Поля определения рациональных функций одной переменной с тремя критическими значениями

В. О. ФИЛИМОНЕНКОВ
Институт Новых Технологий Образования

Г. Б. ШАБАТ
Российский Государственный Гуманитарный Университет

Аннотация

Рассматриваются рациональные функции одной комплексной переменной с тремя критическими значениями. В силу теории Гротендика такие функции классифицируются изотопическими классами связных сферических графов. Подходящей дробно-линейной заменой переменной коэффициенты таких функций можно сделать алгебраическими числами. Работа посвящена проблеме минимизации степеней иррациональности этих коэффициентов.

Abstract

V. O. Filimonenkov, G. B. Shabat, Fields of definition of rational functions of one variable with three critical values, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika **1**(1995), 781–799.

Rational functions of one complex variable with three critical values are considered. According to Grothendieck theory, such functions are classified by the isotopic classes of the connected spherical graphs. By a suitable fractional-linear variable substitution these coefficients can be transformed to algebraic numbers. The paper is devoted to the problem of minimization of irrationality degrees of these coefficients.

1 Введение

Непостоянную рациональную функцию одной переменной с коэффициентами из алгебраически замкнутого поля можно рассматривать как отображение проективной прямой над этим полем на себя. Прообразы почти всех (то есть всех, кроме конечного числа) точек при таком отображении состоят из одинакового количества точек, называемого *степенью* рациональной функции. Точка проективной прямой называется *критическим значением* функции, если количество точек в ее прообразе меньше степени.

Наша работа посвящена теории рациональных функций одной переменной с комплексными коэффициентами и с малым количеством критических значений; точнее, мы занимаемся функциями с тремя критическими значениями. Выбор числа “три” не случаен. Теория функций с меньшим количеством

Фундаментальная и прикладная математика 1995, **1**, № 3, 781–799.

критических значений тривиальна: с точностью до дробно-линейной замены переменной такие функции эквивалентны возведению в степень. Теория функций с количеством критических значений, превосходящим три, является трансцендентной. В случае же трех критических значений теория сводится, с одной стороны, к комбинаторной топологии, а с другой — к арифметике.

Мы называем *функциями Белого* такие рациональные функции одной переменной с тремя критическими значениями, что кратность всех ветвлений над одним из критических значений равна двум. Как мы объясняем в п. 2, общая теория рациональных функций с тремя критическими значениями сводится к теории функций Белого. Прообраз отрезка, соединяющего это двукратное критическое значение с одним из двух других, оказывается связным сферическим графом. Мы называем этот граф *эскизом* функции Белого.

С одной стороны, классификация функций Белого (с точностью до дробно-линейных замен аргумента) равносильна классификации связных сферических графов (с точностью до сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов сферы). Мы объясняем это в п. 2. С другой стороны, в пп. 3–4 мы показываем, что коэффициенты произвольной функции Белого с помощью подходящей дробно-линейной замены переменной можно сделать алгебраическими числами, т. е. задача классификации функций Белого является, по сути, арифметической.

Рассматриваемая конструкция является частным случаем более общей, описанной в *программе Гротендика*. Эта программа исследований намечена в неопубликованной работе [6], в которой указано соответствие между связными графами на компактных ориентируемых поверхностях и алгебраическими кривыми над числовыми полями. Подробности можно найти в [7], а соответствие в случае рода 0 мы строим в п. 2 настоящей работы.

Упомянутый произвол в выборе функции Белого из класса функций, различающихся дробно-линейной заменой аргумента, на первый взгляд кажется малоинтересным и действительно является таковым с точки зрения теории функций *комплексной* переменной: он преодолевается, например, переводом в 0, 1 и ∞ произвольной тройки прообразов критических значений. Преодоление этого произвола, однако, приводит к содержательным *арифметическим* вопросам.

Основная проблема, рассматриваемая в статье, состоит в *минимизации степени иррациональности коэффициентов функции Белого с помощью дробно-линейных замен аргумента.*

Для каждого класса функций Белого, получаемых друг из друга дробно-линейными заменами аргумента, с помощью теории Галуа вводится понятие *поля определения класса.* Это поле является "нижней границей" нашей задачи минимизации: оно заведомо содержится в поле, полученном из поля $\mathbf{Q}$ рациональных чисел присоединением коэффициентов любой функции из класса.

Первый естественный вопрос заключается в том, всегда ли можно найти представителя класса функций Белого с коэффициентами из поля определения класса. Мы даем отрицательный ответ на этот вопрос: в п. 6 мы показываем, что препятствие к нахождению такого представителя лежит в когомологиях Галуа. В пп. 11–12 мы приводим конкретные примеры, для которых это препятствие нетривиально. Более того, таких примеров бесконечно много: это следует из доказанной в п. 9 теоремы о том, что каждое когомологическое препятствие встречается для подходящего класса функций Белого.

Возникает задача нахождения представителя класса функций, лежащего в расширении поля определения класса минимальной возможной степени. Результаты п. 7 дают наилучший возможный результат: в классе функций Белого, получаемых друг из друга дробно-линейными заменами аргумента, *существует представитель, определенный над не более чем квадратичным расширением поля определения класса.* Независимо от нас эта теорема доказана Кувенем в [5].

Неразрешимость задачи нахождения представителя класса функций Белого с коэффициентами из поля определения класса является все же скорее исключением, чем правилом; например, в п. 8 доказано, что при некоторых незначительных ограничениях для разрешимости этой задачи достаточно, чтобы число нулей или полюсов функции Белого хотя бы одной какой-либо кратности было нечетным.

Мы признательны Н. Адрианову, А. Звонкину, Ю. Кочеткову, Ж. Остерле, А. Суворову и В. Шабату за проявленный интерес и плодотворное обсуждение представленных здесь результатов и Ж.-М. Кувеню, предоставившему нам свои результаты до их публикации.

2 Описание конструкции Гротендика в случае рода 0

Определение 1. *Функцией Белого* называется рациональная функция одной комплексной переменной, у которой ровно три критических значения, причем все ветвления над одним из них двукратны.

Дробно-линейным преобразованием функции можно перевести критические значения функции Белого в три наперед заданных точки. В дальнейшем мы будем рассматривать в основном функции Белого, у которых одна критическая точка лежит в бесконечности, а две конечные в 0 и 1. Будем предполагать, что двукратны ветвления над 1.

Замечание. Теория функций с тремя критическими значениями сводится к теории функций Белого, поскольку если f — функция с критическими значениями 0, 1 и ∞, то $4f(1-f)$ — функция Белого.

Определение 2. Два связных сферических графа D_1 и D_2 называются *изотопически эквивалентными*, если существует такой сохраняющий ориентацию сферы гомеоморфизм φ, что $\varphi(D_1) = D_2$. Изотопический класс эскиза D будем обозначать $[D]$.

Конструкция Гротендика для рода 0 состоит в следующем взаимнооднозначном соответствии:

Изотопические классы связных сферических графов	$\longleftrightarrow$	Классы функций Белого с точностью до дробно-линейных замен аргумента.

Для каждой функции Белого f прообраз отрезка вещественной оси $[1,\infty]$ (обозначим его $Dess(f)$) является связным сферическим графом. Будем называть граф $Dess(f)$ *эскизом* функции f. Если f_1 и f_2 — две функции Белого, такие, что $f_1 = f_2 \circ g$, где g — дробно-линейное преобразование, то $Dess(f_1)$ и $Dess(f_2)$ изотопически эквивалентны. Так определяется сопоставление классов сферических графов классам функций Белого. Множество всех функций Белого с эскизом, изотопным D, обозначим $B_D(\mathbf{C})$.

3 Явный вид функции Белого

Будем называть *гранью* сферического графа D любую компоненту дополнения D до сферы; *валентностью грани* называется количество ребер графа, лежащих в ее замыкании (в нужных случаях подсчитанное с кратностями; см. [7]). *Валентностью вершины* называется количество инцидентных ей ростков ребер.

Произвольную функцию Белого f с эскизом, изотопным D, будем обозначать f_D.

Нули функции Белого f_D с эскизом D лежат по одному на каждой грани графа D, а полюсами являются вершины D. Кратность нуля совпадает с валентностью грани, порядок полюса — с валентностью вершины. Поэтому степень f_D равна $2e$, где e — число ребер графа D. Кроме того, f_D разветвлена в e точках $B_1, \dots B_e$, взятых по одной на каждом ребре D. Условия $f_D(B_i) = 1$ с учетом того, что кратность ветвления f_D во всех B_i равна 2, дают следующую формулу для явного вида функции f_D :

$$f_D = k_0 \frac{C}{A} = 1 - k_1 \frac{B^2}{A}, \tag{1}$$

где A, B, $C \in \mathbf{C}[z]$, k_0, $k_1 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Вид многочленов A, B, C зависит от того, является ли какая-нибудь точка ветвления бесконечностью или нет. Если нет, то (обозначая через v и f соответственно число вершин и ребер графа D), имеем:

$$A = \prod_{i=1}^{v} (z - A_i)^{a_i}; \qquad B = \prod_{i=1}^{e} (z - B_i); \qquad C = \prod_{i=1}^{f} (z - C_i)^{c_i}.$$

Если, скажем, $A_v = \infty$, то $A = \prod_{i=1}^{v-1} (z - A_i)^{a_i}$, а $k_0 = k_1$.

Если $B_e = \infty$, то $B = \prod_{i=1}^{e-1}(z - B_i)$, а $k_0 = 1$.

Если $C_f = \infty$, то $C = \prod_{i=1}^{f-1}(z - C_i)^{c_i}$, а $k_1 = 1$.

4 Существование функции Белого с заданным эскизом, определенной над полем алгебраических чисел

Теорема. *Для каждого связного сферического графа D существует функция Белого f с эскизом, изотопным D, определенная над полем алгебраических чисел $\bar{\mathbf{Q}}$.*

Доказательство. Сумма числа ребер и вершин каждого графа, по формуле Эйлера, не меньше трех. Пусть, например, у графа есть две вершины. Положим в уравнении (1) $A_v = \infty$, $A_{v-1} = 0$. Кроме того, положим $C_f = 1$. На остальные $v - 2 + (f-1) + 1 = v + f - 2 = e$ чисел $A_1, \dots A_{v-2}, C_1, \dots C_{f-1}, k_0$, задающих функцию f_D, система из e независимых уравнений определяется следующим условием: многочлен $A - k_0 C$ степени $2e$ является полным квадратом (см. (1)). Комплексное решение этой системы уравнений обеспечивается существованием функции Белого с эскизом D в силу конструкции Гротендика, а поскольку все коэффициенты этой системы — алгебраические (рациональные) числа, то и само решение определено над $\bar{\mathbf{Q}}$. □

Ясно, что если $f_1 \in \bar{\mathbf{Q}}(z)$ и $f_2 \in \bar{\mathbf{Q}}(z)$ — две функции Белого с одним и тем же эскизом, то и дробно-линейная замена g переменной, такая, что $f_1 = f_2 \circ g$, тоже определена над $\bar{\mathbf{Q}}$. Теперь введем множество

$$B_D(\bar{\mathbf{Q}}) = \bar{\mathbf{Q}}(z) \cap B_D(\mathbf{C});$$

устанавливаемое нами соответствие приобретет окончательный вид:

$$[D] \longleftrightarrow B_D(\bar{\mathbf{Q}}).$$

5 Действие группы Галуа на классах рациональных функций и на изотопических классах сферических графов

Пусть $f \in M := \bar{\mathbf{Q}}(z) \setminus \bar{\mathbf{Q}}$ — непостоянная рациональная функция. На множестве M действует группа Галуа $\Gamma = Gal(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. Результат действия (покоэффициентного) элемента $\gamma \in \Gamma$ на функцию f будем обозначать ${}^{\gamma}f$.

На M действует также группа $G \cong PSL_2(\bar{\mathbf{Q}})$ дробно-линейных замен аргумента. Орбиту $\{f \circ g \mid g \in G\}$ этого действия обозначим $f \circ G$ и назовем *классом функции* f. На множестве классов корректно определено действие группы Галуа по правилу ${}^{\gamma}(f \circ G) = {}^{\gamma}f \circ G$. Если f — функция Белого, то и ${}^{\gamma}f$ — также функция Белого (возможно, с другим эскизом), поскольку условие на то, что функция является функцией Белого, задается системой уравнений (1) на коэффициенты функций f и $f-1$. Поскольку коэффициенты этих уравнений — рациональные числа, то вместе с f решением этой системы является и ${}^{\gamma}f$ для любого $\gamma \in \Gamma$. Таким образом, корректно определено действие группы Галуа на множестве классов функций Белого, а в силу указанного выше взаимно-однозначного соответствия и *действие группы Галуа на множестве изотопических классов сферических графов.*

Введем обычные обозначения для стационарных подгрупп:

$$G_f = \{g \in G \mid f \circ g = f\},$$

$$\Gamma_f = \{\gamma \in \Gamma \mid {}^{\gamma}f = f\},$$

$$\Gamma_{f \circ G} = \{\gamma \in \Gamma \mid {}^{\gamma}(f \circ G) = (f \circ G)\}.$$

По основной теореме теории Галуа группам Γ_f и $\Gamma_{f \circ G}$ соответствуют подполя $\bar{\mathbf{Q}}$, которые мы обозначаем соответственно k_f и $k_{f \circ G}$.

$$k_f = \{q \in \bar{\mathbf{Q}} \mid {}^{\gamma}q = q \text{ при } \gamma \in \Gamma_f\},$$

$$k_{f \circ G} = \{q \in \bar{\mathbf{Q}} \mid {}^{\gamma}q = q \text{ при } \gamma \in \Gamma_{f \circ G}\}.$$

Назовем эти поля соответственно *полем определения рациональной функции* f и *полем определения класса функции* f. Легко заметить, что $\Gamma_{f \circ g} \subseteq \Gamma_{f \circ G}$ для всех $f \in M$, $g \in G$, так что $k_{f \circ G} \subseteq k_{f \circ g}$. Последнее включение показывает, что дробно-линейной заменой аргумента поле определения рациональной функции нельзя сделать слишком "маленьким" — оно всегда содержит поле $k_{f \circ G}$. Если f — функция Белого графа D, то переобозначим $\Gamma_{f \circ G} = \Gamma_D$ и $k_{f \circ G} = k_D$ и назовем последнее поле *полем определения графа* D. Отсюда следует

Теорема. *Поле определения функции Белого каждого сферического графа содержит поле определения этого графа.*

Покажем, что не каждый граф является эскизом функции Белого с коэффициентами из поля определения графа. Нас будет интересовать вопрос нахождения функции Белого с заданным эскизом D, определенной над расширением поля определения графа D возможно меньшей степени, то есть величина

$$n_f = \min_{f' \in f \circ G} \{[k_{f'} : k_{f \circ G}]\}.$$

Будет доказано, что всегда $n_f \leqslant 2$, и указано, что препятствие к нахождению функции Белого с эскизом D и коэффициентами в его поле определения лежит в когомологиях Галуа $H^1(\Gamma_{f \circ G}, PSL_2(\bar{\mathbf{Q}})$.

6 Сопоставление коцикла Галуа классу рациональных функций

По определению группы $\Gamma_{f\circ G}$, для элементов $\gamma \in \Gamma_{f\circ G}$ существуют такие дробно-линейные преобразования $g_\gamma \in G$, что

$$^\gamma f = f \circ g_\gamma \tag{2}$$

В случае когда группа G_f отлична от тривиальной, отображение $\gamma \to g_\gamma$ определено неоднозначно: вместо элемента g_γ можно взять элемент $a \circ g_\gamma$, $a \in G_f$. Нетрудно проверить, что при произвольном выборе g_γ для любых γ, β выполняется соотношение

$$g_\gamma \circ {}^\gamma g_\beta \circ g_{\gamma\beta}^{-1} = a_{\gamma,\beta} \in G_f \tag{3}$$

Предположим теперь, что мы смогли выбрать отображение $\gamma \to g_\gamma$ таким образом, что для всех γ и β $a_{\gamma,\beta} = 1$. Тогда $g_\gamma \circ {}^\gamma g_\beta = g_{\gamma\beta}$, то есть отображение $\gamma \to g_\gamma$ является коциклом Галуа (см. [3]). Для другой функции $f \circ g$ из того же класса получим другой коцикл g'_γ, когомологичный коциклу g_γ, согласно следующей выкладке:

$$(f \circ g) \circ g'_\gamma = {}^\gamma(f \circ g) = {}^\gamma f \circ {}^\gamma g = f \circ g_\gamma \circ {}^\gamma g = (f \circ g) \circ g^{-1} \circ g_\gamma \circ {}^\gamma g \tag{4}$$

Мы будем называть коцикл g_γ *коциклом, сопоставляемым функции* f. Если G_f — тривиальная группа, то такой коцикл всегда существует и определен однозначно формулой (2). По выкладке (4) каждому классу рациональных функций $f \circ G$, таких, что G_f — тривиальная группа, сопоставляется пара $(\Gamma_{f\circ G}, t_{f\circ G})$, где $t_{f\circ G} \in H^1(\Gamma_{f\circ G}, PSL_2(\bar{\mathbf{Q}}))$.

Если G_f — нетривиальная группа, то не всегда удается выбрать отображение $\gamma \to g_\gamma$ коциклом, а если это удается, то, возможно, функции f сопоставляется и другой коцикл, не когомологичный g_γ.

Пример 1. Пусть $f(z) = \dfrac{z^4 - (2+i)z^3 + (2-i)z + 1}{z^2}$. $k_f = \mathbf{Q}(i)$, $k_{f\circ G} = \mathbf{Q}$, так как ${}^\gamma f(z) = f(z)$, если ${}^\gamma i = i$, и ${}^\gamma f(z) = f\left(-\dfrac{1}{z}\right)$, если ${}^\gamma i = -i$. Положим $h(z) = f(z^2)$. Тогда ${}^\gamma h(z) = {}^\gamma f(z^2) = h \circ g_\gamma$, где $g_\gamma(z) = \pm z$, если ${}^\gamma i = i$, и $g_\gamma(z) = \pm\dfrac{1}{iz}$, если ${}^\gamma i = -i$. Пусть σ обозначает единичный элемент из Γ, а τ — комплексное сопряжение. Предположим, что мы выбрали g_γ для всех $\gamma \in \Gamma$ так, что отображение $\gamma \to g_\gamma$ является коциклом Галуа. Тогда $g_\sigma = g_{\sigma\sigma} = g_\sigma \circ {}^\sigma g_\sigma = g_\sigma \circ g_\sigma = 1$. Но в то же время $g_\sigma = g_{\tau\tau} = g_\tau \circ {}^\tau g_\tau = -1$, противоречие. Существование функций, для которых отображение g_γ в формуле (2) нельзя выбрать коциклом впервые отмечено (в других терминах) Кувенем в [5].

Пример 2. Пусть $k = \mathbf{Q}$ и $f = -\dfrac{1}{z}$. Тогда $k_f = k_{f\circ G} = \mathbf{Q}$. Тогда ${}^\gamma f = f \circ g_\gamma$, где $\gamma \to g_\gamma$ — тривиальный коцикл, но в то же время ${}^\gamma f = f \circ g'_\gamma$, где $g'_\gamma(z) = z$, если ${}^\gamma i = i$, и $g'_\gamma(z) = -\dfrac{1}{z}$, если ${}^\gamma i = -i$. Отображение $\gamma \to g_\gamma$ является коциклом, но не является кограницей.

7 Существование функции Белого, определенной над не более чем квадратичным расширением поля определения графа

Теорема 1. *Если в формуле ${}^\gamma f = f \circ g_\gamma$, $\gamma \in \Gamma_{f\circ G}$, $g_\gamma \in G$, элементы g_γ можно выбрать так, чтобы отображение $\gamma \to g_\gamma$ являлось коциклом Галуа, то существует такая дробно-линейная замена g аргумента функции f, что функция $f \circ g$ определена над не более чем квадратичным расширением поля определения класса функции f.*

Лемма 1. *Пусть k' — конечное расширение поля $\mathbf{Q}$ и Γ' — соответствующая подгруппа конечного индекса в группе Γ. Каждый коцикл из $Z^1(\Gamma', G)$ когомологичен одному из коциклов $\gamma \to g[a,b]_\gamma$, где $a, b \in k'$ и*

$$g[a,b]_\gamma(z) = z, \text{ если } {}^\gamma l = l,$$
$$g[a,b]_\gamma(z) = (az)^{-1}, \text{ если } {}^\gamma l = -l,$$

где $l \in \bar{k}$, $l^2 = b$.

Доказательство леммы можно найти в [4]. В нем используется биекция между множеством когомологий Галуа $H^1(\Gamma', G)$ и классами изоморфных над k' коник, определенных над k', что является частным случаем более общей конструкции из [3]. При этой биекции класс коцикла $\gamma \to g[a,b]_\gamma$ переходит в класс коники $ax_1^2 + bx_2^2 - abx_3^2 = 0$, и легко заметить, что каждая коника, определенная над k', имеет в некотором базисе такой вид.

Доказательство теоремы. Пусть коцикл $\gamma \to g_\gamma$, когомологичен коциклу $g[a,b]_\gamma$, определенному в лемме, то есть $g_\gamma = g \circ g[a,b]_\gamma \circ {}^\gamma g^{-1}$, где $g \in G$. Тогда ${}^\gamma(f \circ g) = f \circ g \circ g[a,b]_\gamma$, $\gamma \in \Gamma_{f\circ G}$, и из определения $g[a,b]_\gamma$, видно, что $\Gamma_{f\circ g}$ состоит лишь из тех $\gamma \in \Gamma_{f\circ G}$, для которых ${}^\gamma l = -l$, а значит, $k_{f\circ g} = k_{f\circ G}(l)$ и

$$n_f \leqslant [\Gamma_{f\circ G} : \Gamma_{f\circ g}] = [k_{f\circ g} : k_{f\circ G}] \leqslant 2. \ \square$$

Следствие 1. *Если G_f — тривиальная группа, то $n_f \leqslant 2$.* $\square$

Следствие 2. *$n_f = 1$ тогда и только тогда, когда в равенстве ${}^\gamma f = f \circ g_\gamma$, $\gamma \in \Gamma_{f\circ G}$, $g_\gamma \in G$, элементы g_γ можно выбрать так, что отображение $\gamma \to g_\gamma$ образует коцикл, являющийся кограницей.*

Доказательство. Если $g_\gamma = g \circ {}^\gamma g^{-1}$, $g \in G$, то ${}^\gamma(f \circ g) = f \circ g$ и $n_f = 1$. Наоборот, если $n_f = 1$, то существует такая дробно-линейная функция g, что ${}^\gamma(f \circ g) = f \circ g$, тогда ${}^\gamma f = f \circ g \circ {}^\gamma g^{-1}$, и в качестве g_γ можно взять $g \circ {}^\gamma g^{-1}$. $\square$

Пример. Пусть f — та же функция, что и в примере 1 предыдущего пункта. Как мы видели, $k_f = \mathbf{Q}(i)$, $k_{f \circ G} = \mathbf{Q}$ и ${}^\gamma f = f \circ g[-1,-1]_\gamma$. Коцикл $\gamma \to g[-1,-1]_\gamma$ не является кограницей, поскольку, по доказательству леммы 1, соответствует конике $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, поэтому, согласно следствию 2, функция f является примером функции, для которой $n_f = 2$.

Случай наличия симметрий графа

Легко заметить, что для любой рациональной функции f группа G_f — конечная подгруппа в G. Все конечные подгруппы в $G \cong PSL_2(\bar{\mathbf{Q}})$ с точностью до изоморфизма исчерпываются следующим списком: группы симметрий икосаэдра, октаэдра, тетраэдра, группы вращений, группы диэдров [2].

Лемма 2. *Пусть* ${}^\gamma G_f = G_f$ *для всех* $\gamma \in \Gamma_{f \circ G}$ *и* ${}^\gamma f = f \circ g_\gamma$. *Тогда* g_γ *принадлежит* $N(G_f)$ *— нормализатору* G_f *в группе* G.

Доказательство. Пусть $a \in G_f$, тогда

$$f \circ g_\gamma \circ a = {}^\gamma f \circ a = {}^\gamma(f \circ {}^{\gamma^{-1}} a) = {}^\gamma f = f \circ g_\gamma,$$

откуда $g_\gamma \circ a \circ g_\gamma^{-1} \in G_f$. $\square$

Лемма 3. *В таблице*

$Z_n = \langle \varepsilon z \mid \varepsilon^n = 1 \rangle$	$N(Z_n) = tz^p \mid t \in \{\bar{\mathbf{Q}}^*, p \in \{\pm 1\}\}$
$D_n = \langle z^{-1}; \varepsilon z \mid \varepsilon^n = 1 \rangle$	$N(D_n) = \langle z^{-1}; \varepsilon_1^{2n} = 1 \rangle$
$D_2 = \langle z^{-1}; -z \rangle$	$N(D_2) = \langle z^{-1}; \frac{z+1}{z-1}; \varepsilon z \mid \varepsilon^4 = 1 \rangle$
$T = \langle \frac{-z+1}{2z+1}; \varepsilon z \mid \varepsilon^3 = 1 \rangle$	$N(T) = T$
$O = \langle T; -\frac{1}{2z} \rangle$	$N(O) = O$
$Y = \langle -z^{-1}; \varepsilon z; -\varepsilon \frac{z-s}{sz+1} \mid \varepsilon^5 = 1, s = \varepsilon^4 + \varepsilon \rangle$	$N(Y) = Y$

слева стоят представители каждого типа конечных подгрупп в G, *сохраняющиеся при действии группы Галуа* Γ, *справа — их нормализаторы.*

Лемма доказывается непосредственной проверкой.

Поскольку все изоморфные конечные подгруппы в $PSL_2(\bar{\mathbf{Q}})$ сопряжены [2], можно найти такую дробно-линейную замену g, что $G_{f \circ g}$ — группа из левого столбца таблицы в лемме 3. Чтобы упростить формулы, мы будем считать, что уже G_f — такая группа.

Теорема 2. *Если $G_f = T, O, Y$ или D_n, $n \geqslant 3$, то $n_f = 1$, если $G_f = Z_n$ или D_2, то $n_f \leqslant 2$. Кроме того, если G_f отлична от Z_n, в равенстве ${}^{\gamma}f = f \circ g_\gamma$ элементы g_γ можно выбрать так, чтобы отображение $\gamma \to g_\gamma$ являлось коциклом Галуа.*

Доказательство. а) Если $G_f = T, O$ или Y, то согласно леммам 2 и 3 ${}^{\gamma}f = f \circ g_\gamma = f$, поскольку $g_\gamma \in G_f$.

б) Если $G_f = D_n$, $n \geqslant 3$, рассмотрим гомоморфизм φ: $N(D_n) \to \{\pm 1\}$: $\varphi(tz^p) = t^n$, где $t^{2n} = 1$, $p \in \{\pm 1\}$. Ядром φ является D_n. Отображение $\gamma \to \varphi(g_\gamma) = A_\gamma$ является коциклом Галуа со значениями в $\{\pm 1\}$ в силу того, что (пользуясь (3) и гомоморфностью φ):

$$A_{\gamma\beta} = \varphi(g_{\gamma\beta}) = \varphi(a_{\gamma,\beta}) \circ g_\gamma \circ {}^{\gamma}g_\beta = \varphi(g_\gamma)\, {}^{\gamma}\varphi(g_\beta) = A_\gamma\, {}^{\gamma}A_\beta.$$

По теореме Гильберта 90 ([3]) этот коцикл — кограница, то есть существует такое $A \in \bar{\mathbf{Q}}$, что $A_\gamma = A\,{}^{\gamma}A^{-1}$. Пусть $l^n = A$. Положим $g'_\gamma(z) = l\,{}^{\gamma}l^{-1}z$. Поскольку $(l\,{}^{\gamma}l^{-1})^n = l^n\,{}^{\gamma}l^{-n} = A\,{}^{\gamma}A^{-1} = A_\gamma$, то g'_γ отличается от g_γ на элемент из D_n, скажем, $g_\gamma = a_\gamma \circ g'_\gamma$, $a_\gamma \in D_n$. Тогда

$${}^{\gamma}f = f \circ g_\gamma = f \circ a_\gamma \circ g'_\gamma = f \circ g'_\gamma = f \circ l\,{}^{\gamma}l^{-1},$$

то есть ${}^{\gamma}(f \circ l) = f \circ l$.

в) $G = Z_n$. По леммам 2 и 3 ${}^{\gamma}f = f \circ g_\gamma$, где $g_\gamma(z) = t_\gamma z^{p_\gamma}$, $t_\gamma \in \bar{\mathbf{Q}}^*$, $p_\gamma \in \{\pm 1\}$. Рассмотрим в $\Gamma_{f \circ G}$ нормальную подгруппу Γ' индекса 2, определенную условиями: $\gamma \in \Gamma'$, если $p_\gamma = 1$. Положим $B_\gamma = g_\gamma^n$ для $\gamma \in \Gamma'$. Тогда в силу (3)

$$B_{\gamma\beta} = g_{\gamma\beta}^n = (a_{\gamma,\beta} \circ g_\gamma \circ {}^{\gamma}g_\beta)^n = a_{\gamma,\beta}^n \circ g_\gamma^n \circ {}^{\gamma}g_\beta^n = B_\gamma \circ {}^{\gamma}B_\beta,$$

то есть отображение $\gamma \to B_\gamma$, $\gamma \in \Gamma'$ — коцикл Галуа со значениями в $\bar{\mathbf{Q}}^*$. По теореме Гильберта 90 существует такое $B \in \bar{\mathbf{Q}}^*$, что $B_\gamma = B\,{}^{\gamma}B^{-1}$. Пусть $m^n = B$. Положим $g'_\gamma(z) = m\,{}^{\gamma}m^{-1}z$, $\gamma \in \Gamma'$. Поскольку $(m\,{}^{\gamma}m^{-1})^n = B_\gamma$, то $g_\gamma = b_\gamma \circ g'_\gamma$, $b_\gamma \in Z_n$. Тогда

$${}^{\gamma}f = f \circ g_\gamma = f \circ b_\gamma \circ g'_\gamma = f \circ g'_\gamma = f \circ m\,{}^{\gamma}m^{-1},$$

то есть ${}^{\gamma}(f \circ m) = f \circ m$. Получаем, что $\Gamma_{f \circ m} = \Gamma'$ и

$$n_f \leqslant [\Gamma' : \Gamma_{f \circ G}] = [\Gamma_{f \circ m} : \Gamma_{f \circ G}] = 2.$$

г) $G_f = D_2$. Обозначим $c(z) = iz$, $d(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$; $\varphi_1(z) = z$, $\varphi_2 = c$, $\varphi_3 = d$, $\varphi_4 = c \circ d$, $\varphi_5 = d \circ c$, $\varphi_6 = c \circ d \circ c$.

Факторгруппа $N(D_2)/D_2 \cong S_3$, и g_γ с точностью до D_2 равен одному из шести элементов $\varphi_{l(\gamma)}$, где $l(\gamma) \in \{1, \dots 6\}$. Положим $g_\gamma = \varphi_{l(\gamma)} \circ h_\gamma$, где $h_\gamma \in D_2$ выбирается в соответствии с таблицей:

$l(\gamma)$	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
${}^{\gamma}i$	i	$-i$	i	$-i$	i	$-i$	i	$-i$	i	$-i$	i	$-i$
$h_\gamma(z)$	z	$-1/z$	$-1/z$	z	$-1/z$	z	z	$-1/z$	$-z$	$1/z$	$-1/z$	z

Проверка показывает, что при таком выборе отображение $\gamma \to g_\gamma$ является коциклом, таким образом, утверждение следует из теоремы п. 7. □

8 Достаточное условие существования функции Белого, определенной над полем определения графа

Теорема. *Если $f \in \bar{\mathbf{Q}}(z)\backslash\bar{\mathbf{Q}}$ имеет нечетное число нулей или полюсов какой-нибудь кратности и в равенстве ${}^{\gamma}f = f \circ g_\gamma$, $\gamma \in \Gamma_{f\circ G}$ элементы $g_\gamma \in G$ можно выбрать так, что отображение $\gamma \to g_\gamma$ образует коцикл Галуа, то $n_f = 1$.*

Доказательство. Будем считать, что мы уже провели необходимое дробно-линейное преобразование и

$$^{\gamma}f = f \circ g[a,b]_\gamma,\ \gamma \in \Gamma_{f\circ G},$$

где $g[a,b]_\gamma$ определено в лемме из п. 7. Если $b \in (k^*_{f\circ G})^2$, то $g[a,b]_\gamma$ — тривиальный коцикл и утверждение верно ввиду следствия 2 из предыдущей теоремы. Пусть b не является полным квадратом. Пусть для определенности f имеет нечетное число нулей кратности m (случай нечетного числа полюсов какой-то кратности разбирается аналогично) и $z_1, \dots z_{2n+1}$ — все нули кратности m функции f, отличные от 0 и ∞ (если 0 входит в число нулей кратности m, то и ∞ тоже, и наоборот, из-за того, что $0 = {}^{\gamma}0 = {}^{\gamma}f(0) = f(g[a,b]_\gamma(0)) = f(\infty)$, здесь γ переводит один из корней из b в другой). Выполнено равенство

$$\prod_{i=1}^{2n+1}(z - {}^{\gamma}z_i) = \prod_{i=1}^{2n+1}(z - g[a,b]_\gamma(z_i)),$$

поскольку $\{{}^{\gamma}z_i\}$ и $\{g[a,b]_\gamma(z_i)\}$ составляют полные наборы нулей кратности m функции ${}^{\gamma}f$, не равные 0 и ∞. Положим $\prod_{i=1}^{2n+1} z_i = r$. Тогда

$$^{\gamma}r = r, \text{ если } {}^{\gamma}l = l,$$

$$^{\gamma}r = 1/(a^{2n+1}r), \text{ если } {}^{\gamma}l = -l, \text{ где } l^2 = b.$$

Это значит, что $r = r_1 + lr_2$, где r_1 и $r_2 \in k_{f\circ G}$ и

$$^{\gamma}rr = (r_1 + lr_2)(r_1 - lr_2) = r_1^2 - br_2^2 = a^{-2n-1}.$$

Последнее равенство равносильно

$$a(a^n r_2 b)^2 + b - ab(a^n r_1)^2 = 0.$$

Таким образом, коника $ax_1^2 + bx_2^2 - abx_3^2 = 0$ имеет ненулевое решение в $k_{f\circ G}$, что согласно доказательству леммы 1 п. 7 равносильно тому, что коцикл $\gamma \to g[a,b]_\gamma$ — кограница. □

Следствие. *Если граф D имеет нечетное число вершин или граней, какой-то валентности, а в формуле ${}^\gamma f_D = f_D \circ g_\gamma$, $f_D \in B_D(\bar{\mathbf{Q}})$, $\gamma \in \Gamma_D$, элемент g_γ можно выбрать так, что отображение $\gamma \to g_\gamma$ является коциклом Галуа, то существует такая функция $f \in B_D(\bar{\mathbf{Q}})$, что $f \in k_D(z)$.*

9 Построение графа с заданным коциклом Галуа

В п. 6 было показано, что рациональной функции f, не имеющей симметрий, однозначно ставится в соответствие элемент множества $H^1(\Gamma_{f\circ G}, G)$, а именно когомологический класс коцикла $\gamma \to g_\gamma$, определенного формулой ${}^\gamma f = f \circ g_\gamma$. Таким образом, этот элемент сопоставляется и сферическому графу без симметрий, если f — его функция Белого. Покажем, что для всякого коцикла Галуа группы Γ найдется такой эскиз, которому этот коцикл сопоставляется.

Теорема. *Для любого элемента t множества $H^1(\Gamma, G)$ существует функция Белого f_D с эскизом D, такая, что G_{f_D} — тривиальная группа и класс коцикла, сопоставляемого D, совпадает с t.*

Докажем сперва две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть $F(z) = \dfrac{P_{2n}(z)}{z^n}$ — рациональная функция, $P_{2n}(z)$ — многочлен степени $2n$, d — делитель n и существует рациональная функция f со следующими свойствами: 1) $f(z) = \dfrac{P_{2d}(z)}{z^d}$, где P_{2d} — многочлен степени $2d$; 2) $F = g\circ f$, где g — многочлен степени $m = \dfrac{n}{d}$; 3) старший коэффициент P_{2d} равен 1, а коэффициент при z^d равен 0. Тогда, с точностью до свободного члена, P_{2d} определен однозначно.*

Доказательство. Положим

$$g = p_{2d}z^m + p_d z^{m-1} + \lambda_{m-2}z^{m-2} + \lambda_{m-3}z^{m-3} + \dots + \lambda_0,$$
$$P_{2d} = z^{2d} + p_{2d-1}z^{2d-1} + \cdot + p_{d+1}z^{d+1} + p_{d-1}z^{d-1} + \dots + p_0.$$

Тогда коэффициент многочлена $g \circ P_{2d}$ при z^{2n-i}, $i = 0, \dots 2d-1$ — многочлен от $p_{2d}, \dots p_{2d-i}$, линейный по p_{2d-i}. Поскольку $g \circ P_{2d} = P_{2n}$, сравнивая поочередно коэффициенты при старших степенях многочленов $g \circ P_{2d}$ и P_{2n}, мы определим все p_i, кроме p_0 однозначно. □

Лемма 2. *Пусть* $F(z) = \dfrac{P_{2n}(z)}{z^n}$ *— рациональная функция,* P_{2n} *— многочлен степени* $2n$, d *— делитель* n *и существует два разложения* F *в композицию* $F = g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$, *где* g_1 *и* g_2 *— многочлены степени* $m = \dfrac{n}{d}$, $f_1(z) = \dfrac{P_1(z)}{z^d}$, $f_2(z) = \dfrac{P_2(z)}{z^d}$, P_1 *и* P_2 *— многочлены степени* $2d$ *с коэффициентами* 0 *при* z^d. *Тогда существуют такие константы* c_1 *и* c_2, *что* $f_1(z) = c_1\left(f_2(z) + \dfrac{c_2}{z^d}\right)$.

Доказательство. Пусть ν_1 и ν_2 — старшие коэффициенты соответственно P_1 и P_2. Тогда f_1/ν_1 и f_2/ν_2 удовлетворяют условию леммы 1 и по ней $f_1(z)/\nu_1 = f_2(z)/\nu_2 + \nu_3/z^d$, где ν_3 — некоторая константа. Осталось положить $c_1 = \nu_1/\nu_2$ и $c_2 = \nu_1\nu_2\nu_3$. □

Доказательство теоремы. По утверждению леммы 1 из п. 7 множество $H^1(\Gamma, G)$ состоит из классов коциклов $\gamma \to g[a,b]_\gamma$. Поэтому нам достаточно доказать, что для любых a и b существует эскиз без симметрий $D_{a,b}$ с такой функцией Белого $F_{a,b}$, что ${}^\gamma F_{a,b} = F_{a,b} \circ g[a,b]_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$.

В случае когда b — полный квадрат, коцикл $\gamma \to g[a,b]_\gamma$ тривиален, и утверждение выполнено (примеры функций Белого, определенных над $\mathbf{Q}$, известны, см., например, [7]). В случае $b \notin (\mathbf{Q}^*)^2$ выберем такое $e \in \mathbf{Q}(l)$, что $e \neq \pm\bar{e}$, где $\bar{e}$ — сопряженный с e элемент. Кроме того, если $b = -b_1$, где b_1 — полный квадрат, возьмем $e = e_1 + ie_2$ с $e_1 \neq \pm e_2$. Положим

$$f_{a,b} = \frac{a^2z^4 + aez^3 + \bar{e}z + 1}{z^2}.$$

Тогда ${}^\gamma f = f \circ g[a,b]_\gamma$. С помощью конструкции, описанной в [1], найдем такой многочлен $h \in \mathbf{Q}[z]$, что $F_{a,b} = h \circ f_{a,b}$ — функция Белого. Тогда

$${}^\gamma F_{a,b} = {}^\gamma(h \circ f_{a,b}) = {}^\gamma h \circ {}^\gamma f_{a,b} = h \circ f_{a,b} \circ g[a,b]_\gamma = F_{a,b} \circ g[a,b]_\gamma.$$

Нам осталось доказать, что у эскиза $D_{a,b}$ функции Белого $F_{a,b}$ нет симметрий. Действительно, пусть $F_{a,b} \circ g = F_{a,b}$, где $g(z)$ — дробно-линейное преобразование. Тогда $g(z) = kz$ или $g(z) = k/z$, поскольку сохраняет пару $(0, \infty)$ — полюса $F_{a,b}$. Имеем $h \circ f_{a,b} = h \circ f_{a,b} \circ g$. По лемме 2 $c_1\left(f_{a,b}(z) + \dfrac{c_2}{z^2}\right) = (f_{a,b} \circ g)(z)$.

1) $g(z) = kz$. Сравнивая коэффициенты $c_1\left(f_{a,b}(z) + \dfrac{c_2}{z^2}\right)$ и $(f_{a,b} \circ g)(z)$, получим $c_1 = k^2$, $c_1ae = aek$, откуда $c_1 = k = k^2 = 1$.

2) $g(z) = k/z$. Сравнение коэффициентов $c_1\left(f_{a,b}(z) + \dfrac{c_2}{z^2}\right)$ и $(f_{a,b}\circ g)(z)$ дает: $c_1a^2 = 1/k^2$, $c_1ae = \bar{e}/k$, $c_1\bar{e} = aek$. Перемножая два последних равенства, получим $c_1^2 = 1$, тогда из первого равенства $k = \pm i/a$ или $k = \pm 1/a$. Второе невозможно, поскольку тогда $e = \pm\bar{e}$, что противоречит выбору e. В случае $k = \pm i/a$ оказывается $e = i\bar{e}$, что возможно лишь при $e = e_1 + ie_2$ и $e_1 = \pm e_2$, но и это противоречит выбору e. $\square$

10 Комбинаторные инварианты действия группы Галуа на эскизах

Комбинаторные свойства графов, являющиеся инвариантами введенного в п. 5 действия группы Галуа на графах, помогают собрать иногда довольно значительную информацию о полях определения эскизов, не находя их функции Белого в явном виде. Простейшими из таких комбинаторных инвариантов являются

а) набор валентностей вершин и граней графа (поскольку он совпадает с набором кратностей нулей и полюсов соответствующей функции Белого, а это, конечно, Галуа-инвариант);

б) группа симметрий графа, сохраняющих ориентацию сферы (которая в силу взаимной однозначности конструкции Гротендика изоморфна группе G_f функции Белого f графа);

в) наличие или отсутствие автодуальности. Граф D называется *автодуальным*, если он изотопен своему *дуальному графу* (см. [7]). Функцией Белого дуального графа является $1/f$, где f — функция Белого самого графа. В силу взаимной однозначности конструкции Гротендика автодуальность означает существование такого дробно-линейного преобразования h_f, что $f(z) = 1/f(h_f(z))$. Подействовав на коэффициенты этого уравнения элементом $\gamma \in \Gamma$, получим ${}^\gamma f(z) = 1/{}^\gamma f({}^\gamma h_f(z))$, так что эскиз функции Белого ${}^\gamma f$ также автодуален.

г) для автодуальных графов: группа, порожденная переходом к дуальному графу и группой симметрий. Это следует из инвариантности группы $\langle G_f, h_f\rangle$.

11 Примеры

Рассмотрим графы с набором валентностей $\langle 1,1,5,5;1,1,5,5\rangle$. Все они исчерпываются списком, изображенным на рис. 1.

Все рассматриваемые графы автодуальны. Группы симметрий первых трех из них изоморфны $\mathbf{Z}_2$, а графы D и E не имеют симметрий. Инвариант г) из предыдущего пункта разделяет A и пару $B - C$: для A он равен $\mathbf{Z}_4$, а для B и C — $\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2$, что видно из рисунков 2 и 3 (дуальные графы нарисованы тонкой линией).

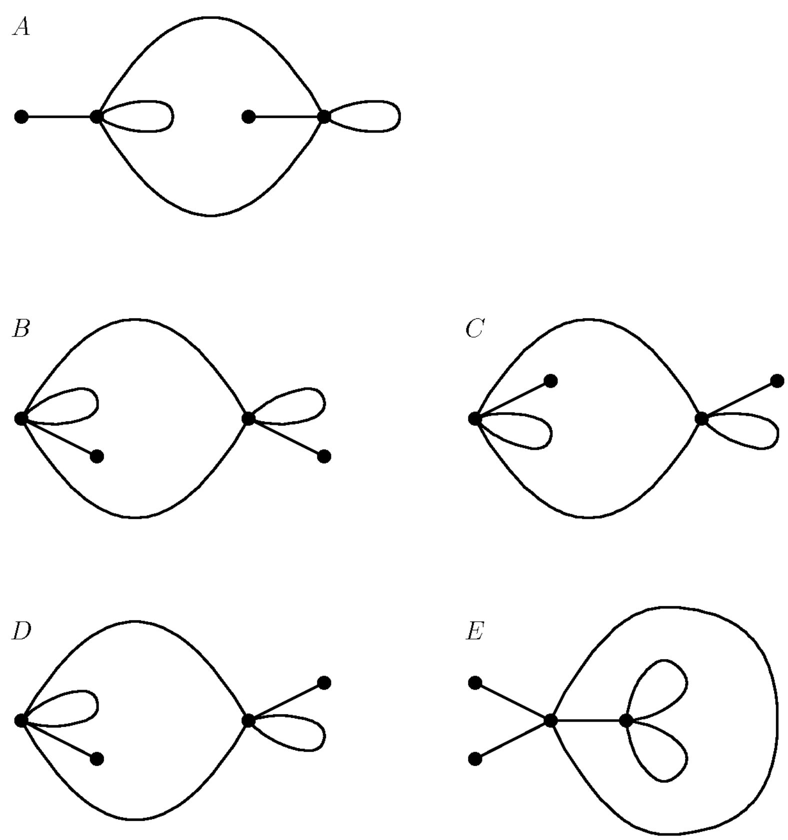

Рис. 1

На рис. 2 переход к дуальному графу — поворот на $\pi/2$. Дважды примененный, этот поворот отличен от тождественного преобразования, но является симметрией графа.

На рис. 3 переход к дуальному графу — поворот на π. Дважды примененный, он дает тождественное преобразование.

Таким образом, граф A один в своей орбите Галуа, и его поле определения равно $\mathbf{Q}$. B и C переходят друг в друга при комплексном сопряжении, поэтому их поле определения — мнимое квадратичное. Вычисления (см. ниже) дают $k_B = k_C = \mathbf{Q}(\sqrt{-15})$.

О поле определения графов D и E мы уже сейчас можем сказать, что оно у них общее: либо это $\mathbf{Q}$, если графы составляют одноэлементные орбиты, либо вещественное квадратичное расширение $\mathbf{Q}$, если они составляют одну

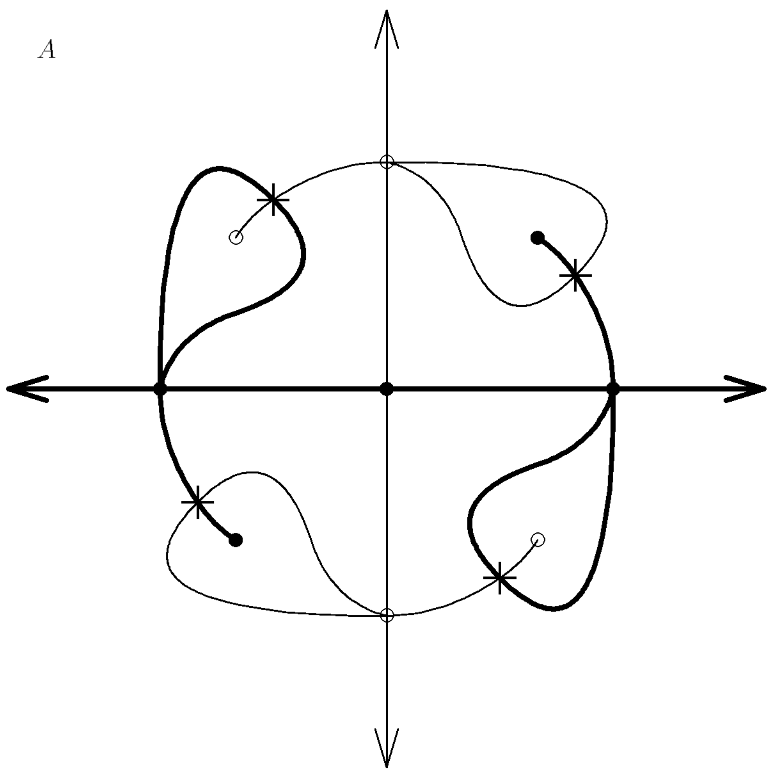

Рис. 2

двухэлементную орбиту. Вещественность этого поля следует из наличия у графа E осевой симметрии. Вычисления дают $k_D = k_E = \mathbf{Q}(\sqrt{5})$, графы E и D составляют общую орбиту (отметим, что наличие осевой симметрии не является Галуа-инвариантом). Теперь мы получаем результат, из-за которого эскизы этого примера являются особенно интересными: *граф D не является эскизом функции Белого, определенной над полем определения этого графа.* Действительно, ни у какого графа из $[D]$ нет осевой симметрии, значит, D не есть эскиз функции Белого с вещественными коэффициентами (если f — такая функция, то для точек эскиза этой функции, то есть таких z, что $f(z) \in [1, \infty]$, $f(z) = \overline{f(z)} = \bar{f}(\bar{z}) = f(\bar{z})$, а это означает, что эскиз функции f симметричен относительно оси вещественных чисел). Граф E также не является эскизом функции Белого, определенной над его полем определения. Действительно, если существует такая функция $f_E \in \mathbf{Q}(\sqrt{5})(z)$, то ${}^{\gamma}f_E \in \mathbf{Q}(\sqrt{5})(z)$ — функция Белого графа D, если ${}^{\gamma}\sqrt{5} = -\sqrt{5}$.

B (для C аналогично)

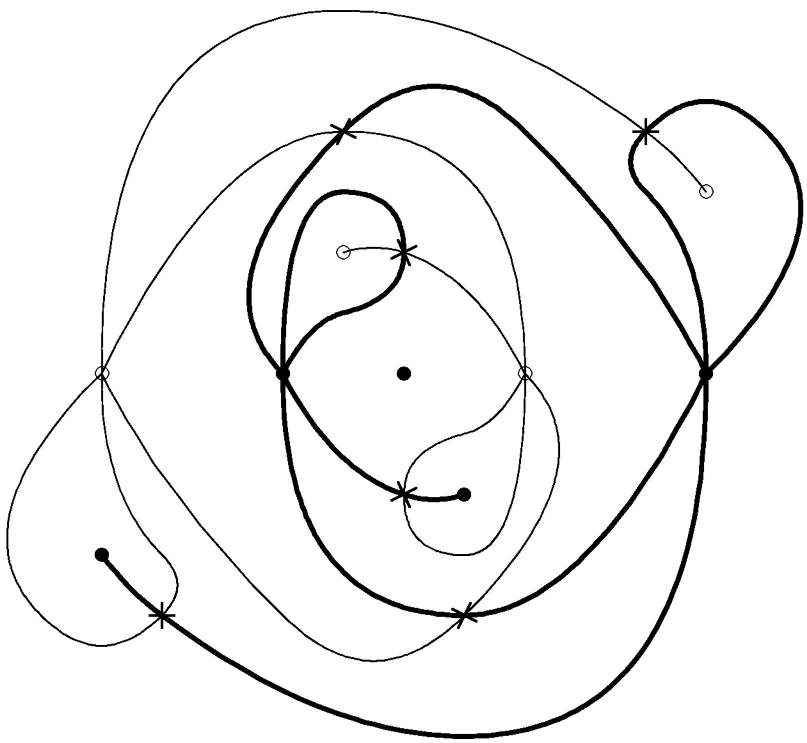

Рис. 3

12 Вычисления

Здесь приведены результаты вычислений функций Белого, определенных над расширениями наименьшей степени поля $\mathbf{Q}$ для графов из предыдущего примера.

A. $k_A = \mathbf{Q}$.

$$f_A(z) = \frac{(z^2-1)^5(z^2-4z-1)}{-64z^5(z^2+z-1)} = 1 - \frac{(z^2+1)^2(z^4-2z^3-6z^2+2z+1)^2}{64z^5(z^2+z-1)}.$$

Симметрия: $f_A(z) = f_A(1/z)$.

Автодуальность: $f_A(z) f_A\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = 1$.

B и C. $k_B = k_C = \mathbf{Q}(\sqrt{-15})$.

$$f_{B,C}(z) = \frac{-7251 + 245\sqrt{-15}}{39168} \times$$
$$\times \frac{(17cz^2 + (498 - 66\sqrt{-15})z + 17)(cz^2+1)^5}{(cz^2 + (14 + 2\sqrt{-15})z + 1)(cz^2 + (50 - 2\sqrt{-15})z + 1)^5} =$$
$$= 1 - \frac{195 - 5\sqrt{-15}}{2304} \times$$
$$\times \frac{(cz^2-1)^2(7c^2z^4 + c(300 - 12\sqrt{-15})z^3 + 10cz^2 + (300 - 12\sqrt{-15})z + 7)^2}{(cz^2 + (14 + 2\sqrt{-15})z + 1)(cz^2 + (50 - 2\sqrt{-15})z + 1)^5}.$$

Здесь $c = -990 + 14\sqrt{-15}$.

Симметрия: $f(z) = f(1/(cz))$.

Функции Белого для B и C получаются друг из друга сменой значения корня из -15.

D и E. $k_D = k_E = \mathbf{Q}(\sqrt{5})$.

$$f_D(z) = -\frac{(sz^2 - uz - 1)^5(sz^2 - tz - r^2)}{(sz^2 + uz - 1)^5(sz^2 + tz - r^2)} = 1 - \frac{2(5sz^6 + pz^4 + qz^2 + r)^2}{(sz^2 + uz - 1)^5(sz^2 + tz - r^2)},$$

$$s = \sqrt{5},$$
$$t = \frac{290\sqrt{5} + 600 - 270\sqrt{-10} - 350\sqrt{-2}}{121},$$
$$r = -\frac{2\sqrt{5} + 3 - 3\sqrt{-10} + \sqrt{-2}}{11}$$
$$q = 19\sqrt{5} + 40 + 90\sqrt{-2} + 42\sqrt{-10},$$
$$p = 70\sqrt{5} + 145 + 185\sqrt{-2} + 80\sqrt{-10},$$
$$u = -2\sqrt{5} - 4.$$

Автодуальность: $f_D(z)f_D(-z) = 1$.

Проверено, что эскиз функции f_D изотопен D. Функцией Белого графа E является функция $f_E = {}^{\gamma}f_D$, где ${}^{\gamma}(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$.

$f_D \in \mathbf{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{-2})(z)$. Если ${}^{\gamma}(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$, ${}^{\gamma}(\sqrt{-2}) = -\sqrt{-2}$, то ${}^{\gamma}f(z) = f(1/(-\sqrt{5}z))$. Получаем коцикл, который в обозначениях леммы 1 п. 7 есть $g[-\sqrt{5}, -2]_{\gamma}$, $\gamma \in \Gamma_D = Gal(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(\sqrt{5}))$. Он не является кограницей, поскольку соответствует конике $\sqrt{5}x_1^2 + 2x_2^2 + 2\sqrt{5}x_3^2 = 0$, которая не имеет точек над $\mathbf{R}$, а значит, и над $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$.

Литература

[1] Белый Г. Б. О расширении Галуа максимального кругового поля // Известия АН СССР, сер. матем. — 1979. — Т.43. — № 2. — С. 267–276.

[2] Шафаревич И. Р. Основные понятия алгебры. Итоги науки и техники. Серия современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Алгебра-1. Т.11. — ВИНИТИ, Москва, 1986.

[3] Серр Ж.-П. Когомологии Галуа. — М.: Мир, 1968.

[4] Филимоненков В. О. Об арифметике рациональных функций при дробно-линейных заменах аргумента // Вестник МГУ, сер. матем., механ. — 1995. — № 1. — С. 90–92.

[5] Couveighes J.-M. Calcul et rationalite de fonction de Belyi en genre 0 // Ann. de l'inst. Fourier. — 1994. — 44 (1).

[6] Grothendieck A. Esquisse d'un programme. — Preprint, 1984.

[7] Shabat G., Voevodsky V. Drawing curves over number fields // The Grothendiek Festschrift, vol. 111. — Birkhauser, 1990. — P. 199–227.

Статья поступила в редакцию в апреле 1995 г.