A. S. Andreev, O. A. Peregudova, On the Lyapunov functionals method in the stability problem of Volterra integro-differential equations, *Zhurnal SVMO*, 2018, Volume 20, Number 3, 260–272

DOI: 10.15507/2079-6900.20.201803.260-272

Математика

DOI 10.15507/2079-6900.20.201803.260-272

УДК 517.9

О методе функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра

© **А. С. Андреев** [1], **О. А. Перегудова** [2]

Аннотация. В статье рассмотрена задача о применении метода функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, правая часть которых представляет собой сумму составляющих мгновенного действия, а также с конечным и бесконечным запаздыванием. Актуальность задачи состоит в широком применении таких сложных по своей структуре уравнений в моделировании систем управления механическими системами при помощи интегральных регуляторов, биологических, физических и других процессов. Проведено развитие метода в направлении выявления предельных свойств решений посредством функционалов Ляпунова со знакопостоянной производной. Доказаны теоремы о квазиинвариантности положительного предельного множества ограниченного решения, об асимптотической устойчивости (в том числе, равномерной) нулевого решения. Результаты основаны на построении новой структуры топологической динамики исследуемых уравнений. Доказанные теоремы применяются в решении задачи об устойчивости двух модельных систем, представляющих собой обобщения ряда известных моделей естествознания и техники.

Ключевые слова: нелинейные системы интегро-дифференциальных уравнений, функционал Ляпунова, устойчивость, топологическая динамика, предельное уравнение.

1. Введение

Работы В. Вольтерра по интегро-дифференциальным уравнениям [1] положили основу для большого современного раздела теоретической и прикладной математики – теории функционально-дифференциальных уравнений и ее приложений в естествознании и техники. Основным методом исследования задач об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений является метод функционалов Ляпунова, впервые представленный в конце 50-х годов XX века в работах Н.Н. Красовского [2]. С тех пор теоретическому и прикладному развитию этого метода было посвящено огромное количество работ. Активные исследования в этом направлении продолжаются и в настоящее время (см., например, [3]).

[1] **Андреев Александр Сергеевич**, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42.), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9408-0392, asa5208@mail.ru

[2] **Перегудова Ольга Алексеевна**, профессор кафедры информационной безопасности и теории управления, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42.), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2701-9054, peregudovaoa@gmail.com

Отсутствие универсального алгоритма построения функционала Ляпунова для различных классов задач стимулирует исследования по модификации и обобщению широко известных, ставших классическими, теорем [4], [5], [6]. Эффективными в приложениях представляются обобщения, заключающиеся в выводе достаточных условий асимптотической устойчивости посредством функционала Ляпунова со знакопостоянной производной. Для автономных и периодических по времени, неавтономных уравнений с конечным запаздыванием такие условия выведены в [2]–[7]. Важной особенностью доказанных теорем является использование динамических свойств решений этих уравнений. Сложность вывода подобных результатов для уравнений с бесконечным и с неограниченным запаздыванием состоит, прежде всего, в построении функциональных пространств решений этих уравнений.

Проблема аксиоматического построения функциональных пространств функционально-дифференциальных уравнений с бесконечным запаздыванием во многом решена [8], [9]). Это решение позволило выявить особенности определений устойчивости для таких уравнений, провести соответствующее развитие метода функционалов Ляпунова [8], [10], [11].

Интегро-дифференциальные уравнения типа В. Вольтерра составляют определенный класс функционально-дифференциальных уравнений общего типа. Поэтому к ним широко применимы соответствующие общие методы исследования устойчивости. Однако решения этих уравнений имеют определенные качественные свойства [12], позволяющие существенно расширить применение функционалов Ляпунова [13]–[16].

В настоящей статье представлено развитие метода функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости интегро-дифференциального уравнений, включающих члены с конечным и бесконечным запаздыванием. Представлены теоремы о предельном поведении, асимптотической устойчивости, в том числе, равномерной. Основу для такого развития составило построение топологической динамики уравнений (параграф 2). В параграфе 4 получены условия равномерной асимптотической устойчивости систем уравнений, являющихся обобщением целого ряда моделей естествознания и техники.

2. Топологическая динамика уравнений

Рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра, включающее в себя составляющие с конечным и неограниченным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = f^{(1)}(t,x(t)) + f^{(2)}(t,x(t-\mu^{(1)}(t)) + \int\limits_{t-\mu^{(2)}(t)}^{t} g^{(1)}(t,s,x(t),x(s))ds + \int\limits_{t_0}^{t} g^{(2)}(t,s,x(t),x(s))ds, \tag{2.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ – $n-$мерное линейное действительное пространство с некоторой нормой $|x|$, функции $\mu^{(j)}(t)$, $f^{(j)}(t,x)$ и $g^{(j)}(t,s,x,y)$ ($j = 1,2$) таковы, что $\mu^{(j)} \in C^1(\mathbb{R}^+ \to [0,\mu_0],\ \mu_0 = const > 0)$, $f^{(j)} \in C(\mathbb{R}^+ \times D \to \mathbb{R}^n)$, $g^{(1)} \in C(\mathbb{R}^+ \times [-\mu_0,\infty) \times D \times D \to \mathbb{R}^n)$, $g^{(2)} \in C(S^+ \times D \times D \to \mathbb{R}^n)$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ есть некоторая область, $S^+ = \{(t,s) : t \in \mathbb{R}^+, 0 \le s \le t\}$.

Полагаем, что для производных функций $\mu^{(j)}(t)$ ($j = 1,2$) при всех $t \in \mathbb{R}^+$ имеют место неравенства

$$\mu_2 \le \frac{d\mu^{(j)}(t)}{dt} \le 1 - \mu_1, \quad \mu_2 = const, 0 < \mu_1 < 1, \mu_1 = const, \quad (j = 1,2).$$

Остальные функции ограничены и удовлетворяют относительно каждого компактного множества $K \subset D$ условиям Липшица следующего вида

$$
\begin{gathered}
|f^{(j)}(t,x)| \le m_1,\ |f^{(j)}(t,x^{(2)}) - f^{(j)}(t,x^{(1)})| \le L_1|x^{(2)} - x^{(1)}| \\
\forall (t,x),(t,x^{(1)}),(t,x^{(2)}) \in \mathbb{R}^+ \times K, \\
|g(t,s,x,y)| \le m_1,\ |g(t_2,s_2,x^{(2)},y^{(2)}) - g(t_1,s_1,x^{(1)},y^{(1)})| \le \\
\le L_2(|x^{(2)} - x^{(1)}| + |y^{(2)} - y^{(1)}| + |t_2 - t_1| + |s_2 - s_1|) \\
\forall (t,\tau,x,y),(t_1,\tau_1,x^{(1)},y^{(1)}),(t_2,\tau_2,x^{(2)},y^{(2)}) \in S^+ \times K \times K \\
m_j = m_j(K),\ L_j = L_j(K) \quad (j = 1,2).
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

Положим также, что функция $g^{(2)}(t,s,x,y)$ на каждом компактном множестве $K \subset D \times D$ удовлетворяет неравенствам

$$
\begin{gathered}
|g^{(2)}(t,s,x,y)| \le g_0(s-t,K) \quad \forall (t,s,x,y) \in S^+ \times K, \\
\int\limits_{-\infty}^{0} g_0(\nu,K)d\nu \le m(K) < +\infty.
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

Введем фазовое пространство непрерывных функций $C_\mu = \{\varphi : [-\mu_0, 0] \to \mathbb{R}^n\}$ с нормой $\|\varphi\| = \sup(|\varphi(s)|,\ -\mu_0 \le s \le 0)$.

Для непрерывной функции $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ определим функции: $x_{\mu t} \in C_\mu$, $x_{\mu t} = x(t+s)$, $-\mu_0 \le s \le 0$; $x_t = x(t+s)$, $-\infty < s \le 0$.

Из условий (2.2) и (2.3) следует, что для каждой начальной точки $(\alpha,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_\mu$: $\varphi(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, будет существовать единственное решение $x = x(t,\alpha,\varphi)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее условию $x_\alpha^{(0)} = x(\alpha + s) = \varphi(s)$, $\mu(\alpha) \le s \le 0$.

Для решения уравнения (2.1), ограниченного при всех $t \ge t_0 - \mu(t_0)$ компактом $K \subset \mathbb{R}^n$, будем иметь оценку

$$
|x(t_2,t_0,x_0) - x(t_1,t_0,x_0)| \le (2m_1(K) + 2m_2(K))|t_2 - t_1| \quad \forall t_1,t_2 \ge t_0 + \mu_0.
$$

Пусть C_∞ есть множество функций $\psi = \psi(t)$, определенных и непрерывных по $t \in (-\infty, 0]$. Для некоторой последовательности чисел $\{r_j\}$, такой, что $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_k < \ldots$, $r_k \to \infty$ при $k \to \infty$, выделим подмножества $K_j \subset C_\infty$ функций $\psi = \psi(\tau)$ таких, что $\forall \tau, \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства

$$
|\psi(\tau)| \le r_j, \quad |\psi(\tau_2) - \psi(\tau_1)| \le (2m_1(K) + m_2(K))|t_2 - t_1|.
$$

Множество $\Gamma = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_j$ с нормой $|||\psi||| = \sup(|\psi(s)|, -\infty < s \le 0)$ будет являться полным сепарабельным банаховым пространством.

В силу условий (2.2) семейства сдвигов

$$
\mathcal{F}^{(j)} = \{f_\tau^{(j)}(t,x) = f(\tau + t, x), \quad \tau \in \mathbb{R}\}, \quad j = 1,2,
$$

$$
\begin{gathered}
\mathcal{G}^{(j)} = \{g_\tau^{(j)}(t,s,x,y) = g^{(j)}(\tau + t, \tau + s, x, y), \quad \tau \in \mathbb{R}\}, \quad j = 1,2, \\
\mathcal{M}^{(j)} = \{\mu_\tau^{(j)}(t) = \mu^{(j)}(t + \tau), \quad \tau \in \mathbb{R}\}, \quad j = 1,2
\end{gathered}
$$

являются предкомпактными в некоторых функциональных пространствах [4], [17]: $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n\}$, $\mathcal{G} = \{g : S \times D \times D \to \mathbb{R}^n\}$, $\mathcal{M} = \{\mu : \mathbb{R} \to [0, \mu_0]\}$.

Назовем $(f_*^{(j)}, g_*^{(j)}, \mu_*^{(j)})$, $j = 1, 2$, предельной совокупностью, если функции $f_*^{(j)}$, $g_*^{(j)}$, $\mu_*^{(j)}$, $j = 1, 2$ являются предельными для одной и той же последовательности $t_k \to \infty$, согласно [4], [17], соответственно

$$f_*^{(j)}(t, x) = \frac{d}{dt} \lim_{t_k \to +\infty} \int_0^t f^{(j)}(t_k + \tau, x) d\tau,$$

$$g_*^{(j)}(t, s, x, y) = \lim_{t_k \to +\infty} g^{(j)}(t_k + \tau, t_k + s, x, y),$$

$$\mu_*^{(j)}(t) = \lim_{t_k \to +\infty} \mu^{(j)}(t_k + t).$$

Множество таких совокупностей определим как оболочку $H^+(f, g, \mu)$.

Для каждой предельной совокупности $(f_*^{(j)}, g_*^{(j)}, \mu_*^{(j)}) \in H^+(f, g, \mu)$, $j = 1, 2$ можно ввести предельное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = f_*^{(1)}(t, x(t)) + f_*^{(2)}(t, x(t - \mu_*^{(1)}(t)))+ \\ + \int\limits_{t-\mu_*^{(2)}}^{t} g_*^{(1)}(t, \tau, x(t), x(\tau)) d\tau + \int\limits_{-\infty}^{t} g_*^{(2)}(t, \tau, x(t), x(\tau)) d\tau\end{gathered} \tag{2.4}$$

с областью определения $\mathbb{R} \times \Gamma$.

Из этого построения следует, что для каждой начальной точки $(\alpha, \psi) \in \mathbb{R} \times \Gamma$ решение $x = x^*(t, \alpha, \psi)$ уравнения (2.4), удовлетворяющее условию $x_\alpha^*(\alpha, \psi) = \psi$, будет единственным ($x_\alpha^*(\alpha, \psi) = x^*(\alpha + s, \alpha, \psi)$, $-\infty < s \le 0$).

Определение 2.1 *Пусть $x = x(t, \alpha, \varphi)$ есть некоторое решение уравнения (2.1), определенное для всех $t \ge \alpha - h$. Функция $\psi \in \Gamma$ называется положительной предельной точкой этого решения, если существуют последовательности $t_m \to \infty$ и $T_m \to \infty$, такие что $x(t_m + s, t_0, \varphi) \to \psi(s)$ равномерно по $s \in [-T_m, 0]$ при $m \to \infty$. Множество всех таких точек образует в Γ положительное предельное множество $\Omega^+(\alpha, \varphi)$.*

Следуя [15], [16], можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.1 *Пусть $x = x(t, t_0, x_0)$ есть решение уравнения (2.1), ограниченное компактом $K \subset D$ при всех $t \ge t_0$. Тогда для каждой предельной точки $\psi \in \Omega^+$ существует совокупность $(f_*^{(j)}, g_*^{(j)}, \mu_*^{(j)}) \in H^+(f, g, \mu)$, $j = 1, 2$, такая, что решение $x = x^*(t, 0, \psi)$ уравнения (2.4) содержится в Ω^+, т.е. $x_t^*(0, \psi) \in \Omega^+$ при $t \in \mathbb{R}$.*

3. Теоремы об устойчивости

Введем функционал Ляпунова, определяемый вдоль произвольной функции $x \in C^1([t_0 - \mu_0, +\infty) \to D)$ равенством

$$\begin{aligned}V(t) = {} & V^{(0)}(t, x(t)) + \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{t-\mu^{(j)}(t)}^{t} V^{(j)}(t, s, x(t), x(s)) ds+ \\ & + \int\limits_{t-\mu_0}^{t} \int\limits_{s}^{t} V^{(3)}(t, s, \nu, x(t), x(s), x(\nu)) d\nu ds + \int\limits_{t_0}^{t} V^{(4)}(t, s, x(t), x(s)) ds+ \\ & + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{s}^{t} V^{(5)}(t, s, \nu, x(t), x(s), x(\nu)) d\nu ds,\end{aligned} \tag{3.1}$$

где $V^{(j)}$ $(j = 0, 1, \ldots, 5)$ – скалярные функции, определенные и непрерывно дифференцируемые в областях задания своих переменных в соответствии с уравнением (2.1). При этом функции $V^{(4)}$ и $V^{(5)}$ таковы, что функционал $V(t)$ существует.

Допустим, что производная функционала (3.1) вдоль решения $x = x(t, \alpha, \varphi)$ уравнения (2.1) удовлетворяет при $t > \alpha + \mu_0$ неравенству

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \le &-W^{(0)}(t, x(t)) - \sum_{j=1}^{2} W^{(j)}(t, x(t - \mu^{(j)}(t)))- \\ &- \int_{t-\mu_0}^{t} W^{(3)}(t, s, x(t), x(s))ds - \int_{t_0}^{t} W^{(4)}(t, s, x(t), x(s))ds- \\ &- \int_{t_0}^{t}\int_{s}^{t} W^{(5)}(t, s, \nu, x(t), x(s), x(\nu))d\nu ds, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $W^{(j)}$ $(j = 0, 1, \ldots, 5)$ – скалярные неотрицательные функции со свойствами типа (2.2), предполагающими предкомпактность семейств их сдвигов по t, (t, s), (t, s, ν) и существование для $W^{(4)}$ и $W^{(5)}$ оценки типа (2.3).

Тем самым могут быть построены предельные семейства $\{\mu_*^{(j)}, f_*^{(j)}, g_*^{(j)}, W_*^{(k)}\}$, $j = 1, 2$, $k = 0, 1, \ldots, 6$. Для функционалов $W_*^{(4)}$ и $W_*^{(5)}$ имеет место существование интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{t} W_*^{(4)}(t, s, x(t), x(s))ds, \quad \int_{-\infty}^{t}\int_{s}^{t} W_*^{(5)}(t, s, \nu, x(t), x(s), x(\nu))d\nu ds,$$

если $x(t) \in K \subset D$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Может быть доказана следующая теорема.

Теорема 3.1 *Предположим, что:*

1) существует функционал $V = V(t, x_t) \ge 0$ вида (3.1), производная которого вдоль каждого решения уравнения (2.1) удовлетворяет неравенству (3.2);

2) решение $x = x(t, \alpha, \varphi)$ уравнения (2.1) ограничено некоторым компактом $K \subset \mathbb{R}^n$ при всех $t \ge t_0$.

Тогда положительное предельное множество $\Omega^+(\alpha, \varphi)$ может быть представлено в виде объединения по всем предельным совокупностям $(f_*^{(j)}, g_*^{(j)}, W_*^{(k)})$, $j = 1, 2$, $k = 0, 1, \ldots, 5$, решений $x = x^*(t, 0, \psi)$ предельных уравнений (2.4), таких что

$$\begin{gathered} W_*^{(0)}(t, x^*(t, 0, \psi)) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}; \\ W_*^{(j)}(t, x^*(t - \mu_*^{(j)}(t), 0, \psi)) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad j = 1, 2; \\ W_*^{(3)}(t, s, x^*(t, 0, \psi), x^*(s, 0, \psi)) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R},\ t - \mu_0 \le s \le t; \\ W_*^{(4)}(t, s, x^*(t, 0, \psi), x^*(s, 0, \psi)) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R},\ -\infty < s \le t; \\ W_*^{(5)}(t, s, \nu, x^*(t, 0, \psi), x^*(s, 0, \psi), x^*(\nu, 0, \psi)) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R},\ -\infty < s \le \nu \le t. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Замечание 3.1 *Теорема 3.1 представляет собой теорему типа принципа квазиинвариантности для уравнения (2.1)* [4], [18].

Исследуем задачу об устойчивости нулевого решения уравнения (2.1), полагая, что $f^{(1)}(t, 0) \equiv 0$, $f^{(2)}(t, \tau, 0, 0) = 0$, $g^{(j)}(t, \tau, 0, 0) \equiv 0$, $j = 1, 2$. Для этого введем обозначение через $a_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ для функции типа Хана, $i = 1, 2, 3$ [19].

Теорема 3.2 *Предположим, что можно найти функционал вида (3.1), такой что* $V_1(t,x) \geq a_1(||x||)$ $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times D$, *а его производная вдоль решения уравнения (2.1) удовлетворяет неравенству (3.2). При этом для любой предельной совокупности* $(f_*^{(j)}, g_*^{(j)}, W_*^{(k)})$, $j = 1,2$, $k = 0,1,\ldots,5$, *не существует решений предельного уравнения (2.4), таких что имеют место тождества (3.3), кроме нулевого* $x = 0$.

Тогда решение $x = 0$ *уравнения (2.1) асимптотически устойчиво.*

Теорема 3.3 *При добавлении в условия теоремы 3.2 условия* $V^{(0)}(t,x) \leq a_2(|x|)$, $|V^{(j)}(t,\tau,x,y)| \leq a_2(|x|+|y|)$, $j = 1,2,$ *получим равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения* $x = 0$ *уравнения (2.1).*

Соответствующими видоизменениями могут быть доказаны теоремы об асимптотической устойчивости, равномерной по x_0, о неустойчивости.

4. Примеры

Пример 4.1

Пусть $x' = (y', z')'$, $y \in \mathbb{R}^l$, $z \in \mathbb{R}^m$, $l + m = n$, $m \geq l$, $(\cdot)'$ – *операция транспонирования. Рассмотрим систему уравнений вида*

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A^{(11)}(t,x(t))\dfrac{\partial \Pi(x(t))}{\partial y} + A^{(12)}(t,x(t))\dfrac{\partial \Pi(x(t))}{\partial z}, \\ \dot{z}(t) = A^{(21)}(t,x(t))\dfrac{\partial \Pi(x(t))}{\partial y} + A^{(22)}(t,x(t))\dfrac{\partial \Pi(x(t))}{\partial z} + \\ +B(t,x(t))\dfrac{\partial \Pi(x(t-\mu^{(2)}(t)))}{\partial z} + \displaystyle\int\limits_{t-\mu^{(2)}(t)}^{t} G^{(1)}(t,s)\dfrac{\partial \Pi(x(s))}{\partial z}ds + \int\limits_{t_0}^{t} G^{(2)}(t,s)\dfrac{\partial \Pi(x(s))}{\partial z}ds, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $\Pi \in C^2(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ *есть некоторая скалярная функция, такая, что*

$$\begin{gathered} \frac{\partial \Pi(x(0))}{\partial x} = 0; \quad \left|\frac{\partial \Pi(x)}{\partial y}\right| \geq a_1(|y|), \\ a_2(|z|) \leq \left|\frac{\partial \Pi(x)}{\partial z}\right| \leq a_3(|z|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \end{gathered} \tag{4.2}$$

функции $\mu^{(j)} \in \mathcal{M}$, *матрицы* $A^{(ij)}$, B, $G^{(j)}$ *для всех* $(t,x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2n}$ *удовлетворяют условиям типа (2.2) и (2.3), а также имеют место неравенства*

$$y'(A^{(11)}(t,x) + (A^{(11)}(t,x))')y \leq 0, \quad |D(t,x)| \geq d_0 = const > 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \tag{4.3}$$

где $D(t,x)$ – *какой-либо минор порядка* m *матрицы* $A^{(21)} = -(A^{(12)})'$.

Для рассматриваемой системы (4.1) в соответствии с п. 2 выполнены все условия ее предкомпактности, предельные системы имеют следующий вид

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A_*^{(11)}(t,x(t))\dfrac{\partial \Pi(x(t))}{\partial y} + A_*^{(12)}(t,x(t))\dfrac{\partial \Pi(x(t))}{\partial z}, \\ \dot{z}(t) = A_*^{(21)}(t,x(t))\dfrac{\partial \Pi(x(t))}{\partial y} + A_*^{(22)}(t,x(t))\dfrac{\partial \Pi(x(t))}{\partial z} + \\ +B_*(t,x(t))\dfrac{\partial \Pi(x(t-\mu_*^{(2)}(t)))}{\partial z} + \displaystyle\int\limits_{t-\mu_*^{(2)}(t)}^{t} G_*^{(1)}(t,s)\dfrac{\partial \Pi(x(s))}{\partial z}ds + \int\limits_{-\infty}^{t} G_*^{(2)}(t,s)\dfrac{\partial \Pi(x(s))}{\partial z}ds, \end{cases} \tag{4.4}$$

где матрицы $A_*^{(ij)}$, B_* , $G_*^{(i)}$ $(i,j=1,2)$ *являются предельными для соответствующих матриц из (4.1) согласно представленному для уравнения (2.1) построению. В частности,*

$$A_*^{(ij)}(t,x)=\frac{d}{dt}\lim_{t_k\to\infty}\int\limits_0^t A^{(ij)}(t_k+\tau)d\tau,$$

$$G_*^{(j)}(t,s)=\lim_{t_k\to\infty}G^{(j)}(t_k+t,t_k+s),$$

минор $D^*(t,x)$ *матрицы* $A_*^{(21)}(t,x)$, *соответствующий* $D(t,x)$, *удовлетворяет условию*

$$|D^*(t,x)|\geq d_0=const>0. \tag{4.5}$$

Для исследования устойчивости нулевого решения $x=0$ *системы выберем функционал Ляпунова следующим образом: вдоль* $x\in C^1([t_0,+\infty)\to\mathbb{R}^n)$

$$\begin{gathered}V(x(t))=\Pi(x(t))+\int\limits_{t-\mu^{(1)}(t)}^{t}\left(\frac{\partial\Pi(x(s))}{\partial z}\right)'P^{(1)}\frac{\partial\Pi(x(s))}{\partial z}ds+\\+\int\limits_{t-\mu^{(2)}(t)}^{t}\int\limits_{s}^{t}\left(\frac{\partial\Pi(x(\nu))}{\partial z}\right)'P^{(2)}\frac{\partial\Pi(x(\nu))}{\partial z}d\nu ds+\int\limits_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial\Pi(x(s))}{\partial z}\right)'P^{(3)}(t,s)\frac{\partial\Pi(x(s))}{\partial z}ds,\end{gathered} \tag{4.6}$$

где $P^{(j)}\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $(P^{(j)})'=P^{(j)}$, $z'P^{(j)}z\geq 0\quad\forall z\in\mathbb{R}^m$, $j=1,2,3$; $z'(\partial P^{(3)}(t,s)/\partial t)z\leq 0$ $(=0\Leftrightarrow z=0)$.

Допустим, что матрицы $P^{(j)}$, $j=1,2,3,$ *функционала (4.6) могут быть подобраны такими, что*

$$\begin{gathered}z'\left(\frac{1}{2}\left(A^{(22)}(t,x)+(A^{(22)}(t,x))'\right)+P^{(1)}+\frac{1}{4\mu_1}B(t,x)(P^{(1)})^{-1}B'(t,x)+\mu^{(2)}P^{(2)}+\right.\\+\frac{1}{4\mu_1}\int\limits_{t-\mu^{(2)}(t)}^{t}G^{(1)}(t,s)(P^{(2)})^{-1}(G^{(1)}(t,s))'ds+P^{(3)}(t,t)+\\\left.+\frac{1}{4}\int\limits_{t_0}^{t}G^{(2)}(t,s)(P_t^{(3)}(t,s))^{-1}(G^{(2)}(t,s))'ds\right)z\leq-\gamma_1|z|^2\quad\forall z\in\mathbb{R}^m,\end{gathered} \tag{4.7}$$

где $\gamma_1=const>0$.

При выполнении условий (4.7) для производной функционала (4.6) будем иметь оценку

$$\dot V(t,x(t))\leq -W_0(x(t))\equiv-\gamma_1\left|\frac{\partial\Pi}{\partial z}(x(t))\right|^2\leq 0. \tag{4.8}$$

Множество $\{\partial\Pi(x(t))/\partial z=0\}=\{z(t)=0\}$ *может содержать лишь те решения* $(y(t),z(t))=(y(t),0)$ *системы (4.4), для которых*

$$A_*^{(21)}(t,x(t))\frac{\partial\Pi(x(t))}{\partial y}\equiv 0,$$

что возможно в соответствии с неравенством (4.5), если только $\partial\Pi(x(t))/\partial y\equiv 0$ *или* $y(t)\equiv 0$.

Из теоремы 3.3 следует, что при условиях (4.2) и (4.3) решение $x(t)=0$ *системы (4.1) равномерно асимптотически устойчиво.*

Пример 4.2

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = D(x(t))(C(t) + A(t)F(x(t)) + B(t)F(x(t-\mu^{(1)}(t)))+ \\ + \int\limits_{t-\mu^{(2)}(t)}^{t} G^{(1)}(t,s)F(x(s))ds + \int\limits_{t_0}^{t} G^{(2)}(t,s)F(x(s))ds), \tag{4.9}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$*;* $\mu^{(j)} \in \mathcal{M}$*; вектор-функция* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, матричные функции* $D = diag(d_1(x_1), d_2(x_2), \ldots, d_n(x_n))$*,* $C, B : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$*,* $G^{(j)} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *удовлетворяют условиям (2.2) и (2.3).*

Допустим, что для некоторого вектора $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n_+$*,* $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_k > 0, k = 1, 2, \ldots, n\}$ *имеют место тождества*

$$C(t) + (A(t) + B(t) + \int\limits_{t-\mu^{(2)}(t)}^{t} G^{(1)}(t,s)ds + \int\limits_{t_0}^{t} G^{(2)}(t,s)ds)F(x^{(0)}) \equiv 0,$$

так что система (4.9) имеет положение равновесия $x = x^{(0)}$*.*

Рассмотрим задачу об устойчивости этого положения относительно начальных возмущений $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C^+_\mu$*,* $C^+_\mu = \{\varphi \in C_\mu : \varphi(s) > 0, -\mu_0 \le s \le 0\}$*.*

Положим $y = x - x^{(0)}$ *и введем уравнения возмущенного движения*

$$\frac{dy(t)}{dt} = \tilde{D}(y(t))(A(t)\tilde{F}(y(t)) + B(t)\tilde{F}(y(t-\mu^{(1)}(t)))+ \\ + \int\limits_{t-\mu^{(2)}(t)}^{t} G^{(1)}(t,s)\tilde{F}(y(s))ds + \int\limits_{t_0}^{t} G^{(2)}(t,s)\tilde{F}(y(s))ds), \tag{4.10}$$

где $\tilde{D}(y) = diag(d_1(x^{(0)}_1 + y_1), \ldots, d_n(x^{(0)}_n + y_n))$*,* $\tilde{F}(y) = F(x^{(0)} + y)$*.*

Положим

$$F(0) = 0,\ |F(y)| \ge a(|y|),\ d_k(0) = 0,\ d_k(x_k) > 0 \text{ при } x_k > 0,\ \int\limits_1^0 \frac{d\nu}{d_k(\nu)} = \infty,$$

существует скалярная функция $\Pi = \Pi(y)$*, такая что*

$$\Pi(0) = 0,\ \frac{\partial \Pi(y)}{\partial y} = (\tilde{D}(y))^{-1}\tilde{F}(y),\ \Pi(y) \to \infty \text{ при } |y| \to \infty.$$

Из этих условий следует положительная полуинвариантность области $\mathbb{R}^n_+$ *и единственность положения равновесия* $y = 0$*.*

Системы, предельные для (4.10), имеют вид

$$\frac{dy(t)}{dt} = \tilde{D}(y(t))(A_*(t)\tilde{F}(y(t)) + B_*(t)\tilde{F}(y(t-\mu^{(1)}_*(t)))+ \\ + \int\limits_{t-\mu^{(2)}_*(t)}^{t} G^{(1)}_*(t,s)\tilde{F}(y(s))ds + \int\limits_{t_0}^{t} G^{(2)}_*(t,s)\tilde{F}(y(s))ds). \tag{4.11}$$

Для исследования устойчивости $x = x^{(0)}$ *системы (4.9) или* $y = 0$ *системы (4.10) выберем функционал Ляпунова в виде*

$$\begin{aligned} V(x(t)) = \Pi(x(t)) + \int\limits_{t-\mu^{(1)}(t)}^{t} (\tilde F(y(s)))' P^{(1)} \tilde F(y(s)) ds + \\ + \int\limits_{t-\mu^{(2)}(t)}^{t} \int\limits_{s}^{t} (\tilde F(y(\nu)))' P^{(2)} \tilde F(y(\nu)) d\nu ds + \\ + \int\limits_{t_0}^{t} (\tilde F(y(s)))' P^{(3)}(t,s) \tilde F(y(s)) ds. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Допустим, что матрицы $P^{(j)} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $j = 1, 2, 3$, *имеют такие же свойства, что и в (4.6), и могут быть подобраны так, чтобы выполнялось неравенство*

$$\begin{aligned} y'(\frac{1}{2}(A(t) + A'(t)) + P^{(1)} + \frac{1}{4\mu} B(t)(P^{(1)})^{-1} B'(t) + \mu^{(2)} P^{(2)} + \\ + \frac{1}{4\mu_1} \int\limits_{t-\mu^{(2)}(t)}^{t} G^{(1)}(t,s)(P^{(2)})^{-1}(G^{(1)}(t,s))' ds + P^{(3)}(t,t) + \\ + \frac{1}{4} \int\limits_{t_0}^{\infty} G^{(2)}(t,s)(P^{(3)}_t(t,s))^{-1}(G^{(2)}(t,s))' ds) y \le -y' L y \le 0, \end{aligned}$$

где $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $L' = L = const$.

Тогда для производной функционала (4.12) будем иметь оценку

$$\dot V(t) \le -(\tilde F(y(t)))' L \tilde F(y(t)) \le 0.$$

По теореме 3.2 каждое решение системы (4.10) будет неограниченно приближаться при $t \to +\infty$ *к максимально квазиинвариантному по отношению к семейству предельных систем (4.11) подмножеству множества* $\{L\tilde F(y) = 0\}$.

Если множество $\{L\tilde F(y) = 0\}$ *не содержит других решений системы (4.11), кроме* $y = 0$, *тогда согласно теореме 3.3 решение* $y = 0$ *системы (4.10) или положение равновесия* $x = x^{(0)}$ *системы (4.9) равномерно асимптотически устойчиво.*

5. Заключение

Результаты работы представляют собой развитие методики вывода предельных свойств решений дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений в предположении существования функции и функционала Ляпунова со знакопостоянной производной. Основное содержание методики представлено в работах [4], [6], [18]. Проведенное в разделе 1 построение топологической динамики дополняет соответствующие построения, представленные в работах [8]–[10]. Теоремы 3.1 –3.3 обобщают теоремы классического типа из [8], [11]. Примеры, представленные в разделе 4, являются обобщенными моделями физических и экономических процессов, биологического взаимодействия популяций [20].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания по НИР [9.5994.2017/БЧ] и РФФИ [18-41-730022].

Список литературы

1. В. Вольтерра, *Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений*, Наука. Главная редакция физико-математической литературы, М., 1982, 304 с.

2. Н. Н. Красовский, *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, Физматгиз, М., 1959, 211 с.

3. L. Hatvani, “Marachkov type stability conditions for non-autonomous functional differential equations with unbounded right-hand sides”, *Electronic Journal of Qualitive Theory of Differential Equations*, **64** (2015), 1–11.

4. А. С. Андреев, “Метод функционалов Ляпунова в задачах об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений”, *Автоматика и телемеханика*, 2009, № 9, 4—55.

5. T. A. Burton, *Volterra Integral and Differential Equations, 2nd ed.*, Mathematics in Science and Engineering 202, Elsevier B. V., Amsterdam, 2005.

6. О. А. Перегудова, “Развитие метода функций Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **44**:12 (2008), 1638—1647.

7. J. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.

8. C. Corduneanu, and V. Lakshmikantham, “Equations with unbounded delay: a survey”, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **4** (1980), 831–877.

9. J. Hale, and J. Kato, “Phase space for retarded equations with infinite delay”, *Fukcialaj Ekvacioj*, **21** (1978), 11–41.

10. S. Murakami, “Perturbation theorems for functional differential equations with infinite delay via limiting equations”, *J. Differential Eqns.*, **59** (1985), 314–335.

11. G. Makay, “On the asymptotic stability of the solutions of functional differential equations with infinite delay”, *J. Differential Eqns.*, **108** (1994), 139–151.

12. В. С. Сергеев, “О резонансных колебаниях в некоторых системах с последействием”, *Прикладная математика и механика*, **79**:5 (2015), 615–626.

13. А. С. Андреев, О. А. Перегудова, “О стабилизации программных движений голономной механической системы без измерения скоростей”, *Прикладная математика и механика*, **81**:2 (2017), 137–153.

14. A. Andreev, O. Peregudova, “Non-linear PI regulators in control problems for holonomic mechanical systems”, *Systems Science and Control Engineering*, **6**:1 (2018), 12–19.

15. А. С. Андреев, О. А. Перегудова, “Нелинейные регуляторы в задаче о стабилизации положения голономной механической системы”, *Прикладная математика и механика*, **82**:2 (2018), 156–176.

16. А. С. Андреев, О. А. Перегудова, С. Ю. Раков, “Уравнения Вольтерра в моделировании нелинейного интегрального регулятора”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:3 (2016), 8–18.

17. Z. Artstein, “Topological dynamics of an ordinary differential equation”, *J. Different. Equat.*, **23**:2 (1977), 216–223.

18. А. С. Андреев, О. А. Перегудова, “Метод сравнения в задачах об асимптотической устойчивости”, *Прикладная математика и механика*, **70**:6 (2006), 965–976.

19. Н. Руш, П. Абетс, and М. Лалуа, *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости*, Мир, М., 1980.

20. F. Chen, “Global asymptotic stability in n-species non-autonomous Lotka-Volterra competitive systems with infinite delays and feedback control”, *Applied Mathematics and Computation*, **170** (2005), 1452–1468.

Поступила 28.06.2018

MSC2010 45K05

On the Lyapunov functionals method in the stability problem of Volterra integro-differential equations

© **A. S. Andreev**[1], **O. A. Peregudova** [2]

Abstract. In this paper, we consider the problem of applying the method of Lyapunov functionals to investigate the stability of non-linear integro-differential equations, the right-hand side of which is the sum of the components of the instantaneous action and also ones with a finite and infinite delay. The relevance of the problem is the widespread use of such complicated in structure equations in modeling the controllers using integral regulators for mechanical systems, as well as biological, physical and other processes. We develop the Lyapunov functionals method in the direction of revealing the limiting properties of solutions by means of Lyapunov functionals with a semi-definite derivative. We proved the theorems on the quasi-invariance of a positive limit set of bounded solution as well as ones on the asymptotic stability of the zero solution including a uniform one. The results are achieved by constructing a new structure of the topological dynamics of the equations under study. The theorems proved are applied in solving the stability problem of two model systems which are generalizations of a number of known models of natural science and technology.
Key Words: nonlinear systems of integro-differential equations, Lyapounov functional, stability, topological dynamics, limiting equation

References

1. V. Volterra, *Theory of Functionals and Integral and Integro-Differential Equations*, Dover, New York, 1959.
2. N. N. Krasovskii, *Stability of Motion*, Standford University Press, Standford, 1963.
3. L. Hatvani, "Marachkov type stability conditions for non-autonomous functional differential equations with unbounded right-hand sides", *Electronic Journal of Qualitive Theory of Differential Equations*, **64** (2015), 1–11.
4. A. S. Andreev, "The Lyapunov functionals method in stability problems for functional differential equations", *Automation and Remote Control*, **70** (2009), 1438—1486.
5. T. A. Burton, *Volterra Integral and Differential Equations, 2nd ed.*, Amsterdam: Mathematics in Science and Engineering 202, Elsevier B. V., 2005.
6. O. A. Peregudova, "Development of the Lyapunov function method in the stability problem for functional-differential equations", *Differential Equations*, **44**:12 (2008), 1701—1710.
7. J. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.
8. C. Corduneanu, and V. Lakshmikantham, "Equations with unbounded delay: a survey", *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **4** (1980), 831–877.

[1] **Aleksandr S. Andreev**, Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University, (42 Leo Tolstoi Str., Ulyanovsk 432017, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9408-0392, asa5208@mail.ru

[2] **Olga A. Peregudova**, Professor, Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University, (42 Leo Tolstoi Str., Ulyanovsk 432017, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2701-9054, peregudovaoa@gmail.com

9. J. Hale, and J. Kato, "Phase space for retarded equations with infinite delay", *Fukcialaj Ekvacioj*, **21** (1978), 11–41.

10. S. Murakami, "Perturbation theorems for functional differential equations with infinite delay via limiting equations", *J. Differential Eqns.*, **59** (1985), 314–335.

11. G. Makay, "On the asymptotic stability of the solutions of functional differential equations with infinite delay", *J. Differential Eqns.*, **108** (1994), 139–151.

12. V. S. Sergeev, "Resonance Oscillations in Some Systems with Aftereffect", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **79**:5 (2015), 432–439.

13. A. S. Andreev, and O. A. Peregudova, "Stabilization of the preset motions of a holonomic mechanical system without velocity measurement", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **81**:2 (2017), 95–105.

14. A. Andreev, O. Peregudova, "Non-linear PI regulators in control problems for holonomic mechanical systems", *Systems Science and Control Engineering*, **6**:1 (2018), 12–19.

15. A. S. Andreev, O. A. Peregudova, "Nelineynyye regulyatory v zadache o stabilizatsii polozheniya golonomnoy mekhanicheskoy sistemy", *Prikladnaya matematika i mekhanika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]*, **82**:2 (2018), 156–176 (In Russ.).

16. A. S. Andreev, O. A. Peregudova, and S. Y. Rakov, "Uravneniya Vol'terra v modelirovanii nelineynogo integral'nogo regulyatora [On Modeling a nonlinear integral regulator on the base of the Volterra equations]", *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **18**:3 (2016), 8–18 (In Russ.).

17. Z. Artstein, "Topological dynamics of an ordinary differential equation", *J. Different. Equat.*, **23**:2 (1977), 216–223.

18. A. S. Andreyev, O. A. Peregudova, "The Comparison Method in Asymptotic Stability Problems,", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **70**:6 (2006), 865–875.

19. N. Rouche, P. Habets, and M. Laloy, *Stability Theory by Lyapunov's Direct Method*, Springer, New York, 1977.

20. F. Chen, "Global asymptotic stability in n-species non-autonomous Lotka-Volterra competitive systems with infinite delays and feedback control", *Applied Mathematics and Computation*, **170** (2005), 1452–1468.

Submitted 28.06.2018