Доклады Академии наук СССР
1966. Том 171, № 3

УДК 513.831 МАТЕМАТИКА

В. ГОЛЬШТИНСКИЙ

# НУЛЬМЕРНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА КОНЕЧНОМЕРНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

*(Представлено академиком П. С. Александровым 1 II 1966)*

Определение. Подмножество $A$ метризуемого топологического пространства $(X, T)$ назовем стационарным, если во множестве $X$ существует согласованная с топологией $T$ метрика $\rho$ (т. е. метрика, удовлетворяющая условию $T_\rho = T$, где $T_\rho$ — индуцированная метрикой $\rho$ топология), причем выполнено условие:

(У). Для любого непрерывного отображения $f\colon X \to X$, для которого $\rho(x, f(x)) < 1$ для всех точек $x \in X$, имеет место соотношение $A \cap \cap f(X) = \phi$.

Заметим, что если пространство $(X, \rho)$ является компактным метрическим пространством, то множество $A \subset X$ тогда и только тогда стационарно в топологическом пространстве $(X, T_\rho)$, когда существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого непрерывного отображения $f/ X \to X$, удовлетворяющего условию $\rho(x, f(x)) < \varepsilon$ для всех точек $x \in X$, имеет место $A \cap \cap f(X) \neq \phi$.

В этой заметке мы доказываем существование «малых» стационарных множеств в указанном ниже смысле

Теорема. *В любом конечномерном (в смысле* dim) *метризуемом пространстве* $(X, T)$ *существует нульмерное замкнутое стационарное подмножество.*

Доказательство. Пусть $\dim X = n$, где $n$ — натуральное число (случаи $n = 1$ и $n = 0$ исключаем как тривиальные). Тогда, как известно, существуют такие замкнутые множества $A_i \subset X$, $i = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$, что для любой системы замкнутых перегородок $F_i$ между множествами $A_{-i}$ и $A_i$, $l = 1, 2, \ldots, n$, имеем

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \phi.$$

Но с другой стороны, поскольку пространство $(X, T)$ метризуемо, $\dim X = \operatorname{Ind} X$, и поэтому существуют такие замкнутые перегородки $F_i$, что $\dim \bigcap_{i=1}^{k} F_i = n - k$. В частности, $\dim \bigcap_{i=1}^{n} F_i = 0$. Докажем, что множество $F = \bigcap_{i=1}^{n} F_i$ является стационарным.

Действительно, пусть $\rho_0$ — какая-нибудь метрика в пространстве $X$, согласованная с топологией $T$, и пусть $g_i\colon X \to I$ — такие непрерывные отображения пространства $X$ в отрезок $I = [-1, 1]$, что $g_i(x) = \varepsilon$ для всех точек $x \in A_{\varepsilon i}$, $\varepsilon = -1$ или 1, и $g_i(x) = 0$ для всех точек $x \in F_i$, наконец, $0 < |g_i(x)| < 1$ для всех точек $x \in X \setminus (A_{-i} \cup F_i \cup A_i)$. Определим новую метрику в пространстве $X$ при помощи равенства

$$\rho(x, y) = \rho_0(x, y) + \max_i |g_i(x) - g_i(y)|.$$

Метрика $\rho$ тоже согласована с топологией $T$.

Пусть теперь $f\colon X \to X$ — произвольное непрерывное отображение, причем $\rho(x, f(x)) < 1$ для всех $x \in X$. Тогда $g_i f(x) < 0 < g_i f(y)$ для всех точек $x \in A_{-i}$, $y \in A_i$, откуда вытекает, что множества $(g_i f)^{-1}(0)$ являются перегородками между множествами $A_{-i}$ и $A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Значит, существует такая точка $x \in X$, что $g_i f(x) = 0$ для всех номеров $i = 1, 2, \ldots, n$. Но тогда $f(x) \in F$, т. е. $F \cap f(x) \neq \phi$. Теорема доказана.

Этот результат можно обобщить.

Определение*. Подмножество $A$ топологического пространства $(X, T)$ назовем стационарным, если существует определенная в нем непрерывная псевдометрика $\rho$, для которой выполнено условие (У).

Тогда имеет место

Теорема*. *В любом совершенно-нормальном пространстве* $(X, T)$, *для которого* $\dim X = \operatorname{Ind} X < \infty$, *существует замкнутое стационарное нульмерное подмножество.*

Проблема. Существует ли метризуемое пространство, не содержащее нульмерного замкнутого стационарного подмножества? Является ли таким пространством гильбертов кирпич $I^{\aleph_0}$.

Варшавский университет
Варшава, ПНР

Поступило
17 XII 1965