Н. Темиргалиев, О связи теорем вложения с равномерной сходимостью кратных рядов Фурье,
Матем. заметки, 1972, том 12, выпуск 2, 139–148

https://www.mathnet.ru/mzm9860

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 2 (1972), 139—148

УДК 517.5

О СВЯЗИ ТЕОРЕМ ВЛОЖЕНИЯ С РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТЬЮ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Н. Темиргалиев

В работе устанавливается некоторая связь между теоремами вложения и равномерной сходимостью ряда Фурье для случая функций многих переменных. Одномерный случай был ранее разобран П. Л. Ульяновым. Библ. 10 назв.

Пусть $m \geqslant 1$ — натуральное число, а 2π-периодическая по каждой переменной функция $f(x_1, \ldots, x_m) \in L^p([-\pi, \pi]^m)$ при некотором $p \in [1, \infty]$; тогда функцию

$$\omega_p(\delta_1, \ldots, \delta_m; f) = \sup_{\substack{|h_i| \leqslant \delta_i \\ i=1,\ldots,m}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_1 + h_1, \ldots, x_m + h_m) - f(x_1, \ldots, x_m)|^p \, dx_1 \ldots dx_m \right\}^{1/p}$$

называют модулем непрерывности (в L^p) от f.

Всякую непрерывную неубывающую на $[0, 2\pi]$ функцию $\omega(\delta)$ с $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta + \eta) \leqslant \omega(\delta) + \omega(\eta)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant \delta + \eta \leqslant 2\pi)$ называют модулем непрерывности. Через $H_{p,m}^{\omega(\delta)}$ обозначается множество всех тех 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x_1, \ldots, x_m)$, для каждой из которых справедливо соотношение

$$\omega_p(\delta, \ldots, \delta; f) = O(\omega(\delta)) \text{ при } \delta \to 0.$$

П. Л. Ульяновым [1] для функций одного переменного была доказана следующая

ТЕОРЕМА А. *Пусть* $\omega(\delta)$ — *модуль непрерывности, а* $p \in (1, \infty)$ — *некоторое фиксированное число. Тогда для того, чтобы всякая функция* $f(x) \in H_{p,1}^{\omega(\delta)}$ *была эквивалентна некоторой непрерывной на* $[-\pi, \pi]$ *функции, необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{p}-1} \omega\left(\frac{1}{n}\right) < \infty. \tag{1}$$

Более того, если $\omega(\delta)$ *удовлетворяет неравенству* (1), *а функция* $f(x) \in H_{p,1}^{\omega(\delta)}$, *то тригонометрический ряд Фурье от* $f(x)$ *сходится на* $[-\pi, \pi]$ *равномерно. Если же* $\omega(\delta)$ *не удовлетворяет условию* (1), *то среди функций* $f(x) \in H_{p,1}^{\omega(\delta)}$ *имеются существенно неограниченные, и потому их тригонометрические ряды Фурье заведомо не являются равномерно сходящимися на* $[-\pi, \pi]$.

Таким образом, теорема А говорит о том, что для функций одного переменного вложение классов $H_{p,1}^{\omega(\delta)} \subset C([-\pi, \pi])$ имеет место для тех и только для тех $\omega(\delta)$, когда все функции $f(x) \in H_{p,m}^{\omega(\delta)}$ раскладываются в равномерно сходящиеся тригонометрические ряды Фурье. Поэтому указанное вложение классов функций тесно связано с равномерной сходимостью рядов Фурье функций из $H_{p,1}^{\omega(\delta)}$. В связи с этим Ульяновым было высказано предположение, что и для *функций многих переменных* существует аналогичная связь между теоремой вложения в пространство C и равномерной сходимостью в определенном смысле рядов Фурье.

В настоящей заметке устанавливается справедливость гипотезы Ульянова для класса $H_{p,m}^{\omega(\delta)}$ при суммировании тригонометрических рядов Фурье по прямоугольникам. Именно, имеет место

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\omega(\delta)$ — *модуль непрерывности, а* $p \in (m, \infty)$ — *некоторое фиксированное число. Тогда, чтобы всякая функция* $f(x_1, \ldots, x_m) \in H_{p,m}^{\omega(\delta)}$ *была эквивалентна в смысле* m*-мерной меры Лебега некоторой непрерывной на* m*-мерном кубе* $[-\pi, \pi]^m$ *функции* $f^*(x_1, \ldots, x_m)$, *необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{m}{p}-1} \omega\left(\frac{1}{n}\right) < \infty. \tag{2}$$

При этом, если $\omega(\delta)$ *удовлетворяет неравенству* (2), *а* $f(x_1, \ldots, x_m) \in H_{p,m}^{\omega(\delta)}$, *то*

$$S_{n_1,\ldots,n_m}(x_1, \ldots, x_m; f) \rightrightarrows f^*(x_1, \ldots, x_m)$$

на $[-\pi, \pi]^m$ *при* $n_i \to \infty$, $i = 1, \ldots, m$, *где знак* $\rightrightarrows$ *обозначает равномерную сходимость, а* $S_{n_1}, \ldots, {}_{n_m}(x_1, \ldots, x_m; f)$ — *прямоугольные частичные суммы порядка* $(n_1, \ldots, n_m)$ *тригонометрического ряда Фурье от* f. *Если же* $\omega(\delta)$ *не удовлетворяет неравенству* (2), *то среди функций* $f(x_1, \ldots$ $\ldots, x_m) \in H_{p,m}^{\omega(\delta)}$ *имеются существенно неограниченные, и потому их тригонометрические ряды Фурье заведомо не являются равномерно сходящимися на* $[-\pi, \pi]^m$.

Для доказательства нам понадобится, в частности, распространение с одномерного случая на многомерный случай одного результата Конюшкова — Стечкина (см. [2], стр. 56).

Пусть

$$E_{n_1,\ldots,n_m}^{(p)}(f) = \inf_{T_{n_1,\ldots,n_m}} \| f(x_1, \ldots, x_m) - \\ - T_{n_1,\ldots,n_m}(x_1, \ldots, x_m) \|_{L^p([-\pi,\pi]^m)},$$

где $T_{n_1,\ldots,n_m}(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\substack{-n_l \leqslant k_l \leqslant n_l \\ l=1,\ldots,m}} c_{k_1,\ldots,k_m} e^{i\sum_{j=1}^m k_j x_j}$, а постоянные числа $c_{k_1,\ldots,k_m}$ таковы, что $c_{-k_1\ldots,-k_m} = \bar{c}_{k_1,\ldots,k_m}$.

Справедлива

ЛЕММА. *Пусть даны натуральное число* m, *действительные числа* $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ *и функция* $f(x_1, \ldots, x_m) \in$ $\in L^p([-\pi, \pi]^m)$. *Если*

$$\sum_{l=1}^{\infty} l^{m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1} E_{l,\ldots,l}^{(p)}(f) < \infty,$$

то $f(x_1, \ldots, x_m) \in L^q([-\pi, \pi]^m)$ $\{cL^\infty \equiv M\}$ *и*

$$E_{n,\ldots,n}^{(q)}(f) \leqslant c(p, q)\left\{n^{m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} E_{n,\ldots,n}^{(p)}(f) + \\ + \sum_{l=n+1}^{\infty} l^{m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1} E_{l,\ldots,l}^{(p)}(f)\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где постоянная $c(p, q)$*) *зависит лишь от* p *и* q.

---

*) Через $c(\alpha, \beta, \ldots)$ мы обозначаем положительные постоянные, зависящие лишь от входящих параметров $\alpha, \beta, \ldots$, вообще говоря, различные в разных формулах.

Доказательство ведется точно так же, как и в одномерном случае. Именно, если $T_{n,\ldots,n}(x_1,\ldots,x_m)$ таковы, что

$$\|f - T_{n,\ldots,n}\|_{L^p([-\pi,\pi]^m)} = E^{(p)}_{n,\ldots,n}(f) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

то

$$f(x_1,\ldots,x_m) \overset{L^p([-\pi,\pi]^m)}{=} T_{n,\ldots,n} + \sum_{k=0}^{\infty} (T_{2^{k+1}n,\ldots,2^{k+1}n} - T_{2^k n,\ldots,2^k n}).$$

Затем с помощью неравенства С. М. Никольского (см. [3], стр. 159) устанавливается, что

$$\|T_{2^{k+1}n,\ldots,2^{k+1}n} - T_{2^k n,\ldots,2^k n}\|_{L^q([-\pi,\pi]^m)} \leqslant c E^{(p)}_{2^k n,\ldots,2^k n}(f) \cdot (2^k n)^{m\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}.$$

Дальнейшие рассуждения ведутся как и при доказательстве теоремы 1 работы [2] (см. стр. 54), только следует положить $\alpha = m\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$.

Теперь перейдем к доказательству сформулированной выше теоремы. Для простоты будем рассматривать случай $m = 2$. Отметим, что в ряде мест мы следуем схеме рассуждений Ульянова с изменениями, соответствующими нашему случаю.

Доказательство достаточности. Пусть функция $f(x_1, x_2) \in H^{\omega(\delta)}_{p,2}$ и выполнено (2). Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{2}{p}-1} \omega_p\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}; f\right) < \infty, \tag{3}$$

и потому

$$\omega_p\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}; f\right) = o(n^{-2/p}) \text{ при } n \to \infty. \tag{4}$$

Известно (см. [4], стр. 288), что при всех $n = 1, 2, \ldots$

$$E^{(p)}_{n,n}(f) \leqslant \frac{c}{2}\left[\omega_p\left(0, \frac{1}{n}; f\right) + \omega_p\left(\frac{1}{n}, 0; f\right)\right] \leqslant c\,\omega_p\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}; f\right). \tag{5}$$

Поэтому (см. (5)) на основании леммы для $m=2$, $q=\infty$ в силу (3) и (4) имеем при $n\to\infty$

$$E_{n,n}^{(\infty)}(f)\leqslant c_{p,\infty}\left\{n^{\frac{2}{p}}E_{n,n}^{(p)}(f)+\sum_{l=n+1}^{\infty}l^{\frac{2}{p}-1}E_{l,l}^{(p)}(f)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant c_{p,\infty}c\left\{n^{\frac{2}{p}}\omega_p\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n};f\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=n+1}^{\infty}l^{\frac{2}{p}-1}\omega_p\left(\frac{1}{l},\frac{1}{l};f\right)\right\}\to 0,$$

т. е. $f(x_1, x_2)$ эквивалентна некоторой непрерывной на квадрате $[-\pi, \pi]^2$ функции.

Пусть $f^*(x_1, x_2)$ — непрерывная на квадрате $[-\pi, \pi]^2$ функция, которая эквивалентна функции $f(x_1, x_2)$. В силу (4) модуль непрерывности

$$\omega_p(\delta,\delta;f^*)=O(\delta^{2/p})\ \text{при}\ \delta\to 0. \qquad (6)$$

Но из теоремы Л. В. Жижиашвили (см. [5], теорема 6 при $\alpha=\beta=2/p$, $\lambda=\delta=0$) следует, что если $p>2$, функция $\psi(x_1, x_2)$ непрерывна и

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x_1+h_1,x_2+h_2)-\psi(x_1,x_2)\,|^p\,dx_1\,dx_2\right\}^{1/p}=$$

$$=O(|h_1|^{2/p}+|h_2|^{2/p}), \qquad (*)$$

то $s_{n_1,n_2}(x_1,x_2;\psi)\rightrightarrows\psi(x_1,x_2)$ для $(x_1,x_2)\in[-\pi,\pi]^2$ при $n_1,n_2\to\infty$.

Убедимся, что функция $f^*(x_1, x_2)$ удовлетворяет условию теоремы Жижиашвили. Пусть h_1 и h_2 заданы. Из (6) следует, что $\omega_p(|h_1|, 0; f^*)\leqslant c_1\,|h_1|^{2/p}$, $\omega_p(0, |h_2|; f^*)\leqslant c_1\,|h_2|^{2/p}$, и потому

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^*(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2)\,|^p\,dx_1\,dx_2\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\omega_p(|h_1|,0;f^*)+\omega_p(0,|h_2|;f^*)\leqslant c_1(|h_1|^{2/p}+|h_2|^{2/p}),$$

т. е. для непрерывной функции $f^*(x_1, x_2)$ выполнено соотношение $(*)$ и, тем самым, достаточность доказана.

Доказательство необходимости. Пусть при некотором $p\in(2,\infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{2}{p}-1}\omega\left(\frac{1}{n}\right)=\infty. \qquad (7)$$

Покажем, что в этом случае найдется существенно неограниченная на квадрате $[-\pi, \pi]^2$ функция $f(x_1, x_2) \in L^p([-\pi, \pi]^2)$, для которой

$$\omega_p(\delta, \delta; f) = O(\omega(\delta)) \text{ при } \delta \to 0.$$

В силу (7) по теореме С. Б. Стечкина (см. [6], стр. 92) существуют числа B_n такие, что $B_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{2}{p}-1} B_n = \infty, \quad B_n \leqslant \omega\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$\sum_{k=1}^{n} B_k \leqslant n\omega\left(\frac{1}{n}\right) \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Далее (см. (8))

$$\infty = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{2}{p}-1} B_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} n^{\frac{2}{p}-1} B_n \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} 2^k (2^k)^{\frac{2}{p}-1} B_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{2}{p}k} B_{2^k},$$

т. е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{2}{p}k} B_{2^k} = \infty. \tag{9}$$

Так как $B_{2^n} \downarrow 0$ и $4^{(n+1)/p} = q4^{n/p}$ с $q = 4^{1/p} > 1$, то согласно следствию 1 из работы [1] имеем (см. (9))

$$\sum_{n=1}^{\infty} (B_{2^n} - B_{2^{n+1}})\, 2^{(2/p)n} = \infty. \tag{10}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$f(x_1, x_2) \overset{L^p([-\pi, \pi]^2)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} (B_{2^n} - B_{2^{n+1}}) \cdot$$
$$\cdot \left[\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos(2^{n-1}+k)\, x_1\right] \left[\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos(2^{n-1}+k)\, x_2\right]. \tag{11}$$

Так как (см. [1], стр. 209)

$$\left\| \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos(2^{n-1}+k)\, x \right\|_{L^p([-\pi, \pi])} \leqslant c_p 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \tag{12}$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} (B_{2^n} - B_{2^{n+1}}) \left\| \left[\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos(2^{n-1}+k)x_1 \right] \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos(2^{n-1}+k)x_2 \right] \right\|_{L^p([-\pi,\pi]^2)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} (B_{2^n} - B_{2^{n+1}}) \cdot$$

$$\cdot \left\| \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos(2^{n-1}+k)x \right\|^2_{L^p([-\pi,\pi])} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} (B_{2^n} - B_{2^{n+1}}) c_p^2 4^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} =$$

$$= c_p^2 \sum_{n=1}^{\infty} (B_{2^n} - B_{2^{n+1}}) = c_p^2 B_2 < \infty,$$

и потому ряд (11) сходится по норме пространства $L^p([-\pi, \pi]^2)$ к некоторой функции $f(x_1, x_2) \in \in L^p([-\pi, \pi]^2)$.

В точке (0, 0) сумма ряда (11) равна (см. (10))

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} (B_{2^n} - B_{2^{n+1}}) 4^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} 4^{\frac{n}{p}} (B_{2^n} - B_{2^{n+1}}) = \infty. \qquad (**)$$

Легко видеть, что ряд (11) есть двойной ряд Фурье — Лебега для функции $f(x_1, x_2)$.

Допустим, что $f(x_1, x_2)$ не является существенно неограниченной. Тогда, изменив $f(x_1, x_2)$ на множестве двумерной меры Лебега нуль, получим ограниченную на квадрате $[-\pi, \pi]^2$ функцию $f^*(x_1, x_2)$ с тригонометрическим рядом Фурье (11). Если

$$\sigma_{n_1, n_2}(x_1, x_2; f^*) = \frac{1}{(n_1+1)(n_2+1)} \sum_0^{n_1, n_2} s_{k_1, k_2}(x_1, x_2; f^*),$$

то (см. [7], стр. 455)

$$\sigma_{n_1, n_2}(x_1, x_2; f^*) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x_1+t_1, x_2+t_2) K_{n_1}(t_1) K_{n_2}(t_2) \, dt_1 \, dt_2,$$

где $K_n(t)$ — ядро Фейера. Но $K_n(t) \geqslant 0$ при всех $t \in (-\infty, \infty)$ и поэтому, если $\|f^*\|_{L^\infty([-\pi,\pi]^2)} \leqslant M$, то

$$|\sigma_{n_1, n_2}(x_1, x_2; f^*)| \leqslant M$$

$$\text{при любых } (x_1, x_2) \in [-\pi, \pi]^2 \text{ и } n_1, n_2 = 0, 1, \ldots \qquad (13)$$

Легко проверить, что если $s_{n_1, n_2}(0, 0; f^*) \geqslant 0$ при всех $n_1, n_2 = 0, 1, \ldots$ и $s_{n_1, n_2}(0, 0; f^*) \to \infty$ при $n_1, n_2 \to \infty$ [что у нас выполнено в силу (11) и (**)], то и $\sigma_{n_1, n_2}(0, 0; f^*) \to \infty$ при $n_1, n_2 \to \infty$. Но это противоречит (13).

Итак, мы доказали, что $f(x_1, x_2)$ существенно неограничена на квадрате $[-\pi, \pi]^2$.

Теперь докажем, что $f(x_1, x_2) \in H_{p,2}^{\omega(\delta)}$. Пусть n — произвольное целое число, большее, чем 1. Тогда найдется такое целое $N \geqslant 0$, что $2^N < n \leqslant 2^{N+1}$.

Имеем (см. (12))

$$E_{n,n}^{(p)}(f) \leqslant E_{2^N, 2^N}^{(p)}(f) =$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{2n\left(\frac{1}{p}-1\right)} (B_{2^n} - B_{2^{n+1}}) \left\| \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos(2^{n-1}+k)x \right\|_{L^p}^2 \leqslant$$

$$\leqslant c_p^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} (B_{2^n} - B_{2^{n+1}}) = c_p^2 B_{2^{N+1}} \leqslant c_p^2 B_n. \qquad (14)$$

Но тогда (см. [4], стр. 363) получаем (см. (8) и (14))

$$\omega_p\left(\frac{1}{n}, 0; f\right) \leqslant c_1 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E_{k,\infty}^{(p)}(f) \leqslant c_1 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E_{k,k}^{(p)}(f) \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \cdot c_p^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} B_k \leqslant c_1 \cdot c_p^2 \omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Аналогично доказывается, что

$$\omega_p\left(0, \frac{1}{n}; f\right) \leqslant c_1 c_p^2 \omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

и потому

$$\omega_p\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}; f\right) \leqslant \omega_p\left(\frac{1}{n}, 0; f\right) + \omega_p\left(0, \frac{1}{n}; f\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2c_1 c_p^2 \omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

т. е. $f(x_1, x_2) \in H_{p,2}^{\omega(\delta)}([-\pi, \pi]^2)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема аналогично доказывается и при $m > 2$. В частности, при доказательстве необходимости надо брать функцию

$$f(x_1, \ldots, x_m) \overset{L^p([-\pi,\pi]^m)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{m \cdot n \left(\frac{1}{p}-1\right)} (B_{2^n} - B_{2^{n+1}}) \cdot$$
$$\cdot \prod_{i=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos (2^{n-1}+k) x_i \right].$$

Замечание 2. С помощью примера В. А. Ильина (см. [8], стр. 106) легко убедиться, что для справедливости гипотезы Ульянова нельзя, вообще говоря, брать суммирование ряда Фурье по сферам.

Замечание 3. В доказанной выше теореме мы брали $p > m$. При $p \in [1, m]$ доказанная теорема остается верной, но она малосодержательна. В частности из условия (2) в этом случае следует, что $\omega(\delta) \equiv 0$. Чтобы сделать утверждение содержательным и при $p \in [1, m]$, достаточно рассматривать не модули непрерывности функций, а модули гладкости порядка $m + 1$ или же наилучшие приближения. На этом вопросе мы не будем здесь останавливаться подробно.

Замечание 4. П. Л. Ульяновым [9] было установлено, что для вложения $H_{p,1}^{\omega(\delta)} \subset L^{\nu}([0, 1])$ с $1 \leqslant p < \nu < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\nu}{p}-2} \omega^{\nu}\left(\frac{1}{n}\right) < \infty.$$

В связи с этим Ульянов (см. [9], стр. 685) поставил вопрос о нахождении многомерного аналога сформулированного утверждения. В этом направлении автором [10] был получен следующий результат: условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m\left(\frac{\nu}{p}-1\right)-1} \omega^{\nu}\left(\frac{1}{n}\right) < \infty \tag{15}$$

является *достаточным* для вложения $H_{p,m}^{\omega(\delta)} \subset L^{\nu}([0, 1]^m)$. Однако, пока не известно, является ли условие (15) и *необходимым* для вложения $H_{p,m}^{\omega(\delta)} \subset L^{\nu}([0, 1]^m)$.

Автор выражает благодарность П. Л. Ульянову, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Математический институт
АН СССР им. В. А. Стеклова

Поступило
24.VI.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ульянов П. Л., Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье, Матем. сб., **72** (114) (1967), 193—225.

[2] Конюшков А. А., Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье, Матем. сб., **44** (86), 53—84.

[3] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969.

[4] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960.

[5] Жижиашвили Л. В., Сопряженные функции двух переменных и двойные ряды Фурье, Докл. АН СССР, **149**, № 4 (1963), 765—768.

[6] Стечкин С. Б., Об абсолютной сходимости рядов Фурье, Изв. АН СССР, Сер. матем., **17** (1953), 87—98.

[7] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 2, М., 1965.

[8] Ильин В. А., Проблемы локализации и сходимости для рядов Фурье по фундаментальным системам функций оператора Лапласа, Успехи матем. наук, **23**, № 2 (140) (1968), 61—120.

[9] Ульянов П. Л., Вложение некоторых классов функций H_p^ω, Изв. АН СССР, Серия матем., **32** (1968), 649—686.

[10] Темиргалиев Н., Некоторые теоремы вложения классов функций $H_{p,m}^{\omega\delta}$ многих переменных, Изв. АН Каз. ССР, Сер. физ.-матем., **5** (1970), 90—92.