V. A. Voblyi, An Explicit Formula for the Number of Labeled Series-Parallel k-Cyclic Blocks,
Mat. Zametki, 2020, Volume 108, Issue 4, 622–624

https://www.mathnet.ru/eng/mzm12877

Явная формула для числа помеченных последовательно-параллельных k-циклических блоков

В. А. Воблый

Ключевые слова: помеченный граф, k-циклический граф, блок, перечисление, последовательно-параллельный граф.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12877

Цикломатическим числом (*циклическим рангом*) связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом ребер графа и числом его вершин, *k-циклический граф* – это граф с цикломатическим числом, равным k. Граф называется *последовательно-параллельным*, если он не содержит подразбиения полного графа K_4 [1]. Последовательно-параллельные графы используются при построении надежных коммуникационных сетей [2].

В [1] была найдена асимптотика для чисел помеченных связных и 2-связных последовательно-параллельных графов с большим количеством вершин. В [3] перечислены помеченные последовательно-параллельные связные графы и блоки по числу вершин. В [4] найдены числа помеченных последовательно-параллельных трициклических блоков с заданным числом вершин.

В заметке получена явная формула для числа помеченных последовательно-параллельных k-циклических блоков с заданным числом вершин.

Теорема 1. *Число $B_k(n)$ помеченных последовательно-параллельных k-циклических блоков с n вершинами при $k \geqslant 1$ и $n \geqslant k+2$ равно*

$$B_k(n) = \frac{n!}{2(n+k-1)} \sum_{i=k}^{n-1} \sum_{j=n+k-2}^{n+i-2} (-1)^j \frac{(j+1)^{i-1}}{(i-1)!} \binom{j}{n+k-2} \times \left(\binom{n-3}{i-2} \binom{n+i-2}{j} - \binom{n-1}{i} \binom{n+i-3}{j-1} \right). \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $b_{n,m}$ – число помеченных последовательно-параллельных блоков с n вершинами и m ребрами,

$$B(x,y) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m} y^m \frac{x^n}{n!}, \qquad \frac{\partial B(x,y)}{\partial y} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m b_{n,m} y^{m-1} \frac{x^n}{n!}$$

– соответствующие производящие функции. Так как цикломатическое число $k = m-n+1$, то $m = n+k-1$ и имеем

$$B_k(n) = b_{n,n+k-1} = \frac{n!}{n+k-1} [x^{-1} y^{-1}] \frac{\partial B(x,y)}{\partial y} x^{-n-1} y^{-n-k+1}. \quad (2)$$

Известны соотношения [1]:

$$\frac{\partial B(x,y)}{\partial y} = \frac{x^2(1+D)}{2(1+y)}, \quad D = D(x,y), \qquad \ln\left(\frac{1+D(x,y)}{1+y}\right) = \frac{xD^2(x,y)}{1+xD(x,y)}.$$

Пусть $t = \ln((1+D)/(1+y))$, тогда получим

$$D = (1+y)e^t - 1, \qquad x = \frac{t}{D(D-t)} = \frac{1}{(1+y)e^t - t - 1} - \frac{1}{(1+y)e^t - 1},$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1+y)e^t}{((1+y)e^t - 1)^2} - \frac{(1+y)e^t - 1}{((1+y)e^t - t - 1)^2}.$$

Подставляя выражения для D и x в (2), с помощью теоремы о композиции вычетов [5; с. 25] найдем

$$
\begin{aligned}
B_k(n) &= \frac{n!}{2(n+k-1)}[t^{-1}y^{-1}]e^t((1+y)e^t-1)^{n-1}((1+y)e^t-t-1)^{n-1} \\
&\quad\times\left[\frac{(1+y)e^t}{((1+y)e^t-1)^2}-\frac{(1+y)e^t-1}{((1+y)e^t-t-1)^2}\right]t^{1-n}y^{-n-k+1} \\
&= \frac{n!\,(B_k^{(1)}(n)-B_k^{(2))}(n))}{2(n+k-1)}\,.
\end{aligned}
$$

С помощью формулы бинома Ньютона и разложения в ряд для экспоненты получим

$$
\begin{aligned}
B_k^{(1)}(n) &= [t^{-1}y^{-1}]e^{2t}(1+y)((1+y)e^t-1)^{n-3}((1+y)e^t-t-1)^{n-1}t^{1-n}y^{-n-k+1} \\
&= [t^{-1}y^{-1}]e^{2t}(1+y)\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(-t)^{n-1-i}((1+y)e^t-1)^{n+i-3}t^{1-n}y^{-n-k+1} \\
&= [t^{-1}y^{-1}]\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(-1)^{n-1-i} \\
&\quad\times\sum_{j=0}^{i+n-3}\binom{i+n-3}{j}(1+y)^{j+1}e^{(j+2)t}(-1)^{i+n-3-j}t^{-i}y^{-n-k+1} \\
&= [t^{-1}y^{-1}]\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i+n-3}\binom{n-1}{i}\binom{i+n-3}{j}(-1)^j\sum_{s}^{j+1}\binom{j+1}{s} \\
&\quad\times\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(j+2)^p}{p!}t^{p-i}y^{s-n-k+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i+n-3}\binom{n-1}{i}\binom{i+n-3}{j}\binom{j+1}{n+k-2}\frac{(-1)^j(j+2)^{i-1}}{(i-1)!}\,.
\end{aligned}
$$

Аналогично имеем

$$
\begin{aligned}
B_k^{(2)}(n) &= [t^{-1}y^{-1}]e^t((1+y)e^t-1)^n((1+y)e^t-t-1)^{n-3}t^{1-n}y^{-n-k+1} \\
&= [t^{-1}y^{-1}]e^t\sum_{i=0}^{n-3}\binom{n-3}{i}(-t)^{n-3-i}((1+y)e^t-1)^{n+i}t^{1-n}y^{-n-k+1} \\
&= [t^{-1}y^{-1}]\sum_{i=0}^{n-3}\binom{n-3}{i}(-1)^{n-3-i}\sum_{j=0}^{i+n}\binom{i+n}{j}(1+y)^je^{(j+1)t}(-1)^{i+n-j}t^{-i-2}y^{-n-k+1} \\
&= [t^{-1}y^{-1}]\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i+n}\binom{n-3}{i}\binom{i+n}{j}(-1)^{j-1}\sum_{s=0}^{j}\binom{j}{s}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(j+1)^p}{p!}t^{p-i-2}y^{s-n-k+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-3}\sum_{j=0}^{i+n}\binom{n-3}{i}\binom{i+n}{j}\binom{j}{n+k-2}\frac{(-1)^{j-1}(j+1)^{i+1}}{(i+1)!}\,.
\end{aligned}
$$

Подставляя $B_k^{(1)}(n)$ и $B_k^{(2)}(n)$ в $B_k(n)$ и учитывая, что биномиальный коэффициент $\binom{n}{m}=0$ при $o\leqslant n<m$, найдем

$$
\begin{aligned}
B_k(n) = \frac{n!}{2(n+k-1)}\Biggl(&\sum_{i=k}^{n-1}\sum_{j=n+k-3}^{i+n-3}\binom{n-1}{i}\binom{i+n-3}{j}\binom{j+1}{n+k-2}(-1)^j\frac{(j+2)^{i-1}}{(i-1)!} \\
&-\sum_{i=k-2}^{n-3}\sum_{j=n+k-2}^{i+n}\binom{n-3}{i}\binom{i+n}{j}\binom{j}{n+k-2}\frac{(-1)^{j-1}(j+1)^{i+1}}{(i+1)!}\Biggr).
\end{aligned}
$$

После замены индексов суммирования $r=j+1$ в первом слагаемом и $s=i+2$ во втором слагаемом получим

$$B_k(n)=\frac{n!}{2(n+k-1)}\Bigg(\sum_{i=k}^{n-1}\sum_{r=n+k-2}^{n+i-2}\binom{n-1}{i}\binom{i+n-3}{r-1}\binom{r}{n+k-2}\frac{(-1)^{r-1}(r+1)^{i-1}}{(i-1)!}$$
$$-\sum_{s=k}^{n-1}\sum_{j=n+k-2}^{n+s-2}\binom{n-3}{s-2}\binom{n+s-2}{j}\binom{j}{n+k-2}\frac{(-1)^{j-1}(j+1)^{s-1}}{(s-1)!}\Bigg)$$
$$=\frac{n!}{2(n+k-1)}\Bigg(\sum_{i=k}^{n-1}\sum_{j=n+k-2}^{n+i-2}(-1)^j\frac{(j+1)^{i-1}}{(i-1)!}\binom{j}{n+k-2}$$
$$\times\Bigg(\binom{n-3}{i-2}\binom{n+i-2}{j}-\binom{n-1}{i}\binom{n+i-3}{j-1}\Bigg)\Bigg).$$

Доказательство закончено.

В следующей таблице представлены числа $B_k(n)$, вычисленные с помощью теоремы 1 и пакета программ Maple.

n	4	5	6	7	8	9	10
$B_2(n)$	6	70	720	7560	84000	997920	12700800
$B_3(n)$	0	70	1815	35070	624120	10946880	194745600
$B_4(n)$	0	0	1215	55461	1722840	46312560	1171648800
$B_5(n)$	0	0	0	27951	1977388	89940312	3394833120

Отметим, что в “Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей” Слоэна [6] отсутствуют данные о числе помеченных последовательно-параллельных блоков с заданными числом вершин и цикломатическим числом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] M. Bodirsky, O. Giménez, M. Kang, M. Noy, *European J. Combin.*, **28**:8 (2007), 2091–2105. **[2]** S. Radhavan, *Networks*, **43**:3 (2004), 163–176. **[3]** В. А. Воблый, *Дискретн. анализ и исслед. опер.*, **26**:1 (2019), 20–32. **[4]** В. А. Воблый, А. К. Мелешко, *Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы и приложения*, Материалы XV международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова, ТПГУ им. Л. Н. Толстого, Тула, 2018, 168–170. **[5]** Я. Гульден, Д. Джексон, *Перечислительная комбинаторика*, Наука, М., 1990. **[6]** N. J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, `https://oeis.org`.

В. А. Воблый
Всероссийский институт научной
и технической информации РАН, г. Москва
E-mail: `vitvobl@yandex.ru`

Поступило
06.02.2020
Принято к публикации
19.02.2020