$$p^{\lambda}(x) = (x_3 - h)g,$$

где $\mathbf{v}^1(\tau, x)$ *и* $\mathbf{u}^1(\tau, x)$ *имеют вид* (8) *с заменой* $v_i^0(x)$ *на* $f_i(x)$ *и* $\int\limits_0^{\infty} v_i^1(\tau, x)d\tau$, $i = 1, 2$, *соответственно.*

Замечание 1. Если $\nu = 0$, то для решения задачи (5), (6), (2) при $\lambda = \pm\omega$ и $t \to \infty$ имеет место явление резонанса, так же как в [6]; в случае $\nu \neq 0$ решение задачи (5), (6) с $v_i^0(x) \equiv 0$, $i = 1, 2$, при $\lambda = \pm\omega$ и $t \to \infty$ выходит на предельный периодический режим, т.е. явление резонанса отсутствует, что обусловлено наличием вязкости в системе (5).

Замечание 2. Если в системе (5) вместо правой части g рассмотреть $f_3(x)\exp\{i\lambda t\}$, то все теоремы остаются справедливыми при соответствующих условиях гладкости на $f_3(x)$.

Замечание 3. Соответствующие результаты и асимптотические разложения имеют место и для начально-краевой задачи в слое с граничными условиями (3).

Выражаем благодарность М.Е. Боговскому за полезные обсуждения.

Университет дружбы народов
им. Патриса Лумумбы
Москва

Поступило
28 XII 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Масленникова В.Н.* Тр. Всес. конф. по уравнениям с частными производными. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 153–156. 2. *Соболев С.Л.* – Изв. АН СССР, 1954, т. 18, № 1. 3. *Марчук Г.И.* Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1974. 303 с. 4. *Марчук Г.И., Саркисян А.С. и др.* Математические модели циркуляции в океане. Новосибирск: Наука, 1980. 285 с. 5. *Adams Robert A.* Sobolev Spaces. N.Y.: Acad. Press, 1975. 268 p. 6. *Масленникова В.Н., Пал Продип Кумар.* – ДАН, 1981, т. 259, № 6.

УДК 511

МАТЕМАТИКА

Ю.В. НЕСТЕРЕНКО

О МЕРЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ЗНАЧЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком С.М. Никольским 24 XII 1984)

В работах [6, 4] изложен метод исследования задач об алгебраической независимости чисел, основанный на использовании общей теории исключения. С помощью u-результантов каждому однородному несмешанному идеалу $J \subset \mathbf{Z}[x_0, x_1, \ldots, x_m]$ сопоставлены две характеристики $|J(\bar{\omega})|$, $t(J)$. Первая из них играет роль, аналогичную абсолютной величине значения многочлена $Q \in \mathbf{Z}[x_0, x_1, \ldots, x_m]$ в точке $\bar{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_m) \in \mathbf{C}^{m+1}$, вторая же характеризует рост аналогов степени и величины коэффициентов многочлена. При $T \geqslant 1$ определены функции

$$\Phi_r(\bar{\omega}; T) = \Phi_r(T) = \min|J(\bar{\omega})|, \qquad 1 \leqslant r \leqslant m, \qquad \Phi_0(T) \equiv 1,$$

где минимум берется по всем однородным несмешанным идеалам J с условиями $t(J) \leqslant T$, $h(J) = m - r + 1$, оценивающие меру алгебраической независимости чисел $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_m$. Индуктивная по r оценка снизу этих функций с помощью аналитического метода, созданного в теории трансцендентных чисел А.О. Гельфондом (см. [2], гл. III), позволила в работах [6, 4] доказать, что при алгебраических α, β ($\alpha \neq 0, 1$, а β – иррациональность степени d) среди чисел $\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2}, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}}$ имеется не менее $[\log_2(d+1)]$ алгебраически независимых над $\mathbf{Q}$. Историю этой задачи см. [4].

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_p$, $b_1, b_2, \ldots, b_q$ – комплексные числа, удовлетворяющие при любом $\epsilon > 0$ и $X > X_0(\epsilon, a_i, b_j)$, $Y > Y_0(\epsilon, a_i, b_j)$ неравенствам

$$|x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_pa_p| > \exp(-|\bar{x}|^{\epsilon}), \qquad \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbf{Z}^p,$$
$$X = |\bar{x}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i|,$$
$$|y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_qb_q| > \exp(-|\bar{y}|^{\epsilon}), \qquad \bar{y} = (y_1, \ldots, y_q) \in \mathbf{Z}^q,$$
$$Y = |\bar{y}| = \max_{1 \leqslant j \leqslant q} |y_j|.$$

Традиционно рассматривают три набора чисел

$$(1) \qquad e^{a_ib_j}; \qquad a_i, e^{a_ib_j}; \qquad a_i, b_j, e^{a_ib_j},$$
$$1 \leqslant i \leqslant p, \qquad 1 \leqslant j \leqslant q,$$

состоящие из $m_1 = pq$, $m_2 = pq + p$, $m_3 = pq + p + q$ чисел соответственно. Обозначим для $k = 1, 2, 3$ $\bar{\omega}_k = (\omega_{k0}, \omega_{k1}, \ldots, \omega_{km_k}) \in \mathbf{C}^{m_k+1}$ векторы, у которых $\omega_{k0} = 1$, а $\omega_{k1}, \omega_{k2}, \ldots, \omega_{km_k}$ суть упорядоченные каким-либо способом числа k-й совокупности (1).

Теорема 1. *Пусть k – одно из чисел* 1, 2, 3, *а τ удовлетворяет неравенствам* $0 < (p+q)\tau < m_k$. *Для каждого целого r из области* $0 \leqslant r < \tau$ *существует постоянная* $\mu_r = \mu_r(\tau, \bar{\omega}_k) \geqslant 0$ *такая, что для всех* $T \geqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$(2) \qquad \ln \Phi_r(\bar{\omega}_k; T) \geqslant -\mu_r T^{\tau/(\tau - r)}.$$

Теорема 2. *Среди чисел совокупности* (1) *с номером k имеется не менее* $m_k/(p+q) - 1$ *алгебраически независимых над* $\mathbf{Q}$.

Последняя теорема установлена в 1984 г. П. Филиппоном с помощью доказанного им критерия алгебраической независимости чисел. Это доказательство, существенно использующее идеи работ [6, 4], опубликовано в [9]. Теорему 2 можно легко вывести из теоремы 1. Для этого достаточно заметить, что в силу (2) вектор $\bar{\omega}_k$ не может быть нулем никакого однородного идеала J, $h(J) = m_k - r + 1$, при $r < m_k/(p+q)$. Одним из следствий теоремы 2 является тот факт, что среди указанных выше чисел α^{β^j}, $1 \leqslant j \leqslant d-1$, имеется не менее $[d/2]$ алгебраически независимых над $\mathbf{Q}$, $k = 2$, $p = q = d$, $a_i = \beta^{i-1}$, $b_j = \beta^{j-1}\ln\alpha$. Ниже доказывается теорема 1 при $k = 2$ и указываются необходимые изменения для $k = 1$ и $k = 3$.

Лемма 1. *Пусть* $Q \in \mathbf{Z}[x_0, x_1, \ldots, x_m]$, $Q \not\equiv 0$ – *однородный многочлен,* $\mathfrak{p} \subset \mathbf{Q}[x_0, x_1, \ldots, x_m]$ – *простой однородный идеал,* $\mathfrak{p} \cap \mathbf{Z} = (0)$, $r = m + 1 - h(\mathfrak{p}) \geqslant 1$; $\bar{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_m) \in \mathbf{C}^{m+1}$, $|\bar{\omega}| > 0$, $|\mathfrak{p}(\bar{\omega})| < e^{-X}$, $X > 0$, $|Q(\bar{\omega})| \cdot |\bar{\omega}|^{-\deg Q} < H(Q)^{-1}(\deg Q + 1)^{-(2m+1)}$, *наконец с некоторым* $\sigma \geqslant 1$ *выполняется равенство*

$$\min\left(X, \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\rho}\right) = -\sigma\ln(|Q(\bar{\omega})| \cdot |\bar{\omega}|^{-\deg Q}),$$

где

(3) $\rho = \min\limits_{\bar\beta} \max\limits_{0 \leqslant i,j \leqslant m} (|\omega_i\beta_j - \omega_j\beta_i| \cdot |\bar\omega|^{-1}|\bar\beta|^{-1})$,

а минимум берется по всем нулям $\bar\beta \in \mathbf{C}^{m+1}$, $\bar\beta \neq 0$, *идеала* $\mathfrak{p}$. *Тогда*

$$\ln \Phi_{r-1}(2m^2 t(\mathfrak{p})t(Q)) < -\frac{1}{2\sigma} X + 8m^2 t(\mathfrak{p})t(Q),$$

где $t(Q)$ *есть сумма степени* Q *и логарифма наибольшего из модулей коэффициентов* Q.

Доказательство леммы 1 использует идеи работы [4] (см. предложение 3).

Доказательство теоремы 1 проводится индукцией по r. Для краткости будем считать, что $m = m_2$, $\bar\omega = \bar\omega_2$. При $r = 0$ утверждение, очевидно, выполняется с $\mu_0 = 0$. Далее будем предполагать, что $1 \leqslant r < \tau$ и для функции $\Phi_{r-1}(\bar\omega;\ T)$ требуемая оценка имеет место. Как и в работе [4], доказательство теоремы 1 легко сводится к следующему утверждению.

П р е д л о ж е н и е. *Пусть* $1 \leqslant r < \tau < m/(p+q)$ *и справедлива оценка теоремы* 1 *для функции* $\Phi_{r-1}(\bar\omega;\ T)$. *Существует постоянная* μ, *зависящая только от чисел* τ, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ *такая, что для любого однородного простого идеала* $\mathfrak{p} \subset \mathbf{Z}[x_0, x_1, \ldots, x_m]$ *с условиями* $\mathfrak{p} \cap \mathbf{Z} = (0)$, $h(\mathfrak{p}) = m - r + 1$ *справедливо неравенство*

$$\ln |\mathfrak{p}(\bar\omega)| \geqslant -\mu t(\mathfrak{p})^{\tau/(\tau - r)}.$$

Пусть S – некоторое число, идеал $\mathfrak{p} \subset \mathbf{Z}[x_0, x_1, \ldots, x_m]$ удовлетворяет условиям предложения и неравенствам

(4) $t(\mathfrak{p}) \leqslant S, \quad \ln|\mathfrak{p}(\bar\omega)| < -S^{\tau/(\tau-r)}$.

Для доказательства предложения достаточно установить, что S не превосходит константы, зависящей только от τ, $\bar\omega$. Определим ρ равенством (3). Из (4) следует, что ρ стремится к нулю с возрастанием S.

Фиксируем δ и натуральное n так, чтобы выполнялись неравенства

$$\tau + 2\delta < \frac{m}{p+q}, \quad 0 < \delta < 1, \quad (p+q)m < \frac{\delta}{2} n.$$

Будем обозначать символами $\Gamma(N)$ и $\Lambda(N)$ соответственно множества чисел

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_p a_p, \quad 0 \leqslant k_j < N, \quad k_j \in \mathbf{Z},$$
$$l_1 b_1 + l_2 b_2 + \ldots + l_q b_q, \quad 0 \leqslant l_j < N, \quad l_j \in \mathbf{N}.$$

Л е м м а 2. *Пусть выполнены неравенства* (4). *Определим параметр* T *равенством*

(5) $T^{m+\delta} = \min\left(S^{\tau/(\tau-r)},\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{\rho}\right)$

и положим

$$K = [\lambda T^{q+1+m/n}], \quad L = [T^{p-1-m/n}], \quad W = [T^{p+q}],$$

где λ – *постоянная, большая некоторой границы, зависящей от* n, p, q. *Если* S *достаточно велико, то существуют не все равные нулю целые числа* $A_{\bar\eta}$, *где* $\bar\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, $\eta_j \in \Gamma(K)$, *такие, что*

$$\ln|A_{\bar\eta}| \leqslant T^{p+q} \ln T,$$

и функция

$$F(\bar{z}) = \sum_{\eta_j \in \Gamma(K)} A_{\bar{\eta}} e^{\eta_1 z_1 + \ldots + \eta_n z_n}$$

удовлетворяет равенствам

$$\frac{\partial^{w_1 + \ldots + w_n} F}{\partial z_1^{w_1} \ldots \partial z_n^{w_n}} (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0,$$

для $0 \leqslant w_j < W$ *и* $\xi_j \in \Lambda(L)$.

Доказательство этой леммы основано на хорошо известной лемме Зигеля о решении системы линейных уравнений (см. [2], гл. II, лемма II).

Лемма 3. *Для функции* $F(\bar{z})$, *построенной в лемме* 2, *справедливы неравенства*

$$-\frac{1}{2} T^{m+\delta} \leqslant \max_{\substack{0 \leqslant w_j < W \\ \xi_j \in \Lambda(L_1)}} \ln \left| \frac{\partial^{w_1 + \ldots + w_n} F}{\partial z_1^{w_1} \ldots \partial z_n^{w_n}} (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \right| \leqslant -T^{m-\delta},$$

где $L_1 = [\lambda^{p+1} T^{p-1+pm/qn}]$.

Для доказательства левого неравенства необходимо провести индуктивное по числу переменных рассуждение с использованием леммы Тайдемана [7], теорема 3. Правое неравенство получается с помощью многомерного аналога интерполяционной формулы Эрмита (см., например, [8], лемма 1.2).

Из леммы 3 следует, что существует однородный многочлен $Q \in \mathbf{Z}[x_0, x_1, \ldots \ldots, x_m]$, $t(Q) \leqslant T^{p+q+\delta}$, такой, что

$$(6) \qquad -\frac{1}{2} T^{m+\delta} \leqslant \ln |Q(\bar{\omega})| \leqslant -T^{m-\delta}.$$

Воспользуемся леммой 1, положив $X = S^{\tau/(\tau - r)}$. Из (5), (6) следует, что параметр σ, определенный в лемме 1, удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant \sigma \leqslant T^{2\delta}$, так что, пользуясь индуктивным предположением и леммой 1, находим неравенство

$$-\mu_{r-1}(2m^2 S T^{p+q+\delta})^{\tau/(\tau - r+1)} \leqslant -½ T^{-2\delta} S^{\tau/(\tau - r)} + 8m^2 S T^{p+q+\delta},$$

которое при достаточно большом S противоречит (5). Это завершает доказательство предложения и теоремы 1 при $k = 2$.

В случае $k = 1$ необходимо взять $K = [\lambda T^{q+m/n}]$, $L = [T^{p-m/n}]$; $W = 1$, $L_1 = [\lambda^p T^{p+pm/qn}]$. При $k = 3$ вспомогательная функция в лемме 2 строится в виде

$$F(\bar{z}) = \sum_{0 \leqslant v_j < V} \sum_{\eta_j \in \Gamma(K)} A_{\bar{v}, \bar{\eta}} z_1^{v_1} \ldots z_n^{v_n} e^{\eta_1 z_1 + \ldots + \eta_n z_n},$$

а параметры выбираются так: $K = [\lambda T^{q+m/n}]$, $L = [T^{p-m/n}]$, $W = V = [T^{p+q}]$, $L_1 = [\lambda^{p+1} T^{p+pm/qn}]$. Все остальные рассуждения остаются без изменений.

Изложенный метод применим к исследованию значений и других функций. В качестве примера приведем теорему 3 о значениях функций, удовлетворяющих функциональным уравнениям, рассмотренным впервые К. Малером (см. [5]).

Теорема 3. *Пусть* $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$ – *степенные ряды от* z *с коэффициентами из поля алгебраических чисел* $\mathbf{K}$, $[\mathbf{K} : \mathbf{Q}] < \infty$, *сходящиеся в некоторой окрестности* U *точки* $z = 0$, *удовлетворяющие равенствам*

$$f_i(z^d) = a_i(z) f_i(z) + b_i(z), \qquad a_i(z),\ b_i(z) \in \mathbf{K}(z), \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где d – целое число, $d \geqslant 2$, и алгебраически независимые над $\mathbf{C}(z)$. *Пусть α – алгебраическое число, α, α^d, α^{d^2}, ... отличны от полюсов функций $a_i(z)$, $b_i(z)$, $\alpha \in U$, $0 < |\alpha| < 1$.*

Тогда существует функция $\varphi(z)$ такая, что для любых H, s, $s \geqslant 1$, $H \geqslant \varphi(s)$, и для любого многочлена $P \in \mathbf{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_m]$, степень которого не больше s, а коэффициенты по модулю не превосходят H, справедливо неравенство

$$(7) \qquad |P(f_1(\alpha), f_2(\alpha), \ldots, f_m(\alpha))| > H^{-\gamma s^m},$$

где γ – положительная постоянная, зависящая только от α и функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_m(z)$.

При $m = 1$ подобный результат установлен А.И. Галочкиным [1]. При $m = 2$ такую же оценку в p-адическом случае получили С.М. Молчанов и А.Я. Янченко [3]. Они же доказали при $m = 2, 3$ и некоторые оценки в числовом случае, более слабые, чем (7).

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
14 I 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галочкин А.И.* – Матем. заметки, 1980, т. 27, № 2, с. 175. 2. *Гельфонд А.О.* Трансцендентные и алгебраические числа. М.: Гостехиздат, 1952. 3. *Молчанов С.М., Янченко А.Я.* Тез. докл. Всес. конф. Теория трансцендентных чисел и ее приложения. М.: Изд-во МГУ, 1983, с. 98. 4. *Нестеренко Ю.В.* – Матем. сб., 1984, т. 123 (165), № 4, с. 435. 5. *Mahler K.* – Math. Ann., 1929, vol. 101, № 4, p. 342. 6. *Nesterenko Yu.V.* – Progr. in Math. Birkhäuser, 1983, Bd. 31, S. 199. 7. *Tijdeman R.* – J. Number Theory, 1973, vol. 5, p. 80. 8. *Waldschmidt M.* – Lect. Notes in Math., 1976, vol. 524, p. 106.

УДК 512.776 МАТЕМАТИКА

А.С. ТИХОМИРОВ

ОТОБРАЖЕНИЕ АБЕЛЯ–ЯКОБИ СЕКСТИК РОДА 3 НА ДВОЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ P^3 ИНДЕКСА ДВА

(Представлено академиком С.П. Новиковым 10 X 1985)

Двойные пространства P^3 индекса два исследовались Г. Велтерсом и автором в работах [1–3]. Одной из главных задач бирациональной теории этих многообразий является описание их главнополяризованных средних якобианов. Настоящая заметка посвящена описанию тэта-дивизора Пуанкаре среднего якобиана J двойного P^3 индекса два (тела X) посредством отображения Абеля–Якоби Φ: $H \to J$ семейства H кривых степени 6 (секстик) рода 3 на X (см. теорему 1 ниже). Сформулирован ряд следствий их этого результата.

По определению, двойное пространство P^3 индекса два (тело X) есть гладкое трехмерное проективное многообразие над $\mathbf{C}$ с двойным накрытием w: $X \to P^3$, разветвленным в гладкой квартике $W \subset P^3$. Известно [4], что пучок $\mathcal{O}_X(1) = w^* \mathcal{O}_{P^3}(1)$ является образующей в $\mathrm{Pic}\, X$. С т е п е н ь ю кривой $C \subset X$ будем называть число $c_1(\mathcal{O}_X(1) | C)$. Кроме того, будем считать, что $W \subset X$.