РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ

М. А. ТАИРОВ

(*Москва*)

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(x, u)}{\partial x^2} \tag{1}$$

при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t < \infty$ со следующими условиями:

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u|_{x=0} = v_0(t), \qquad u|_{x=1} = 0, \tag{2}$$

где функция $\varphi(x, u)$ определена для значений $u \geqslant 0$.

В случае, когда $\varphi(x, u) = u^k$, $k > 1$, уравнение (1) является модельным уравнением одномерной нестационарной фильтрации жидкости или газа в пористой среде [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^k}{\partial x^2}. \tag{3}$$

Исследованию уравнений (3) посвящены работы [2] — [6] и гл. VI книги [7]. В [3] доказывается конечность скорости распространения фронта $u = 0$ в процессах, описываемых уравнениями (3), когда жидкость в начальный момент сосредоточена в конечной части пространства (как известно, линейным уравнениям параболического типа соответствует бесконечная скорость распространения фронта).

Если начальные и граничные условия влекут за собой вырождение уравнения (3), то краевая задача для уравнения (3) может не иметь классического решения. Для вырождающихся уравнений (3) построены так называемые автомодельные решения [2] такие, что в точках, где $u(t, x) = 0$, производные $\partial u/\partial x$, $\partial^2 u^k/\partial x^2$ имеют конечный скачок или обращаются в бесконечность, в то время как $\partial u/\partial x$ непрерывна, поэтому $u(t, x)$ не имеет в этих точках предписываемой уравнением гладкости и фактически является решением в некотором обобщенном смысле. Именно наличие точек, в которых $u(t, x) = 0$, создает основные трудности численного решения. В [4] отмечено, что разностные схемы, составляемые без учета таких точек, дают качественно неверный результат.

В настоящей работе предлагается численный метод решения задачи типа (1) — (2). Примеры расчетов приведены для следующей задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^3}{\partial x^2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{4}$$

$$u(0, x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases} \tag{5}$$

$$u(t, 0) \equiv 1, \qquad u(t, 1) \equiv 0.$$

Асимптотическое решение этой задачи, соответствующее стационарному режиму, есть кубическая парабола $u_c = \sqrt[3]{1 - x}$. Таким образом, полученное численное решение с течением времени должно стремиться к этой асимптоте.

Вследствие конечности скорости распространения фронта $x = \delta(t)$ краевую задачу (4) — (5) можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{aligned} &u(0, x) = u_0(x) \ \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant \delta_0, && u(0, x) \equiv 0 \ \text{ при } x > \delta_0, \\ &u(t, 0) = v_0(t), && u[t, \delta(t)] \equiv 0 \ \text{ при } \delta(t) < 1, \\ &u(t, 0) = v_0(t), && u(t, 1) = 0 \ \text{ при } t \geqslant t_0, \end{aligned}$$

где t_0 — время, при котором δ достигает значения единицы.

Применим метод интегральных соотношений [8] к решению этой задачи.

Умножим уравнение (4) на $\sin \pi n x / \delta$ и проинтегрируем от 0 до $\delta(t)$ по x:

$$\int_0^\delta \sin \pi n \frac{x}{\delta} \frac{\partial u}{\partial t}\, dx = \int_0^\delta \sin \pi n \frac{x}{\delta} \frac{\partial^2 u^3}{\partial x^2}\, dx. \tag{1.1}$$

Учитывая, что

$$\sin \pi n \frac{x}{\delta} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[u \sin \pi n \frac{x}{\delta}\right] + u\pi n \frac{x}{\delta^2} \delta' \cos \pi n \frac{x}{\delta},$$

левую часть (1.1) после выполнения интегрирования по частям можно написать в виде

$$\int_0^\delta \sin \pi n \frac{x}{\delta} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d}{dt} \delta \int_0^1 u \sin \pi n s \, ds + \pi n \delta' \int_0^1 us \cos \pi n s \, ds,$$

где введено обозначение $x / \delta = s$. Для правой части (1.1) получаем

$$\int_0^\delta \sin \pi n \frac{x}{\delta} \frac{\partial^2 u^3}{\partial x^2} dx = v_0^3 \frac{\pi n}{\delta} - \frac{\pi^2 h^2}{\delta} \int_0^1 u^3 \sin \pi n s \, ds.$$

Окончательный вид интегрального соотношения:

$$\delta \frac{d}{dt} \int_0^1 u \sin \pi n s \, ds + \delta' \left[\int_0^1 u \sin \pi n s \, ds + \pi n \int_0^1 us \cos \pi n s \, ds\right] = \tag{1.2}$$

$$= \frac{\pi n}{\delta} v_0^3 - \frac{\pi^2 n^2}{\delta} \int_0^1 u^3 \sin \pi n s \, ds.$$

Аппроксимируем функции в N-м приближении следующим образом:

$$u(t, s) = v_0 (1 - s) + \sum_{k=1}^{N-1} a_k \sin \pi k s, \quad u^3(t, s) = v_0^3 (1 - s)^2 + \sum_{k=1}^{N-1} A_k \sin \pi k s.$$

Тогда интегральные соотношения примут вид

$$\delta \frac{d}{dt}\left[v_0(t) \int_0^1 (1 - s) \sin \pi n s \, ds + \int_0^1 \sum_{k=1}^{N-1} \sin \pi k s \sin \pi n s \, ds\right] +$$

$$+ \delta' \left[v_0(t) \int_0^1 (1 - s) \sin \pi n s \, ds + \int_0^1 \sum_{k=1}^{N-1} a_k \sin \pi k s \sin \pi n s \, ds + \right.$$

$$+ \pi n v_0(t) \int_0^1 (1 - s) s \cos \pi n s \, ds + \pi n \int_0^1 \sum_{k=1}^{N-1} a_k^s \sin \pi k s \cos \pi n s \, ds =$$

$$= \frac{\pi n}{\delta} v_0^3(t) - \frac{\pi^2 n^2}{\delta} v_0^3(t) \int_0^1 (1 - s)^2 \sin \pi n s \, ds - \frac{\pi^2 n^2}{\delta} \int_0^1 \sum_{k=1}^{N-1} A_k \sin \pi k s \sin \pi n s \, ds.$$

После интегрирования получим

$$\delta \frac{d}{dt}\left[v_0(t) \frac{1}{\pi n} + \frac{1}{2} a_n\right] + \delta' \left[v_0(t) \frac{1}{\pi n} + \frac{1}{2} a_n + \frac{v_0(t)}{\pi n}(-1 - (-1)^n) + \right.$$

$$\left. + n \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^{k-n+1} \frac{k a_k}{k^2 - n^2} - \frac{1}{4} a_n\right] =$$

$$= \frac{\pi n}{\delta} v_0^3(t) - \frac{\pi n}{\delta} v_0^3(t) \left[1 - \frac{2}{\pi^2 n^2}(1 - (-1)^n)\right] - \frac{\pi^2 n^2}{2\delta} A_n.$$

В частности, при $v_0(t) = 1$

$$\frac{da_n}{dt} = a_n' = \frac{4}{\pi n \delta^2}[1 - (-1)^n] - \frac{\pi^2 n^2}{\delta^2} A_n - \tag{1.3}$$

$$- \frac{2\delta'}{\delta}\left[-(-1)^n \frac{1}{\pi n} + \frac{1}{4} a_n - n \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^{k+n} \frac{k a_k}{k^2 - n^2}\right], \qquad n = 1, 2, \ldots, N - 1;$$

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{\nu=1}^{N-1} [u_\nu(t) - (1 - s_\nu)] \sin \pi k \frac{\nu}{N},$$

$$A_k = \frac{2}{N} \sum_{\nu=1}^{N-1} [u_\nu^3(t) - (1 - s_\nu)^2] \sin \pi k \frac{\nu}{N}. \tag{1.4}$$

В системе уравнений (1.3) число неизвестных равно N, а число уравнений $N-1$. Чтобы получить недостающее уравнение, исследуем перемещение фронта $\delta(t)$.

Уравнение (4) имеет особенность при $u \to 0$. Положим в окрестности нуля

$$u \sim a(t)[\delta - x]^\nu.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim a'(t)(\delta - x)^\nu + \nu a(t)(\delta - x)^{\nu-1}\delta' \sim \nu a(t)(\delta - x)^{\nu-1}\delta',$$

$$u_\nu^3 \sim a^3(t)(\delta - x)^{3\nu}, \qquad \frac{\partial u^3}{\partial x} \sim 3\nu a^3(t)(\delta - x)^{3\nu-1},$$

$$\frac{\partial^2 u^3}{\partial x^2} \sim 3\nu(3\nu - 1)a^3(t)(\delta - x)^{3\nu-2},$$

$$3\nu(3\nu - 1)a^3(t)(\delta - x)^{3\nu-2} = \nu a(t)(\delta - x)^{\nu-1}\delta',$$

$$3\nu - 2 = \nu - 1, \qquad \nu = \frac{1}{2},$$

$$\delta' = 3(3\nu - 1)a^2(t) = \frac{3}{2}a^2(t);$$

так как $u^2 = a^2(t)(\delta - x)$, то

$$a^2(t) = -\left(\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)_{x=\delta}.$$

Следовательно,

$$\delta' = -\frac{3}{2}\left(\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)_{x=\delta}.$$

Аппроксимируя по формуле

$$u^2(t, x) = v_0^2(1 - s) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \sin \pi k s,$$

получаем недостающее уравнение:

$$\delta' = -\frac{3}{2}\left[-1 + \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k \pi k b_k\right] \quad (v_0 = 1), \tag{1.5}$$

где

$$\delta_k = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} [u_\nu^2 - (1 - s_\nu)] \sin \pi k \frac{\nu}{N}.$$

Уравнения (1.3) вместе с уравнением (1.5) составляют совместную систему для определения искомых функций $u_1, u_2, \ldots, u_{N-1}, \delta$. Приведем полученные в канонической форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений для следующих приближений.

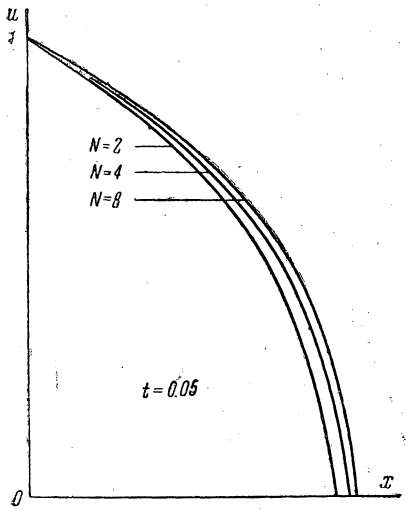
Первое приближение ($N = 2$):

$$u_1' = \frac{8}{\pi\delta^2} - \frac{\pi^2}{\delta^2} u_1^3 - \frac{1}{2}\frac{\delta'}{\delta} u_1 + \frac{\delta'}{\delta}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi}\right) + \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{\delta^2}, \quad \delta' = \frac{3}{2\delta}\left[1 + \pi\left(u_1^2 - \frac{1}{2}\right)\right].$$

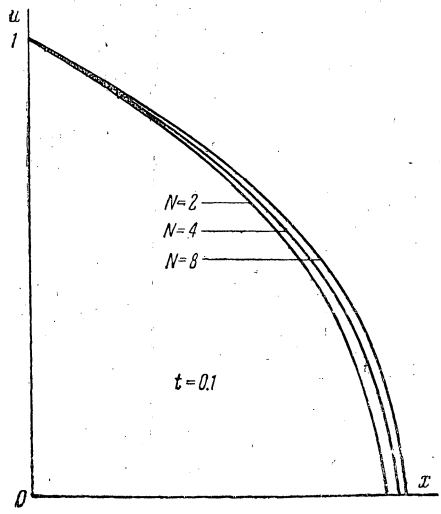
Третье приближение ($N = 4$):

$$u_1' = \frac{a_1' + a_3'}{\sqrt{2}} + a_2', \qquad u_2 = a_1' - a_3', \qquad u_3' = \frac{a_1' + a_3'}{\sqrt{2}} - a_2',$$

$$\delta' = \frac{3}{2\delta}\left(1 - \sum_{k=1}^{3} (-1)^k \pi k b_k\right),$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где a_n' вычисляются по формуле (1.3). Соответствующая система получена и для седьмого приближения ($N = 8$), но мы ее не приводим.

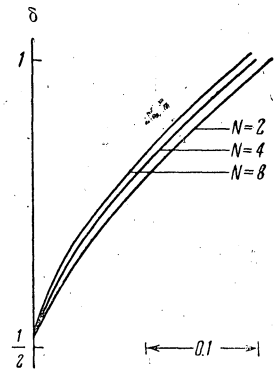
Начальные данные для этих систем:

$$u_n(0) = 1, \quad \delta_0 = \frac{1}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots, N-1). \qquad (1.6)$$

Полученные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными данными (1.6) решались методом Рунге — Кутта на машине БЭСМ-2.

На фиг. 1—3 приведены графики этих решений для вышеуказанных приближений в различные моменты времени.

Вычисления проводились до момента, когда δ достигает значения единицы. Для дальнейшего расчета необходимо использовать систему (1.3), в которой нужно положить $\delta \equiv 1$, а уравнение (1.5) отбрасывается.



Фиг. 3

Сравнивая графики решений на фиг. 1—3, можно видеть, что значения полученных решений в соответствующих точках мало отличаются и приближение к предельному решению улучшается с увеличением порядкового номера приближений.

Поступила в редакцию
11.03.1962

Цитированная литература

1. Л. С. Лейбензон. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М. — Л., Гостехиздат, 1947.
2. Г. И. Баренблатт. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. Прикл. матем. и механ., 1952, **16**, вып. 1, 67—78.
3. Г. И. Баренблатт, М. И. Вишик. О конечной скорости распространения при фильтрации жидкости и газа. Прикл. матем. и механ., 1956, **20**, вып. 3, 411—417.
4. В. Ф. Баклановская. Численное решение одной задачи нестационарной фильтрации. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 1, 105—112.
5. В. Ф. Баклановская. Численное решение одномерной задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации. Ж. вычисл. матем и матем. физ., 1961, **1**, № 3, 461—470.

6. О. А. Олейник, А. С. Калашников, Чжоу Юй-линь. Уравнения типа нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, 22, № 5, 666—705.
7. Р. Д. Рихтмайер. Разностные методы решения краевых задач. М., Изд-во ин. лит., 1960.
8. А. А. Дородницын. Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики. Тр. III Всес. матем. съезда, т. II. М., Изд-во АН СССР, 1956, 447—453.

РАСЧЕТ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ НА ЭЛЕКТРОННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

Б. Н. ПШЕНИЧНЫЙ

(*Киев*)

Задачи расчета энергетических систем (электрических, газовых, водопроводных) приводят при их решении к необходимости выяснения ряда вопросов математической теории таких систем, не зависящей от конкретных особенностей данной сети. Расчет сети при заданных параметрах и оптимальный экономический выбор этих параметров в любом случае, является ли данная сеть газовой или электрической, требует решения систем уравнений, имеющих общую структуру. В настоящей статье рассматривается общая теория таких уравнений, приводящая к конкретным методам расчета, удобных для программирования и решения задач инженерного проектирования энергетических сетей на электронных вычислительных машинах.

Всякая реальная энергетическая сеть по своей топологической структуре эквивалентна некоторому графу (см. [1]). Поэтому для строгого математического рассмотрения сети целесообразно дать определение понятия графа и некоторые его основные свойства.

Множество элементов, называемых ребрами, и множество элементов, называемых вершинами, таких, что каждому ребру сопоставлены две вершины (его концы), называется графом.

В дальнейшем рассматриваются лишь связные плоские графы, т. е. такие, которые могут быть изображены на плоскости без самопересечений и две любые вершины которых могут быть соединены последовательностью ребер графа.

Если занумеровать вершины графа G числами $i = 1,\ldots, N$, то каждое ребро будет обозначено двумя индексами $[ij]$ — номерами вершин, которые оно соединяет, причем первым идет индекс начала ребра. Обозначим также через A_i множество вершин, соединенных с данной i-й вершиной ребрами.

Связный граф называется деревом, если удаление любого ребра приводит к его распаду на две несвязные части. Всякое дерево R, являющееся подграфом графа G и содержащее все его вершины, называется максимальным деревом графа G. Заметим, что число ребер n, не входящих в максимальное дерево графа G, не зависит от выбора дерева. Для плоского графа это число равно числу конечных областей, на которое граф разбивает плоскость.

В каждом узле реальной сети задано потребление Q_i вещества ($Q_i < 0$, если вещество подается в систему). В связи с этим в каждом ребре сети возникает поток q_{ij}. Закон сохранения вещества определяет следующую систему уравнений для q_{ij}, которую удобно записать, вводя дополнительные неизвестные соотношением

$$q_{ji} = -q_{ij}, \tag{1}$$

в следующем виде:

$$\sum_{j \in A_i} q_{ji} = Q_i, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{2}$$