К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ КОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Е. М. Вечтомов

Работа является продолжением публикаций автора [1]–[3], [4, глава 6]. Она относится к общей теории колец непрерывных функций, понимаемой нами как совокупность алгебраических, функциональных и общетопологических результатов общего характера о кольцах $C(X, F)$.

1. Пусть F – хаусдорфово топологическое тело, X – произвольное топологическое пространство, $C = C(X, F)$ – кольцо всех непрерывных F-значных функций на X и $\operatorname{Max} C$ – пространство всех максимальных идеалов кольца C со *стоуновской топологией*. Обозначим через $\operatorname{Max}_0 C$ подпространство в $\operatorname{Max} C$, состоящее из фиксированных максимальных идеалов $M_x = \{f \in C : f(x) = 0\}$, $x \in X$, а через $\operatorname{Max}_1 C$ – подпространство *F-идеалов* кольца C, т.е. ядер F-гомоморфизмов $C \to F$. Не теряя общности, можно считать пространство X *F-регулярным*, т.е. гомеоморфным подпространству тихоновской степени пространства F. Если X гомеоморфно замкнутому подпространству некоторой степени F, то оно называется *F-компактным*. Подмножества A и B в X называются *F-отделимыми*, если существует функция из C, равная 0 на A и равная 1 на B. Пространство X называется *F-хаусдорфовым*, *F-тихоновским* или *F-нормальным* соответственно, если оно хаусдорфово и F-отделимы: любые две различные точки из X, любые точка и не содержащее ее замкнутое множество в X, любые два непересекающиеся замкнутые множества пространства X. На $\operatorname{Max}_1 C$ можно рассмотреть и *тихоновскую топологию*, определяемую как топология подпространства в тихоновской степени F^C при отождествлении F-идеалов с соответствующими F-гомоморфизмами $C \to F$.

Для $f \in C$ положим $X_f = \{M \in \operatorname{Max} C : \exists a \in F(f - a \in M)\}$ – подпространство в $\operatorname{Max} C$ и $\hat{f} : X_f \to F$ – отображение, определяемое формулой: $\hat{f}(M) = a \iff f - a \in M$.

Теорема 1. *Для данного F эквивалентны утверждения:*

1. *Для любых X и $f \in C$ функция $\hat{f}$ непрерывна.*
2. *Функция $\hat{f}|_{\operatorname{Max}_0 C}$ непрерывна для всякой $f \in C(F, F)$.*
3. *При любом X на $\operatorname{Max}_1 C$ стоуновская топология совпадает с тихоновской.*
4. *Пространство F F-тихоновское.*

Следствие 1. *Для каждого F-компактного пространства X при F-тихоновском F все F-идеалы кольца C являются фиксированными.*

Следствие 2. *Пусть F является F-тихоновским пространством. Тогда функторы $C(\cdot, F)$ и Max_1 осуществляют двойственность между категорией F-компактных пространств и их непрерывных отображений и категорией колец C и их F-гомоморфизмов.*

Примечание. По сравнению с предыдущими работами мы несколько изменили терминологию. В следствии 1 из [3] вместо "F-отделимый компакт" следует читать "F-тихоновский компакт". Заметим, что справедливо утверждение: *каждый F-хаусдорфов компакт F-тихоновский (F-нормальный) $\iff$ для любого компактного пространства X кольцо C гельфандово $\iff$ компактные подпространства в F F-тихоновские.*

Отметим также, что теорема 4 и следствие 2 из [3] являются частными случаями сформулированной теоремы 1.

2. Коснемся теории идеалов колец непрерывных функций.

Всюду далее, если это не оговаривается, F обозначает произвольное *несвязное нормируемое тело*. Идеал J кольца C называется *псевдопервичным*, если $fg = 0$ влечет $f \in J$ или $g \in J$ для любых $f, g \in C$; *z-идеалом*, если $f \in J$, $g \in C$ и $Z(f) \subseteq Z(g)$ влекут $g \in J$; *абсолютно выпуклым*, если из $f \in C$, $g \in J$ и $|f| \le |g|$ следует $f \in J$. Напомним, что $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ и $\operatorname{coz} f = X \setminus Z(f)$ для $f \in C$. Перечислим ряд утверждений об идеалах колец C.

Лемма 1. *Сумма (пересечение) любого семейства z-идеалов кольца C является z-идеалом.*

Лемма 2. *Всякий полупервичный идеал кольца C – абсолютно выпуклый.*

Теорема 2. *Всякий полупервичный псевдопервичный идеал кольца C первичен.*

Доказательство теоремы 2 основывается на специфике нормы $|\cdot|$ в F, аналоге конструкции из доказательства теоремы 17.4 [4] и лемме 2.

Следствие 3. *Любой псевдопервичный z-идеал в C первичен.*

Следствие 4. *Любой идеал в C, максимальный среди z-идеалов, содержащихся в данном псевдопервичном идеале, первичен.*

Следствие 5. *Любой минимальный псевдопервичный идеал в C является первичным z-идеалом.*

На основе теоремы 2 и следствия 5 доказывается

Теорема 3. *Для произвольного идеала J кольца C эквивалентны условия:* 1) *J псевдопервичен;* 2) *J содержит первичный идеал;* 3) *множество всех первичных идеалов в C, содержащих J, образует цепь по включению;* 4) *пересечение всевозможных первичных идеалов в C, содержащих J, есть первичный идеал.*

Следствие 6. *Сумма любых двух не сравнимых по включению первичных идеалов кольца C является первичным z-идеалом.*

Указанные в пункте 2 утверждения – это перенос на случай несвязных нормируемых тел F известных результатов (см. [5], [6]) о кольцах $C(X, \mathbb{R})$.

Предложение 1. *Для любого нормируемого тела F все псевдопервичные идеалы кольца C первичны $\Longleftrightarrow$ кольцо C регулярно по Нейману.*

Модификацией доказательства случая $F = \mathbb{R}$ [7] получается

Теорема 4. *Всякий полупервичный идеал кольца C является плоским правым (левым) C-модулем.*

3. Затронем еще теорию делимости в кольцах C.

Рассматриваются левые делители в C. Кольцо C называется НОД-*кольцом* (НОК-*кольцом*), если любые две функции из C имеют НОД (соответственно НОК).

Предложение 2. *Для любых f, $g \in C$ равносильны условия:* 1) *f и g имеют* НОД; 2) *$fC + gC$ – главный правый идеал кольца C;* 3) *существуют такие d, φ, $\psi \in C$, что $f = d\varphi$, $g = d\psi$ и $\varphi C + \psi C = C$.*

Следствие 7. *Для f, $g \in C$ справедливы утверждения:* 1. *Если f и g имеют* НОД, *то $Z(f) \setminus Z(g)$ и $Z(g) \setminus Z(f)$ F-отделимы в X.* 2. *Если $fg = 0$, то f и g имеют* НОД $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{coz} f$ *и* $\operatorname{coz} g$ *F-отделимы.*

Предложение 3. *Если F – поле и $Z(f) = Z(g)$ при f $g \in C$, то f и g имеют* НОД $\Longleftrightarrow$ *f и g имеют* НОК.

Теорема 5. *Пусть F – недискретное несвязное нормируемое тело или $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Для кольца C рассмотрим следующие условия:*

а) *каждый конечно-порожденный правый идеал в C является главным правым идеалом;* б) *C –* НОД *-кольцо;* в) *решетка всех правых идеалов кольца C дистрибутивна;* г) *C –* НОК-*кольцо;* д) *для любых f, $g \in C$, если $fg = 0$, то* $\operatorname{coz} f$ *и* $\operatorname{coz} g$ *F-отделимы в X;* е) *кольцо C регулярно по Нейману (равносильно,* $\operatorname{Max}_0 C$ *есть P-пространство* [5]).

Тогда имеют место утверждения:

1. *Условия* а)–в) *эквивалентны между собой, и в случае коммутативного F эквивалентны* г). 2. *Если F локально компактно, то условие* а) *эквивалентно* д) [8]. 3. *Если F не локально компактно, то условие* а) *эквивалентно* е).

Заметим, что при $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ теорема 4 и предложения 2 и 3 также верны, только условие 3) предложения 2 требуется немного ослабить.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Вечтомов Е. М. Кольца непрерывных функций на топологических пространствах. Избранные темы. М.: Моск. пед. гос. ун-т, 1992. [2] Вечтомов Е. М. // УМН. 1992. Т. 47. №5. С. 171–172. [3] Вечтомов Е. М. // УМН. 1993. Т. 48. №1. С. 163–164. [4] Вечтомов Е. М. Функциональные представления колец. М.: Моск. пед. гос. ун-т, 1993. [5] Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions. N.Y.: Springer-Verlag, 1976. [6] Gillman L., Kohls C.W. // Math. Z. 1960. V. 72. №5. P. 399–409. [7] Вечтомов Е. М. // Известия вузов. Матем. 1981. №1. С. 3–10. [8] Вечтомов Е. М. // Матем. заметки. 1983. Т. 34. №3. С. 321–332.

Московский педагогический
государственный университет

Поступило в Правление общества
23.07.1993