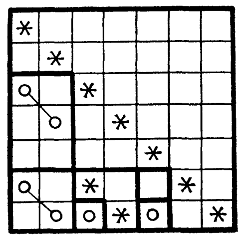
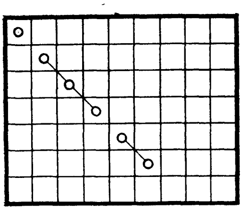


Рис. 2.

Зоной эквивалентности размера $m \times n$ назовем $(m \times n)$-прямоугольник, в котором либо нет отмеченных клеток, либо отмечены кружками клетки $(1, 1), (2, 2), \ldots, (t, t)$ для некоторого $t \leqslant \min(m, n)$. Два соседних кружка могут быть соединены линией. Высотой кружка назовем число кружков ниже него, с которыми он соединен.

Зоной подобия размера $n \times n$ назовем n-квадрат, в котором все клетки главной диагонали отмечены звездочками и, возможно, для некоторых натуральных чисел $t < n$ удалены все клетки (i, j), $i > t \geqslant j$. Высотой звездочки назовем число расположенных под ней клеток зоны.



,

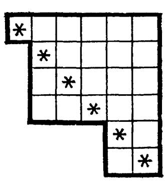


Рис. 3.

Приведем пример зоны эквивалентности и зоны подобия (рис. 3). Высоты их меток образуют последовательность 0, 2, 1, 0, 1, 0.

Определение 4. Схемой размера $n \times n$ назовем n-квадрат, разбитый на зоны эквивалентности и подобия, причем есть зона подобия размера $n \times n$ и для каждой другой зоны Z выполняется условие

(A) Пусть (α, β) — верхняя левая клетка зоны Z. Удалим метки из зоны Z и зон, все клетки (i, j) которых лексикографически следуют за (α, β): $i > \alpha$, либо $i = \alpha$, $j > \beta$. Назовем i-м углом ($1 \leqslant i \leqslant n$) объединение клеток $(i, 1), (i, 2), \ldots, (i, i), (i + 1, i), \ldots, (n, i)$. Два угла назовем сцепленными, если их можно включить в последовательность углов, в которой каждые два соседних имеют общий кружок. Пусть h_i — наименьшая из высот меток i-го угла и сцепленных с ним углов. Тогда $(h_\alpha + 1) \times (h_\beta + 1)$ — размер зоны Z, причем Z — зона эквивалентности, если α-й и β-й углы не сцеплены, зона подобия,— если сцеплены.

Созвездием схемы назовем набор ее звездочек $(\alpha, \beta), (\alpha + 1, \beta + 1), \ldots$ $\ldots, (\alpha + k, \beta + k)$ такой, что высота звездочки (α, β) равна k и либо (α, β) — верхняя звездочка зоны, либо звездочка $(\alpha - 1, \beta - 1)$ высоты 0.

Определение 5. Матрицей со схемой S назовем матрицу $A = (a_{ij})$ ее размера, удовлетворяющую условиям:

1. Если клетка (i, j) неотмечена, то $a_{ij} = 0$.

2. Если (i, j) — кружок, то a_{ij} — положительное действительное число. Если $(i + 1, j + 1)$ — кружок из той же зоны, то $a_{ij} \geqslant a_{i+1,\, j+1}$, причем $a_{ij} = a_{i+1,j+1}$ тогда и только тогда, когда кружки соединены линией.

3. Если $(\alpha, \beta), \ldots, (\alpha + k, \beta + k)$ — созвездие, то $a_{\alpha\beta} = \ldots = a_{\alpha+k,\beta+k}$. Если $(\alpha + k + 1, \beta + k + 1), \ldots, (\alpha + s, \beta + s)$ — созвездие из той же зоны, то комплексные числа $a_{\alpha\beta} = a + bi$, $a_{\alpha+k+1,\beta+k+1} = c + di$ лексикографически упорядочены: $a > c$ либо $a = c$, $b \geqslant d$. При $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha+k+1,\beta+k+1}$ невырожден по строкам блок (a_{ij}), $\alpha + k + 1 \leqslant i \leqslant \alpha + s$, $\beta \leqslant j \leqslant \beta + k$.

Пример матрицы со схемой приведен на рис. 2.

Т е о р е м а 2. *Множество канонических матриц A^∞ совпадает с множеством матриц со схемами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Схемой канонической матрицы будет определенное в начале параграфа ее схематическое изображение. Обратно, если A — матрица со схемой, то $A^\infty = A$.

О п р е д е л е н и е 6. Для схемы размера $n \times n$ ее графом назовем граф с вершинами $1, 2, \ldots, n$, в котором i и j соединены ребром тогда и только тогда, когда клетка (i, j) содержит кружок.

Например, схема на рис. 2 имеет граф

$$\begin{array}{c} 5 \\ | \\ 4-2-7-3-1-6 \end{array}$$

Л е м м а 4. *Граф схемы есть объединение деревьев.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отсутствие циклов объясняется условием (А), определяющим тип зоны в схеме.

Будем писать $A \equiv B$, если матрица A может быть получена из матрицы B перестановкой строк и такой же перестановкой столбцов (преобразование унитарного подобия).

Л е м м а 5. *Если матрица $A = A_1 \oplus A_2$, то $A^\infty \equiv A_1^\infty \oplus A_2^\infty$, причем взаимное расположение строк и столбцов внутри матрицы A_α^∞ $(\alpha = 1, 2)$ то же, что и в A^∞.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что для матрицы A существует последовательность производных матриц $A, A', A'', \ldots, A^{(t)} = (A_{ij}^{(t)}), \ldots$, удовлетворяющая условиям:

1. $A_{ij}^{(t)} = X_{1ij}^{(t)} \oplus X_{2ij}^{(t)}$, допускаются пустые слагаемые 0_{0n}, 0_{m0}.

2. $X_{\alpha ij}^{(t)}$ при фиксированных α, t образуют блочную матрицу. Обозначим ее через $X_\alpha^{(t)} = (X_{\alpha ij}^{(t)})$ и заштрихуем блок $X_{\alpha ij}^{(t)}$, если заштрихован блок $A_{i\,j}^{(t)}$.

3. $X_\alpha^{(t)}$ есть производная матрица $A_\alpha^{(l_\alpha)}$ для некоторого $l_\alpha \leqslant t$, возможно, пополненная пустыми полосами.

Это утверждение можно доказать индукцией по t. Пусть $A^{(t)}$ имеет требуемый вид, $A_{pq}^{(t)} = X_{1pq}^{(t)} \oplus X_{2pq}^{(t)}$ — ее первый неприведенный блок (см. определение 2). Очевидно, можно отдельно привести $X_{1pq}^{(t)}$ и $X_{2pq}^{(t)}$, затем перестановкой полос получить приведение для $A_{pq}^{(t)}$. В результате получим требуемый вид для $A^{(t+1)}$.

Квадратную матрицу назовем неразложимой, если унитарными преобразованиями подобия ее нельзя привести к прямой сумме матриц меньшего размера.

Т е о р е м а 3. *Каждая квадратная матрица A унитарно подобна определяемой однозначно, с точностью до перестановки слагаемых, прямой сумме неразложимых канонических матриц. Эта сумма может быть получена следующим образом. Пусть граф G схемы канонической матрицы A^∞ есть объединение деревьев G_i с вершинами $v_{i1} < v_{i2} < \ldots < v_{ir_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant$*

$\leqslant m$). *Переставим столбцы матрицы A^∞ так, чтобы их старые номера образовали последовательность*

$$v_{11}, \ldots, v_{1r_1};\ v_{21}, \ldots, v_{2r_2};\ \ldots;\ v_{m1}, \ldots, v_{mr_m},$$

затем так же переставим строки. Полученная матрица будет прямой суммой неразложимых канонических матриц A_i размера $r_i \times r_i$ ($1 \leqslant i \leqslant m$).

Доказательство. Пусть матрица A унитарно подобна $B_1 \oplus \oplus \ldots \oplus B_s$, где $B_i = B_i^\infty$ — неразложимая каноническая матрица. По теореме 1 и лемме 5, $A^\infty = (B_1 \oplus \ldots \oplus B_s)^\infty \equiv B_1 \oplus \ldots \oplus B_s$, причем расположение строк и столбцов внутри B_i то же, что и в A^∞. Пусть $w_{i1}, \ldots, w_{il_i}$ — номера строк матрицы A^∞, образующих матрицу B_i, достаточно доказать, что это множество вершин связной компоненты графа G. Если вершины $w_{i\alpha} > w_{j\beta}$ соединены ребром, то клетка $(w_{i\alpha}, w_{j\beta})$ схемы отмечена кружком и ей соответствует ненулевой элемент матрицы A^∞, что ввиду $A^\infty \equiv \equiv B_1 \oplus \ldots \oplus B_s$ возможно лишь при $i = j$. С другой стороны, любые две вершины $w_{i\alpha}, w_{i\beta}$ связаны в графе G, так как иначе $B_i \equiv X \oplus Y$, что противоречит неразложимости B_i.

Следствие. *Число кружков в схеме канонической матрицы размера $n \times n$ не превышает $n - 1$. Их число равно $n - 1$ тогда и только тогда, когда матрица неразложима.*

Доказательство. Число вершин графа G схемы канонической матрицы размера $n \times n$ равно n, число ребер — числу кружков в ее схеме. Граф G есть объединение деревьев, поэтому число его ребер меньше n, причем равно $n - 1$, лишь если G — дерево, что в силу теоремы 3 равносильно неразложимости матрицы.

Определение 7. Схему размера $n \times n$ назовем простой, если число ее кружков равно $n - 1$ и все звездочки, расположенные на главной диагонали, имеют высоту 0.

Схема канонической матрицы простая тогда и только тогда, когда матрица неразложима и каждое ее собственное число имеет лишь один, с точностью до скалярного множителя, собственный вектор (например, нет кратных собственных чисел).

Теорема 4. *Простая схема полностью определяется своим графом. Графом простой схемы может быть любое дерево с занумерованными вершинами.*

Доказательство. Пусть G — дерево с вершинами $1, \ldots, n$. В n-квадрате отметим кружком клетки (i, j) для каждой пары соединенных ребром вершин $i > j$. Звездочкой отметим клетки главной диагонали, а также клетки (i_1, i_m) для каждой последовательности вершин $i_1, i_2, \ldots, i_m$ ($m \geqslant 3$), в которой вершины $i_\alpha, i_{\alpha+1}$ ($1 \leqslant \alpha < m$) соединены ребром и $i_2 < < \min(i_1, i_m)$, $i_3 < i_1, \ldots, i_m < i_1$. Зоной объявим объединение клеток (i, j), $i \leqslant j$, а также каждую клетку (i, j), $i > j$. В результате получим простую схему с графом G. Очевидно, дерево G не может быть графом никакой другой простой схемы.

Поскольку число деревьев с вершинами $1, \ldots, n$ равно n^{n-2} (см. [5]), то и число простых схем размера $n \times n$ равно n^{n-2}.

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Brenner J.* The problem of unitary equivalence.— Acta Math., 1951, v. 86, № 2, p. 297—308.
2. *Radjavi H.* On unitary equivalence of arbitrary matrices.— Trans. Amer. Math. Soc., 1962, v. 104, № 2, p. 363—373.
3. *Кругляк С. А., Самойленко Ю. С.* Об унитарной эквивалентности наборов самосопряженных операторов.— Функц. анализ, 1980, т. 14, вып. 1, с. 60—62.
4. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen I.— Manuscripta Math., 1972, v. 6, p. 71—103.
5. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973.

Киевский государственный университет

Поступила в редакцию 17 марта 1983 г.