Н. Н. Кравченко, Геометрический анализ обобщенной задачи Якоби,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 4, 69–73

тела в сопротивляющейся среде//Седьмой Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механ. (15—21.08.1991): Тез. докл. М., 1991. 305.
8. Шамолин М. В. Качественный анализ модельной задачи о движении тела в среде со струйным обтеканием. М., 1991.
9. Шамолин М. В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1992. № 1. 52—58.
10. Шамолин М. В. Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1992. № 2. 52—56.
11. Чаплыгин С. А. Избранные труды. М., 1976.
12. Гуревич Г. И. Теория струй идеальной жидкости. М., 1979.
13. Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. М., 1975.
14. Пали Дж., Смейл С. Теоремы структурной устойчивости//Сб. пер. Математика. 1969. 13, № 2. 145—155.
15. Шамолин М. В. Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки для динамических систем на плоскости//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1993. № 1. 68—71.
16. Шамолин М. В. Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1993. № 2. 66—70.

Поступила в редакцию
08.04.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 4

УДК 531.351

Н. Н. Кравченко

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ЯКОБИ

1. Как показал Якоби [1], задача о движении материальной точки по поверхности эллипсоида под действием упругой силы, направленной к его центру, вполне интегрируема. В [2] построены бифуркационные диаграммы в задаче Якоби и ее вырождениях, когда одна из полуосей эллипсоида устремляется к нулю. В [3] показано, как эти результаты можно перенести на случай пространства постоянной ненулевой кривизны.

С этой целью рассмотрим трехмерную сферу

$$x^2+y^2+z^2+l^2=1 \tag{1}$$

и двумерную поверхность на ней, которая является пересечением сферы и конуса:

$$\frac{x^2}{\mu^2+\alpha^2}+\frac{y^2}{\mu^2-\beta^2}+\frac{z^2}{\mu^2-\gamma^2}+\frac{l^2}{\mu^2}=0. \tag{2}$$

Эта поверхность — аналог двумерного эллипсоида в обычном трехмерном пространстве.

Рассмотрим сначала задачу о движении материальной частицы по трехмерной сфере (1) в сфероконических координатах (ξ, η, μ), которые определяются как корни уравнения

$$f(\lambda^2)=\frac{x^2}{\lambda^2-\alpha^2}+\frac{y^2}{\lambda^2+\beta^2}+\frac{z^2}{\lambda^2+\gamma^2}+\frac{l^2}{\lambda^2}=0.$$

Справедливо соотношение

$$\frac{x^2}{\lambda^2-\alpha^2}+\frac{y^2}{\lambda^2+\beta^2}+\frac{z^2}{\lambda^2+\gamma^2}+\frac{l^2}{\lambda^2}=\frac{(\lambda^2-\xi^2)(\lambda^2+\eta^2)(\lambda^2+\mu^2)}{(\lambda^2-\alpha^2)(\lambda^2+\beta^2)(\lambda^2+\gamma^2)\lambda^2}. \tag{3}$$

Так как

$$\frac{x^2}{\xi^2-\alpha^2}+\frac{y^2}{\xi^2+\beta^2}+\frac{z^2}{\xi^2+\gamma^2}+\frac{l^2}{\xi^2}=0,$$

$$\frac{x^2}{\eta^2+\alpha^2}+\frac{y^2}{\eta^2-\beta^2}+\frac{z^2}{\eta^2-\gamma^2}+\frac{l^2}{\eta^2}=0,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2+\alpha^2}+\frac{y^2}{\mu^2-\beta^2}+\frac{z^2}{\mu^2-\gamma^2}+\frac{l^2}{\mu^2}=0,$$

$$x^2+y^2+z^2+l^2=1.$$

то отсюда следует, что координатные линии являются линиями пересечения сферы и конфокальных конусов.

Пусть для определенности $\alpha^2<\beta^2<\gamma^2$. Формулы преобразования координат можно получить из (3):

$$\begin{aligned} x^2&=\frac{(\alpha^2-\xi^2)(\alpha^2+\eta^2)(\alpha^2+\mu^2)}{\alpha^2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)},\\ y^2&=\frac{(\beta^2+\xi^2)(\beta^2-\eta^2)(\beta^2-\mu^2)}{\beta^2(\beta^2+\alpha^2)(\beta^2-\gamma^2)},\\ z^2&=\frac{(\gamma^2+\xi^2)(\gamma^2-\eta^2)(\gamma^2-\mu^2)}{\gamma^2(\gamma^2+\alpha^2)(\gamma^2-\beta^2)},\\ l^2&=\frac{\xi^2\eta^2\mu^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

При этом должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases} 0\leqslant\xi^2\leqslant\alpha^2,\\ 0\leqslant\eta^2\leqslant\beta^2,\\ \beta^2\leqslant\mu^2\leqslant\gamma^2 \end{cases}\text{или}\quad \begin{cases} 0\leqslant\xi^2\leqslant\alpha^2,\\ \beta^2\leqslant\eta^2\leqslant\gamma^2,\\ 0\leqslant\mu^2\leqslant\beta^2. \end{cases} \tag{5}$$

Пусть p_ξ, p_η, p_μ — канонически сопряженные импульсы. Запишем кинетическую энергию T в новых координатах:

$$2T=\frac{(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2+\xi^2)(\gamma^2+\xi^2)}{(\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\mu^2)}p_\xi^2+\frac{(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2-\eta^2)(\gamma^2-\eta^2)}{(\xi^2+\eta^2)(\mu^2-\eta^2)}p_\eta^2+$$
$$+\frac{(\alpha^2+\mu^2)(\beta^2-\mu^2)(\gamma^2-\mu^2)}{(\xi^2+\mu^2)(\eta^2-\mu^2)}p_\mu^2.$$

Поместим источник упругого притяжения или отталкивания в точки $(\pm1,0,0,0)$. Согласно [3] потенциальная энергия определяется как

$$V=\frac{k}{2}\operatorname{tg}^2\vartheta,$$

где $k=\text{const}$, ϑ — угол между радиус-векторами точек $(\pm1,0,0,0)$ и частицы. Эту функцию без учета несущественной постоянной можно переписать как

$$V=\frac{a}{x^2},\ \text{где } a=\text{const (см. [3])}.$$

Воспользовавшись формулами преобразования координат (4) и введя для краткости обозначение $A=\alpha^2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)$, найдем выражение для потенциальной энергии в сфероконических координатах:

$$V=\frac{aA}{(\alpha^2-\xi^2)(\alpha^2+\eta^2)(\alpha^2+\mu^2)}=$$

$$=\frac{aA}{\xi^2+\eta^2}\left[\frac{1}{\xi^2+\mu^2}\left(\frac{1}{\alpha^2-\xi^2}-\frac{1}{\alpha^2+\mu^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\mu^2-\eta^2}\left(\frac{1}{\alpha^2+\eta^2}-\frac{1}{\alpha^2+\mu^2}\right)\right].$$

2. Зафиксируем значение переменной μ, положив $\mu=\mu_0=\text{const}$. Тогда получим выражение для гамильтониана обобщенной задачи Якоби о движении частицы по квадрике (1), (2):

$$H=\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left[\frac{(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2+\xi^2)(\gamma^2+\xi^2)}{2(\xi^2+\mu_0^2)}p_\xi^2+\right.$$

$$+\frac{(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2-\eta^2)(\gamma^2-\eta^2)}{2(\mu_0^2-\eta^2)}p_\eta^2+\frac{aA}{\xi^2+\mu_0^2}\left(\frac{1}{\alpha^2-\xi^2}-\frac{1}{\alpha^2+\mu_0^2}\right)-$$

$$\left.-\frac{aA}{\mu_0^2-\eta^2}\left(\frac{1}{\alpha^2+\eta^2}-\frac{1}{\alpha^2+\mu_0^2}\right)\right].$$

Отсюда видно, что переменные ξ и η разделяются. Зафиксируем постоянную интеграла энергии, положив $H=h$. Домножим левую и правую части интеграла энергии на $(\xi^2+\eta^2)$, получим два дополнительных первых интеграла G_1 и G_2:

$$G_1=\frac{1}{\xi^2+\mu_0^2}\left[\frac{1}{2}(\alpha^2-\xi^2)(\beta^2+\xi^2)(\gamma^2+\xi^2)p_\xi^2+\right.$$

$$\left.+aA\left(\frac{1}{\alpha^2-\xi^2}-\frac{1}{\alpha^2+\mu_0^2}\right)\right]-h\xi^2,$$

$$G_2=\frac{1}{\eta^2-\mu_0^2}\left[-\frac{1}{2}(\alpha^2+\eta^2)(\beta^2-\eta^2)(\gamma^2-\eta^2)p_\eta^2+\right.$$

$$\left.+aA\left(\frac{1}{\alpha^2+\eta^2}-\frac{1}{\alpha^2+\mu_0^2}\right)\right]-h\eta^2.$$

Зафиксируем постоянную интеграла G_1, положив $G_1=g$ (тогда $G_2=-g$). Из условия $G_1=g$, $G_2=-g$ найдем канонические импульсы p_ξ и p_η как функции ξ и η:

$$p_\xi^2=\frac{2(\xi^2+\mu_0^2)}{(\alpha^2-\xi^2)^2(\beta^2+\xi^2)(\gamma^2+\xi^2)(\alpha^2+\mu_0^2)}\left[(h\xi^2+g)(\alpha^2-\xi^2)(\alpha^2+\mu_0^2)-aA\right],$$

$$p_\eta^2=\frac{2(\mu_0^2-\eta^2)}{(\alpha^2+\eta^2)^2(\beta^2-\eta^2)(\gamma^2-\eta^2)(\alpha^2+\mu_0^2)}\left[(h\eta^2-g)(\alpha^2+\eta^2)(\alpha^2+\mu_0^2)+aA\right].$$

Анализируя эти выражения с учетом (5), заключаем, что должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases}(h\xi^2+g)(\alpha^2-\xi^2)(\alpha^2+\mu_0^2)-aA\geqslant 0,\\ (h\eta^2-g)(\alpha^2+\eta^2)(\alpha^2+\mu_0^2)+aA\geqslant 0.\end{cases}\qquad(6)$$

Положим $R=(\alpha^2+\mu_0^2)^2(g+h\alpha^2)^2-4aAh(\alpha^2+\mu_0^2)$,

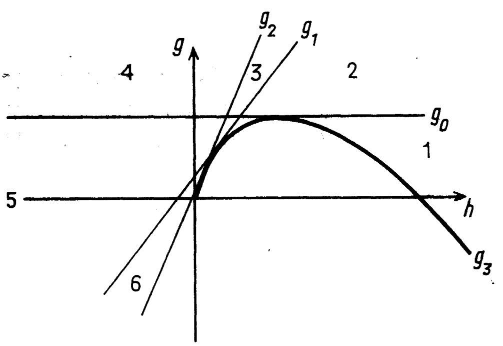
$$\nu_1=\frac{(-g+h\alpha^2)(\alpha^2+\mu_0^2)-\sqrt{R}}{2h(\alpha^2+\mu_0^2)},\quad \nu_2=\frac{(-g+h\alpha^2)(\alpha^2+\mu_0^2)+\sqrt{R}}{2h(\alpha^2+\mu_0^2)},$$

$$\varkappa_1=\frac{(g-h\alpha^2)(\alpha^2+\mu_0^2)-\sqrt{R}}{2h(\alpha^2+\mu_0^2)},\quad \varkappa_2=\frac{(g-h\alpha^2)(\alpha^2+\mu_0^2)+\sqrt{R}}{2h(\alpha^2+\mu_0^2)}.$$

Тогда решения неравенств (6) имеют вид

$$\begin{cases} \nu_1\leqslant\xi^2\leqslant\nu_2, \\ \left[\begin{array}{l}\eta^2\geqslant\varkappa_2,\\ \eta^2\leqslant\varkappa_1,\end{array}\right.\end{cases} \text{если } h>0;\qquad \begin{cases} \nu_2\leqslant\xi^2\leqslant\nu_1, \\ \left[\begin{array}{l}\eta^2\geqslant\varkappa_1,\\ \eta^2\leqslant\varkappa_2,\end{array}\right.\end{cases} \text{если } h<0.$$

3. Исследуя возможные случаи расположения корней ν_1, ν_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ между числами α^2, β^2, γ^2, получим соответствующие им области на бифуркационной диаграмме. Напомним, что бифуркационной диаграммой называется объединение бифуркационных кривых, а бифуркационная кривая — это множество пар значений (h, g), при которых интегралы H и G_1 зависимы. Бифуркационная диаграмма рассматриваемой задачи для случая $a>0$ изображена на рисунке, где для бифуркационных кривых приняты следующие обозначения:



$$g_0(h)=\frac{a(\alpha^2+\gamma^2)(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2+\mu_0^2}=\text{const},$$

$$g_1(h)=\beta^2h+\frac{a\alpha^2(\alpha^2+\gamma^2)}{\alpha^2+\mu_0^2},$$

$$g_2(h)=\gamma^2h+\frac{a\alpha^2(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2+\mu_0^2},$$

$$g_3(h)=-\alpha^2h+\sqrt{\frac{4aA}{\alpha^2+\mu_0^2}h}.$$

Бифуркационные кривые $g_i(h)$ $(i=0, 1, 2, 3)$ и $h=0$ разбивают плоскость (h, g) на несколько областей. Указанные на рисунке области 1—6 соответствуют областям возможности движения.

В заключение отметим, что в случае, когда μ_0^2 стремится к одному из своих предельных значений $(0,\ \beta^2$ или $\gamma^2)$, получаем задачу о движении точки по двумерной сфере в трехмерном пространстве и можем указать области на сфере, в которых будет происходить движение. Кроме того, если точка с координатами (h, g) находится на бифуркационной кривой, удается дать простое описание движения.

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору В. В. Козлову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Якоби К. Лекции по динамике. Л.; М., 1936.
2. Ильинская Н. Н. Геометрический анализ задачи о гармоническом осцилляторе в эллипсе//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1991. № 1. 88—92.
3. Kozlov V. V., Harin A. O. Kepler's problem in constant curvature spaces//Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1992. N 54. 393—399.

Поступила в редакцию
18.05.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 4

УДК 531.01+521.1

Т. В. Сальникова

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Рассмотрим задачу трех тел в следующей постановке [1]. Две точки одинаковой массы описывают в плоскости (x, y) эллиптические орбиты, симметричные относительно оси z, а третья точка нулевой массы все время остается на оси z (рис. 1). Этот вариант ограниченной задачи был предложен А. Н. Колмогоровым для анализа финальных движений трех гравитирующих тел.

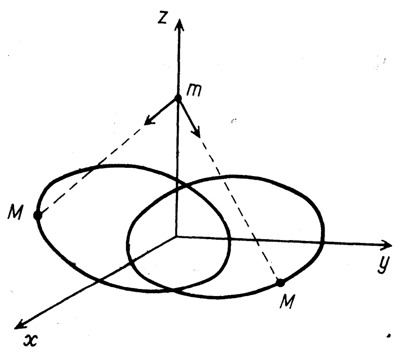


Рис. 1

На точку m действует сила гравитационного притяжения с силовой функцией

$$U=\frac{\gamma}{\sqrt{z^2+r^2(t)}},$$

где $r(t)=1/[1+e\cos\varphi(t)]$, e — эксцентриситет эллиптической орбиты. Далее положим $\varphi\equiv t$, $\gamma=1$, в качестве малого параметра примем $\varepsilon=e\ll 1$. Тогда функция Гамильтона

$$H=\frac{p^2}{2}-\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

может быть записана в следующем виде:

$$H=H_0+\varepsilon H_1+o(\varepsilon),$$

$$H_0=\frac{p^2}{2}-\frac{1}{(1+z^2)^{1/2}},\quad H_1=-\frac{\cos t}{(1+z^2)^{3/2}}.$$

Для изучения периодических решений при малых значениях $\varepsilon>0$ введем переменные действие — угол I, φ невозмущенной задачи с гамильтонианом H_0. Из интеграла энергии $H_0=h$ получим условие

$$\frac{p^2}{2}=h+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\geqslant 0.$$