



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. G. Prokhorov, Rationality constructions of some Fano fourfolds of index 2, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, Number 2, 35–40

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

January 23, 2025, 07:36:52



Предложение 5. Если $n \not\equiv 2 \pmod{4}$, то

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = m(V_{\lambda}, L_n(V)).$$

Если $n \equiv 2 \pmod{4}$, то

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = m(V_{\lambda}, L_n(V)) + \frac{2}{n} \sum_{d|(n/2)} \mu(d) \chi^{\lambda}(\tau^{n/2d}).$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 1$, тогда $\lambda^* = (2^{\lambda_2}, 1^{\lambda_1 - \lambda_2})$. Из (5) имеем

$$m(V_{\lambda}, L_n(V)) = l_{\lambda_1, \lambda_2} - l_{\lambda_1+1, \lambda_2-1}.$$

Используя предложение 5, получаем:

а) если $n \not\equiv 2 \pmod{4}$, то

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = l_{\lambda_1, \lambda_2} - l_{\lambda_1+1, \lambda_2-1};$$

б) если $n \equiv 2 \pmod{4}$, то из формул (1) и (2) имеем:

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = l_{\lambda_1, \lambda_2} - l_{\lambda_1+1, \lambda_2-1} + l_{\lambda_1/2, \lambda_2/2}$$

для $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv 0 \pmod{2}$;

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = l_{\lambda_1, \lambda_2} - l_{\lambda_1+1, \lambda_2-1} - l_{(\lambda_1+1)/2, (\lambda_2-1)/2}$$

для $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv 1 \pmod{2}$.

В частности, неприводимые $GL(V)$ -модули, отвечающие за тождество энгелевости степени n (разбиение $\lambda = (n-1, 1)$) или за стандартное тождество степени n (разбиение $\lambda = (2, 1^{n-2})$), входят в $GL(V)$ -разложение модуля $L_n(V)$ с единичной кратностью.

Автор приносит благодарность Ю. А. Бахтурину за помощь и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М., 1985.
2. Джеймс Г. Теория представлений симметрических групп. М., 1982.
3. Blessenohl O., Laue H. On Witt's dimension formula for free Lie algebras and a theorem of Klyachko//Bull. Austral. Math. Soc. 1989. 40. 49—57.

Поступила в редакцию
28.04.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 512.7

Ю. Г. Прохоров

КОНСТРУКЦИИ РАЦИОНАЛЬНОСТИ НЕКОТОРЫХ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ФАНО ИНДЕКСА 2

Введение. В настоящей работе обсуждается проблема рациональности четырехмерных многообразий Фано индекса 2. Мы будем рассматривать только четырехмерные многообразия Фано индекса 2 над полем \mathbb{C} с группой Пикара, изоморфной \mathbb{Z} . Такие многообразия имеют единственный дискретный инвариант — род g , который может принимать целые значения $2 \leq g \leq 10$ [1, 2]. При $5 \leq g \leq 10$ линейная система $\left| -\frac{1}{2}K_V \right|$ задает вложение многообразия $V = V_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+2}$ степени

$2g-2$, и образ $V_{2g-2} \subset \mathbf{P}^{g+2}$ является пересечением квадратик. Основной результат работы составляет следующая

Теорема. Для каждого целого g , $5 \leq g \leq 8$, существует четырехмерное рациональное многообразие Фано $V = V_{2g-2} \subset \mathbf{P}^{g+2}$ индекса 2 рода g с $\text{Pic } V = \mathbf{Z}$.

Теорема является следствием предложений 1—4. Все конструкции рациональности связаны с некоторой плоскостью. Как и в случае четырехмерной кубики, неизвестен ответ на вопрос о рациональности общих многообразий указанных типов [3].

1. Лемма 1. Теорема Римана—Роха для обратимого пучка $\mathcal{O}_X(D)$ на четырехмерном многообразии X имеет вид

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \frac{1}{24} [D^4 + 2D^3 \cdot c_1(X) + D^2 \cdot (c_1(X)^2 + c_2(X)) + D \cdot c_1(X) \cdot c_2(X)] + \chi(O_X).$$

Пусть $F \hookrightarrow X$ — вложение гладкой поверхности в гладкое четырехмерное многообразие X , $\rho: \tilde{X} \rightarrow X$ — раздутие F , E — исключительный дивизор и $H^* = \rho^* H$ — полный прообраз дивизора H на \tilde{X} .

Лемма 2 [4, утверждение 8.3.9]. В кольце Чжоу $A(\tilde{X})$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} H^4 &= H^4, \quad H^3 \cdot E = 0, \quad H^2 \cdot E^2 = -F \cdot H^2, \\ H^* \cdot E^3 &= H|_F \cdot c_1(F) - c_1(X) \cdot H \cdot F, \\ E^4 &= c_2(X) \cdot F + c_1(X)|_F \cdot c_1(F) - c_2(F) - c_1(X)^2 \cdot F. \end{aligned}$$

Лемма 3 [4, утверждение 15.4, 3]. Для классов Чженя многообразия \tilde{X}

$$c_1(\tilde{X}) = \rho^* c_1(X) - E, \quad c_2(\tilde{X}) = \rho^* c_2(X) + \rho^* F - \rho^* c_1(X) \cdot E.$$

2. Случай $g=5$. Всякое многообразие Фано $V = V_8 \subset \mathbf{P}^7$ представляется в виде пересечения трех квадратик:

$$V = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 [1].$$

Лемма 4. (i). Существует многообразие Фано $V = V_8 \subset \mathbf{P}^7$, содержащее плоскость $P = \mathbf{P}^2$.

(ii). Общее многообразие Фано $V = V_8 \subset \mathbf{P}^7$, содержащее плоскость P , не содержит других плоскостей, пересекающих P по прямой.

Доказательство. (i). Рассмотрим плоскость $P \subset \mathbf{P}^7$, заданную уравнениями $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Тогда квадратики Q_1, Q_2, Q_3 , проходящие через P , имеют вид

$$\begin{aligned} Q_1: x_0 l_{10} + x_1 l_{11} + x_2 l_{12} + x_3 l_{13} + x_4 l_{14} + q_1 &= 0, \\ Q_2: x_0 l_{20} + x_1 l_{21} + x_2 l_{22} + x_3 l_{23} + x_4 l_{24} + q_2 &= 0, \\ Q_3: x_0 l_{30} + x_1 l_{31} + x_2 l_{32} + x_3 l_{33} + x_4 l_{34} + q_3 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $l_{ij} = l_{ij}(x_5, x_6, x_7)$ — линейные, а $q_i = q_i(x_0, \dots, x_4)$ — квадратичные формы. Докажем, что для общих l_{ij} и q_i многообразие будет гладким. По теореме Бертини для общих l_{ij} и q_i многообразие V не имеет особых точек вне P . В точках $x \in P$ матрица частных производных для уравнений (1) имеет вид $\|l_{ij}(x)\|$.

Нетрудно указать формы l_{ij} , такие, что $rk \|l_{ij}(x)\| = 3$ в каждой точке $x \in P$. (Например, $l_{i,i-1} = x_5$, $l_{i,i} = x_6$, $l_{i,i+1} = x_7$ и $l_{ij} = 0$ при $|i-j| > 1$.) Следовательно, для общих l_{ij} и q_i многообразия V — неособое.

(ii). Простой счет параметров. ■

Предложение 1. Пусть $V = V_8 \subset \mathbf{P}^7$ — многообразие Фано, содержащее плоскость P , $\rho: \tilde{V} \rightarrow V$ — вздутие P , $H^* = \rho^*H$ — полный прообраз гиперплоского сечения V и E — исключительный дивизор. Тогда:

(i) линейная система $|H^* - E|$ определяет бирациональный морфизм $\varphi: \tilde{V} \rightarrow \mathbf{P}^4$, стягивающий неприводимый дивизор $D \sim 3H^* - 4E$ на поверхность $F \subset \mathbf{P}^4$;

(ii) если, кроме того, для плоскости P и многообразия V выполняются условия (ii) леммы 4, то φ — раздутие гладкой поверхности $F \subset \mathbf{P}^4$. Поверхность F является поверхностью общего типа с инвариантами:

$$K_F^2 = 2, q(F) = 0, p_g(F) = 3, c_2(F) = 46,$$

$$K_F \cdot \mathcal{O}_F(1) = 7, \deg F = 9.$$

Доказательство. (i). Пусть $\psi: V \dashrightarrow \mathbf{P}^4$ — проекция из плоскости P , тогда раздутие ρ устраняет неопределенности рационального отображения ψ . Поэтому отображение $\varphi = \psi \circ \rho: \tilde{V} \rightarrow \mathbf{P}^4$ является морфизмом и задается линейной системой $|H^* - E|$. Поскольку $c_1(V) = 2H$, $c_2(V) = 4H^2$, то из леммы 2 получаем $H^{*4} = 8$, $H^{*3} \cdot E = 0$, $H^{*2} \cdot E^2 = -1$, $H^* \cdot E^3 = 1$, $E^4 = 3$. Откуда $\deg \varphi = (H^* - E)^4 = 1$, т. е. морфизм φ бирационален. По теореме об обращении в нуль [5] и лемме 1 имеем $h^0(\mathcal{O}_{\tilde{V}}(3H^* - 4E)) = 1$, т. е. в линейной системе $|3H^* - 4E|$ существует единственный дивизор D . Так как $D \cdot (H^* - E)^3 = 0$, то D стягивается морфизмом φ .

(ii). Поскольку V не содержит плоскостей, пересекающих P по прямой, то $\varphi: \tilde{V} \rightarrow \mathbf{P}^4$ не имеет слоев размерности ≥ 2 . Из результатов работы [6] следует тогда, что φ является раздутием с гладким центром F . В силу леммы 1, примененной к φ , $\deg F = 9$, $K_F \cdot \mathcal{O}_F(1) = 7$, $c_2(F) = 46$. По формуле для поверхностей в \mathbf{P}^4 [7, добавление A] $K_F^2 = 2$, $\chi(\mathcal{O}_F) = 4$. ■

З а м е ч а н и е. Согласно [8] поверхность F изоморфна минимальному разрешению особенностей двулистного накрытия \mathbf{P}^2 с ветвлением в кривой $C \subset \mathbf{P}^2$ степени 8.

3. Случай $g = 6$. Каждое многообразие Фано $V = V_{10} \subset \mathbf{P}^8$ может быть реализовано одним из двух способов: как гладкое сечение грассманиана $G = \text{Gr}(2, 5) \subset \mathbf{P}^9$ гиперплоскостью $\mathbf{P}^8 \subset \mathbf{P}^9$ и квадрикой $Q \subset \mathbf{P}^9$ или как двулистное накрытие многообразия Фано индекса 3 степени 5 [1]. Мы построим пример рационального многообразия $V = V_{10} \subset \mathbf{P}^8$ первого типа. Хорошо известно, что грассманиан $G = \text{Gr}(2, 5)$ содержит два типа плоскостей — многообразия Шуберта σ_{22} и σ_{31} [9].

Л е м м а 5. Существует многообразие Фано $V = V_{10} \subset \mathbf{P}^8$, $V = G \cap Q \cap \Pi \mathbf{P}^8$, содержащее σ_{31} -плоскость P и не содержащее других плоскостей, пересекающих P по прямой.

Доказательство. Несложные вычисления с циклами Шуберта в грассманиане $\text{Gr}(3, 10)$ показывают, что для любой квадрики Q многообразия $Q \cap G$ содержит σ_{31} -плоскость P . Существование гиперплоскости $\mathbf{P}^8 \subset \mathbf{P}^9$, такой, что $V = G \cap Q \cap \Pi \mathbf{P}^8$ — гладкое многообразие, содержащее P , следует теперь из работы [10, лемма 8.4]. Вторая часть леммы доказывается аналогично лемме 4.

Предложение 2. Пусть $V = V_{10} \subset \mathbf{P}^8$ — многообразие Фано, такое, что для V выполняется лемма 5, $\rho: \tilde{V} \rightarrow V$ — раздутие P , $H^* =$

$=\rho^*H$ — полный прообраз гиперплоского сечения V , E — исключительный дивизор. Тогда линейная система $|H^* - E|$ определяет морфизм $\varphi: \tilde{V} \rightarrow W \subset \mathbf{P}^5$ на гладкую четырехмерную квадрику $W = W_2 \subset \mathbf{P}^5$. Морфизм φ является раздутием с центром в поверхности $F \subset W$ и с исключительным дивизором $D \sim 2H^* - 3E$. Поверхность F изоморфна раздутию точки на гладкой КЗ-поверхности, $\deg F = 9$, $K_F \cdot \mathcal{O}_F(1) = 1$.

Доказательство. По формулам Гаусса—Бонне [9] имеем

$$c_1(G) = 5\sigma_{10}, \quad c_2(G) = 11\sigma_{20} + 12\sigma_{11},$$

$$c_3(G) = 15\sigma_{30} + 30\sigma_{21}, \quad c_4(G) = 35\sigma_{31} + 25\sigma_{22}.$$

Откуда $c_2(V) = (3\sigma_{22} + 4\sigma_{11})|_V$, $c_4(V) = 28$, $b_4(V) = 24$.

Аналогично предположению 1 доказывается теперь, что $|H^* - E|$ задает бирациональный морфизм на квадрику $W_2 \subset \mathbf{P}^5$ и стягивает дивизор $D \sim 2H^* - 3E$ на поверхность F . Морфизм φ не имеет слоев размерности ≥ 2 и стягивает экстремальный луч. Из результатов [11] следует, что F и W — гладкие и φ — раздутие с центром F . Как и в предположении 1, получаем $\deg F = 9$, $K_F \cdot \mathcal{O}_F(1) = 1$, $c_2(F) = 25$. Из точной последовательности для нормального пучка F на W получаем $F^2 = c_2(N_{F/W}) = c_2(W) \cdot F - c_2(F) + 4K_F \cdot \mathcal{O}_F(1) + K_F^2$. Откуда $K_F^2 = F^2 - 42$. Квадрика W может быть реализована как $\text{Gr}(2, 4)$, поэтому $F \sim \alpha\sigma_{20} + \beta\sigma_{11}$. Так как $\deg F = 9$, то $\alpha + \beta = 9$. Следовательно, $F^2 = \alpha^2 + (9 - \alpha)^2 \geq 41$ и $K_F^2 \leq 1$. Но $K_F^2 = 12\rho_g - 13$. Возможны два случая: $\rho_g = 0$, $K_F^2 = -13$ и $\rho_g = 1$, $K_F^2 = -1$. Уравнение $-13 = K_F^2 = 2\alpha^2 - 18\alpha + 39$ не имеет целочисленных решений. Откуда $\rho_g = 1$, $K_F^2 = -1$, $\chi(F) \geq 0$. Так как $K_F \cdot \mathcal{O}_F(1) = 1$, то $\chi(F) \leq 0$. Далее используется классификация поверхностей с $\chi(F) = 0$. ■

4. Случай $g = 8$. Согласно [1] каждое многообразие Фано $V = V_{14} \subset \mathbf{P}^{10}$ изоморфно сечению грассманиана $\text{Gr}(2, 6) \subset \mathbf{P}^{14}$ подпространством козмерности 4. Аналогично лемме 5 доказывается

Лемма 6. Существует многообразие Фано $V = V_{14} \subset \mathbf{P}^{10}$, содержащее σ_{42} -плоскость P и не содержащее плоскостей, пересекающих P по прямой.

Предложение 3. Пусть $V = V_{14} \subset \mathbf{P}^{10}$ — многообразие Фано, удовлетворяющее условиям леммы 6, $\rho: \tilde{V} \rightarrow V$ — раздутие плоскости P , $H^* = \rho^*H$ — полный прообраз гиперплоского сечения V , E — исключительный дивизор, тогда линейная система $|H^* - E|$ определяет морфизм $\varphi: \tilde{V} \rightarrow W \subset \mathbf{P}^7$ на гладкое многообразие Фано индекса 3 степени 5 $W = W_5 \subset \mathbf{P}^7$. Морфизм φ является раздутием гладкой поверхности F на W с исключительным дивизором $D \sim H^* - 2E$. Поверхность F изоморфна раздутию 6 точек на \mathbf{P}^2 , $\deg F = 7$, $K_F \cdot \mathcal{O}_F(1) = 5$.

Доказательство аналогично доказательству предложений 1, 2. ■

Следствие. Многообразие $V_{14} \subset \mathbf{P}^{10}$, удовлетворяющее условиям леммы 6, рационально.

Доказательство следует из того, что $W_5 \subset \mathbf{P}^7$ рационально [10]. ■

5. Случай $g = 7$. Предложение 4. Пусть $F = F_5 \subset \mathbf{P}^5$ — антиканонически вложенная поверхность дель Пеццо степени 5. Зафиксируем некоторое вложение $\mathbf{P}^5 \subset \mathbf{P}^6$. Тогда в \mathbf{P}^6 существуют квадрики Q_1, Q_2 , такие, что

(i) $W = W_4 = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbf{P}^6$ — гладкое четырехмерное многообразие, содержащее F ;

(ii) если $\varphi: \tilde{W} \rightarrow W$ — раздутие F , $L^* = \varphi^*L$ — полный прообраз гиперплоского сечения W и D — исключительный дивизор, то линейная система

$|2L^* - D|$ определяет бирациональный морфизм $\rho: \tilde{W} \rightarrow V = V_{12} \subset \mathbf{P}^9$ на гладкое многообразие Фано рода 7;

(iii) морфизм ρ стягивает дивизор $E \sim L^* - D$ на плоскость $P \subset V$ и является раздутием P на V .

Доказательство. Поверхность $F \subset \mathbf{P}^5$ является пересечением квадрик. Выберем пару квадрик $Q_1', Q_2' \subset \mathbf{P}^5$, проходящих через F .

Л е м м а 7. Если $Q_1', Q_2' \subset \mathbf{P}^5$ выбраны достаточно общими, то многообразию $U = Q_1' \cap Q_2'$ имеет лишь изолированные особенности.

Доказательство. Пусть $C = F \cap \mathbf{P}^4$ — общее гиперплоское сечение, тогда C — эллиптическая кривая степени 5. Она содержится в гладкой поверхности дель Пеццо R степени 4 — пересечении двух квадрик Q_1'', Q_2'' . Поскольку F — проективно нормальная поверхность, то квадрики Q_1'', Q_2'' могут быть продолжены до квадрик $Q_1', Q_2' \subset \mathbf{P}^5$, содержащих F . Пусть $U = Q_1' \cap Q_2'$, тогда $R = U \cap \mathbf{P}^4$ — неособое. Поэтому U может иметь лишь изолированные особенности. ■

Аналогично доказательству леммы 4 (i) можно показать, что Q_1', Q_2' продолжаются до квадрик $Q_1, Q_2 \subset \mathbf{P}^6$, причем $W = Q_1 \cap Q_2$ — неособое. Отсюда следует, что для общих квадрик Q_1, Q_2 , содержащих F , многообразие $W = Q_1 \cap Q_2$ удовлетворяет условию (i). Поскольку поверхность F является пересечением квадрик, то линейная система $|2L^* - D|$ свободна. По теореме Кодаиры об обращении в нуль $H^i(\mathcal{O}_{\tilde{W}}(2L^* - D)) = 0$ при $i > 0$.

В силу лемм 1—3 $\dim |2L^* - D| = 9$. Далее, из леммы 2 получаем $L^{*4} = 4$, $L^{*3} \cdot D = 0$, $L^{*2} \cdot D^2 = -5$, $L^* \cdot D^3 = -10$, $D^4 = -12$. Откуда $\deg \rho \cdot \deg \rho(\tilde{W}) = (2L^* - D)^4 = 12$, $\dim \rho(\tilde{W}) = 4$. Пусть E — собственный прообраз гиперплоского сечения, проходящего через F , тогда $E \sim L^* - D$ и $(2L^* - D)^3 \cdot E = 0$, т. е. дивизор E стягивается морфизмом ρ . Сказанное выше позволяет утверждать, что линейная система $|n(2L^* - D)|$ при $n \gg 0$ задает стягивание экстремального луча $\rho': \tilde{W} \rightarrow V$ бирационального типа. Из [11] и леммы 8 следует тогда, что ρ' является раздутием с центром в гладкой поверхности P на гладком многообразии V . Отсюда получаем: V — многообразие Фано индекса 2, группа $\text{Pic } V$ порождается дивизором $H = \rho^*(2L^* - D)$ и $H^4 = 12$. Поэтому $V = V_{12} \subset \mathbf{P}^9$ имеет род 7, $\rho = \rho'$ и $V = \rho(\tilde{W})$.

Л е м м а 8. Морфизм ρ (а следовательно, и ρ') не имеет слоев размерности ≥ 2 .

Доказательство. Двумерными слоями ρ могут быть только собственные прообразы плоскостей $S \subset \mathbf{P}^5 \subset \mathbf{P}^6$, пересекающих F по конике. Такие плоскости замечают 5 многообразий Серге $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$ в \mathbf{P}^5 . Каждая из квадрик Q_1, Q_2 высекает на многообразии Серге дивизор $F + S_i$. При общем выборе Q_1, Q_2 имеем $S_1 \neq S_2$, т. е. $W = Q_1 \cap Q_2$ не состоит из плоскостей, пересекающих F по конике. ■

Автор выражает благодарность С. Л. Трегубу за полезные обсуждения.

Работа частично поддержана фондом «Про—математика» (Франция).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mukai S. Biregular classification of Fano threefolds and Fano manifolds of index 3 // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1989. 86. 3000—3002.
2. Wilson P. M. H. Fano fourfolds of index greater than one // J. reine und angew. Math. 1987. 389. 172—181.
3. Трегуб С. Л. Три конструкции рациональности четырехмерной кубики // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1984. № 3. 8—14.

4. Фултон У. Теория пересечений. М., 1989.
5. Kawamata Y. A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem//Math. Ann. 1982. 261. 43—46.
6. Данилов В. И. Декомпозиция некоторых бирациональных морфизмов//Изв. АН СССР. Матем. 1980. 44, № 2. 465—477.
7. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. М., 1981.
8. Horikawa E. Algebraic surfaces of general type with small c^2_1 , I//Ann. Math. 1976. 104. 357—387.
9. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. М., 1982.
10. Fujita T. On the structure of polarized manifolds with total deficiency one, II//J. Math. Soc. Japan. 1981. 33. 415—434.
11. Ando J. On extremal rays of higher dimensional varieties//Inv. Math. 1985. 81. 347—357.

Поступила в редакцию
15.05.92

УДК 517.52.75

С. А. Степаняц

ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА ДЛЯ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ ЧЕЗАРО

Изучение тауберовых условий, появившихся в конце прошлого века в работах Таубера (см., например, [1]), занимает важное место в теории рядов. В данной работе будет рассмотрено некоторое обобщение тауберовых условий, а именно $T_Q(P)$ -условие (где Q и P — некоторые методы суммирования рядов).

Пусть для последовательностей действительных чисел введено некоторое условие R . Будем говорить, что условие является $T_Q(P)$ -условием, если любой ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, суммируемый методом P и такой, что $\{a_n\}$ удовлетворяет условию R , будет суммируем и методом Q (здесь и в дальнейшем рассматриваются последовательности действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и соответствующие им ряды $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$).

Если Q — обычная сходимость, то $T_Q(P)$ -условие есть просто тауберово условие для метода P . В качестве Q и P будем рассматривать методы суммирования Чезаро (C, α) с различными α ; $\alpha \geq 0$. Определение и простейшие свойства методов Чезаро можно найти в [2, § 5.4, 5.5, 5.7] и [3, § 15].

Так как мы в основном ограничиваемся методами суммирования Чезаро целого порядка, то везде далее, если не оговорено противное, k — целое число, $k \geq 0$; α — действительное число, $\alpha \geq 0$.

Обозначения $a_n = O(c_n)$ и $a_n = o(c_n)$, где $\{c_n\}$ — последовательность неотрицательных чисел, будем понимать в обычном смысле, т. е. $a_n = O(c_n)$ тогда и только тогда, когда существует действительное положительное число M , такое, что $|a_n| \leq M c_n$ для всех n ; $a_n = o(c_n)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует N , такое, что для любого $n > N$ верно неравенство $|a_n| < \varepsilon c_n$.

Далее будем неоднократно пользоваться следующим определением.

Последовательность натуральных чисел $\{n_r\}_{r=1}^{\infty}$ называется лакунарной по Адамару, если существует действительное число λ , такое, что $\lambda > 1$ и $n_{r+1}/n_r \geq \lambda$ для $r=1, 2, 3 \dots$