ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 122, № 2
февраль, 2000

К. Аторн*

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ И $\mathcal{D}$-МОДУЛИ

Получены некоторые результаты для теории преобразований Лапласа линейных систем уравнений в частных производных и показано, как такие преобразования связаны с $\mathcal{D}$-модулями.

1. КЛАССИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Линейное гиперболическое дифференциальное уравнение второго порядка

$$z_{,xy} + az_{,x} + bz_{,y} + cz = 0,$$

в котором a, b и c суть функции от x и y, а нижние индексы обозначают частные производные, допускает преобразования функции z вида $z \to z_x + bz$ и $z \to z_y + ax$. Эти преобразования, называемые *преобразованиями Лапласа*, сохраняют исходную форму уравнения. В работах [1] и [2] эти преобразования интерпретировались как преобразования Беклунда для решетки Тоды. Проявившийся в последнее время интерес к таким преобразованиям связан с геометрией сопряженных сетей [3] и с гидродинамическими системами [4].

Удобно проделать эти преобразования для оператора [5]

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \partial_x + h_{11}(x,y) & h_{12}(x,y) \\ h_{21}(x,y) & \partial_y + h_{22}(x,y) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

который ковариантен относительно *твистов* $\partial_x \mapsto \partial_x + g^{-1}g_x$ и $\partial_y \mapsto \partial_y + g^{-1}g_y$, в то время как некоторые комбинации функций h_{ij} остаются неизменными. Эти комбинации, называемые инвариантами *Лапласа*, или *инвариантами твистов*, в рассматриваемом случае имеют вид

$$(12) = h_{12}h_{21}, \tag{2}$$

$$[12] = h_{11,x} - h_{22,y} + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{h_{12}}{h_{21}}\right)_{,xy} \tag{3}$$

*Department of Mathematics, University of Glasgow, Glasgow, UK

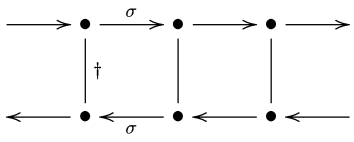

Рис. 1. Лестничная диаграмма Лапласа.

и параметризуют классы эквивалентности операторов (1) относительно твистов.

Можно показать, что операторы $\mathbb{L}$ и $\tilde{\mathbb{L}}$ связаны преобразованиями Лапласа, если существуют такие линейные дифференциальные операторы D и $\widetilde{D}$, что

$$\mathbb{L}D = \widetilde{D}\tilde{\mathbb{L}}. \tag{4}$$

Если ограничиться случаем, когда операторы D и $\widetilde{D}$ линейно независимы, первого порядка по производным и содержат коэффициентные функции только от $\mathbb{L}$ и $\tilde{\mathbb{L}}$, то возможны лишь два выбора: $D = I_2\partial_x + A$ и $D = I_2\partial_y + B$, и соответствующие этим двум случаям преобразования обозначаются как $\mathbb{L} \mapsto \mathbb{L}^{\Sigma}$ и $\mathbb{L} \mapsto \mathbb{L}^{\sigma}$. Эти преобразования порождают соответствующие преобразования инвариантов: $(12) \mapsto (12)^{\Sigma}$ и т.д. Еще одно ковариантное преобразование оператора $\mathbb{L}$ – это преобразование сопряжения $\mathbb{L} \mapsto \mathbb{L}^{\dagger}$, где $\mathbb{L}^{\dagger}$ формально сопряжен оператору $\mathbb{L}$.

Эти отображения порождают бесконечную группу диэдра $\mathcal{D}_{\infty}$ с соотношениями $\sigma\Sigma = \Sigma\sigma = \dagger^2 = \sigma\,\dagger\,\sigma\dagger = e$, где e – тождественное преобразование; классы эквивалентности операторов удобно представить в виде *лестничной диаграммы Лапласа* (рис. 1). Стрелки диаграммы отвечают преобразованию $\sigma = \Sigma^{-1}$, в то время как ненаправленные отрезки – преобразованию сопряжения $\dagger$.

Пусть индекс n соответствует инварианту, получаемому из исходного инварианта $(12)_0$ после n кратного применения оператора σ. Тогда справедливы рекуррентные соотношения второго порядка:

$$-(12)_{n+1} + 2(12)_n - (12)_{n-1} = (\ln(12)_n)_{,xy}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

которые суть уравнения двумеризованной решетки Тоды (ДРТ).

Для элементов из области определения оператора $\mathbb{L}$ операторы σ и Σ – линейные дифференциальные операторы, а групповое соотношение

$$\sigma\Sigma = \Sigma\sigma$$

имеет смысл абстрактного соотношения Лакса. В этой связи “интегрируемость” уравнений ДРТ связана с абелевой составляющей группы $\mathcal{D}_{\infty}$, которая порождается при расширении этой составляющей с помощью группы порядка два:

$$0 \to \mathcal{A}b \hookrightarrow \mathcal{D}_{\infty} \twoheadrightarrow \mathcal{S}_2 \to 0.$$

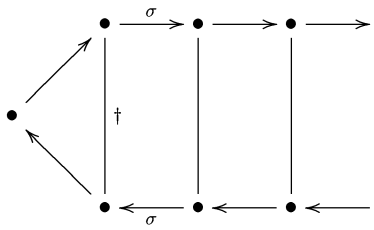

Рис. 2. Редуцированная лестничная диаграмма при четных p.

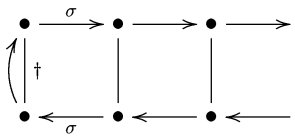

Рис. 3. Редуцированная лестничная диаграмма при нечетных p.

Рассматривается кольцо матричных дифференциальных операторов, обозначаемое как $M[\partial_x, \partial_y]$. Если тривиализовать одну из производных, т.е. заменить исходное кольцо кольцом $M[\partial, \lambda]$, и повторить все предыдущие рассуждения, то получится одномерная цепочка Тоды.

Другие редукции могут быть получены из подгрупп $\mathcal{D}_\infty$ следующим образом. Пусть $\bullet$ – класс эквивалентности в решеточной диаграмме Лапласа. Тогда $\mathrm{Stab}(\bullet)$ – подгруппа $\mathcal{D}_\infty$ такая, что задано действие $\mathcal{D}_\infty$ на фактор-пространствах относительно $\mathrm{Stab}(\bullet)$. Это действие задает редуцированную лестничную диаграмму Лапласа. Например, пусть стабилизатор класса $\bullet$ – это подгруппа $\mathcal{H}_p$, порожденная инволюцией $\dagger\sigma^p$. Тогда гомоморфизм $\mathcal{H}_p$ сопряжен $\mathcal{H}_0$ при четных p и $\mathcal{H}_1$ при нечетных p; в последнем случае правые фактор-пространства имеют вид $C_r = \{\sigma^r, \sigma^{-r}\dagger\}$ при $r \in \mathbb{Z}$ и $C_r = \{\sigma^r, \sigma^{-r-1}\dagger\}$ при $r \in \mathbb{Z}$. Действие на фактор-пространствах представлено на рис. 2 и 3. В каждом из этих случаев (и, на самом деле, *только* в этих случаях, связанных с соответствующими лиевыми алгебрами Каца–Муди C_∞ и B_∞) существует отображение из $\ker \mathbb{L}$ в $\ker \mathbb{L}^\dagger$. Использование обобщенной теоремы Гурса позволяет в этом случае выписать для этих операторов преобразования Мутара [6].

2. ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

Обсуждаемая конструкция может быть обобщена на случай трех независимых переменных [5]:

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \partial_1 + h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & \partial_2 + h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & \partial_3 + h_{33} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

При этом имеются три твиста $\partial_i \mapsto \partial_i + g^{-1}g_{,i}$ и число инвариантов твистов, которые

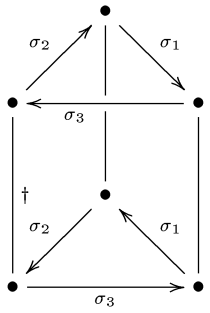

Рис. 4. Фундаментальная клетка лапласовой решетки второго ранга.

в данном случае имеют вид

$$(ij) = h_{ij}h_{ji}, \tag{7}$$

$$[ij] = h_{ii,j} - h_{jj,i} + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{h_{ij}}{h_{ji}}\right)_{,ij}, \tag{8}$$

достаточно для однозначной фиксации классов эквивалентности операторов $\mathbb{L}$. Соотношения (4) для линейных операторов $D_i = \partial_i + \cdots$ задают три коммутирующих линейно независимых отображения σ_1, σ_2 и σ_3, которые с учетом определяющего соотношения $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 1$ порождают бесконечную абелеву группу $\mathcal{A}b$ второго ранга. Полная группа симметрий $\mathcal{L}$ – полупрямое произведение группы $\mathcal{A}b$ и группы $\mathcal{S}_3^\dagger$; последняя группа – это группа перестановок трех индексов, расширенная с помощью добавления центрального элемента †, который, как и раньше, соответствует операции формального сопряжения элемента $\mathbb{L}$. Таким образом, получаем диаграмму

$$0 \to \mathcal{A}b \hookrightarrow \mathcal{L} \twoheadrightarrow \mathcal{S}_3^\dagger \to 0 \tag{9}$$

(в предыдущем примере симметрийной группы $\mathcal{S}_2$ ее генератор, в частности, порождал и оператор сопряжения †).

Теперь лестничная диаграмма заменяется парой триангулированных (древесных) решеток, в которых вершины соответствуют тройкам $[(12), (23), (31)]$ инвариантов твистов (фундаментальная клетка такой диаграммы изображена на рис. 4). Эти инварианты удовлетворяют уравнениям типа цепочки Тоды, например

$$-(12)_{n+1,m} + 2(12)_{n,m} - (12)_{n,m+1} = (\ln(12)_{n,m})_{,12}. \tag{10}$$

Заметим, что это не просто *вложения* ДРТ в древесную решетку. Процедура редукции происходит аналогично предыдущему случаю, что позволяет создавать системы, заданные на цилиндрах, торах и т. д. Представляется вероятным, что редукции относительно подгрупп $\mathcal{L}$, включающих элементы, содержащие †, допускают соответствующие отображения Мутара. Эта проблема находится сейчас в стадии исследования.

3. $\mathcal{D}$-МОДУЛИ И ОТОБРАЖЕНИЯ ДАРБУ

Имеются две причины, по которым отображения Лапласа и Дарбу удобно формулировать в абстрактных алгебраических терминах: во-первых, соответствующие конструкции выглядят проще, что позволяет применять общие, глубоко разработанные методы теории некоммутативных колец; во-вторых, это облегчает поиск и исследование приложений таких отображений в других областях математической физики.

Алгебра Вейля $\mathcal{A}_n$ – это простой, некоммутативный нетеровский домен Эре. Она тем самым является одним из наиболее употребимых понятий теории $\mathcal{D}$-модулей. В общем случае будем считать $\mathcal{R}$ некоторой алгеброй матричных дифференциальных операторов. Обозначим через $M_{\mathbb{L}}$ левый $\mathcal{R}$-модуль $M/\mathcal{R}\mathbb{L}$, взятый по оператору $\mathbb{L} \in \mathcal{R}$. Для каждого автоморфизма ρ алгебры $\mathcal{R}$ и каждого левого $\mathcal{R}$-модуля M существует *твистованный* модуль M^ρ с заданным левым действием алгебры $\mathcal{R}$: $r \circ m = \rho(r)m$, $\forall r \in \mathcal{R}$, $m \in M$. Заметим, что M и M^ρ в общем случае не изоморфны.

Решения линейного уравнения, задаваемого $\mathbb{L}$, которые лежат в некотором поле $\mathcal{F}$, можно считать элементами множества гомоморфизмов $\mathcal{H}_{\mathbb{L}} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(M_{\mathbb{L}}, \mathcal{F})$.

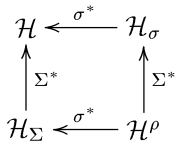

Рис. 5. Пара Лакса.

В случае общего оператора $\mathbb{L}$ соотношение (4) порождает *гомоморфизм Дарбу* левых $\mathcal{R}$-модулей, ϕ: $M_{\mathbb{L}} \to M_{\tilde{\mathbb{L}}}$, задаваемый соотношением $[m] \mapsto [mD]$, $\forall m \in M_{\mathbb{L}}$. Поскольку $\mathcal{R}$ во всех интересных случаях не является главной областью левого идеала, такие отображения не удается получить какой-либо факторизацией оператора $\mathbb{L}$. В случае оператора (1) σ и Σ индуцируют такие отображения (со звездой) между пространствами решений, при которых диаграмма на рис. 5 становится коммутативной. На этой диаграмме нижние индексы относятся к преобразованным модулям, а верхний индекс ρ обозначает твист.

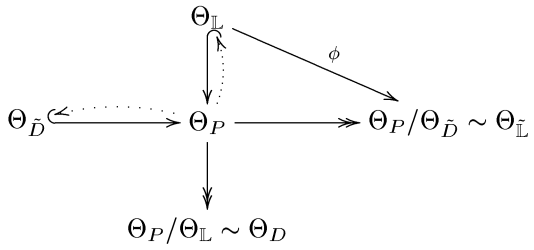

Рис. 6. Отображение Дарбу ϕ на идеалах внешних дифференциалов.

Отметим, что в соответствии с рис. 6 соотношение (4) можно интерпретировать как идеалы внешних дифференциалов. На этом рисунке пунктирные стрелки обозначают редукции по группам симметрий и $P = \mathbb{L}D = \widetilde{D}\widetilde{\mathbb{L}}$. Более детальное рассмотрение в рамках этого подхода содержится в работе [7]. Отображения Мутара, действующие на комплексах де Рама, также допускают аналогичную интерпретацию [8].

4. ПРИЛОЖЕНИЕ К ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

В заключающем разделе описываются подход $\mathcal{D}$-модуля и гомоморфизмы Дарбу для линейных операторов второго порядка, имеющих вид

$$L_i = \partial^2 + p_i\partial + q_i. \tag{11}$$

$\mathcal{A}_1$-модуль M_{L_i} конечнопорожден элементами 1 и ∂, в то время как действие оператора ∂ на M_{L_i} задается дифференциальным оператором

$$\partial_i = \begin{pmatrix} D & -q_i \\ 1 & D - p_i \end{pmatrix},$$

где D обозначает производную. Отображение $\phi\colon M_{L_1} \to M_{L_2}$ с необходимостью имеет вид

$$\phi = \begin{pmatrix} f & f' - q_2 \\ 1 & f - p_2 \end{pmatrix},$$

где штрих обозначает производную. Отображение ϕ является гомоморфизмом $\mathcal{A}_1$-модуля тогда и только тогда, когда $\phi\partial_1 = \partial_2\phi$. Это соотношение сводится к дифференциальным уравнениям на f, которые либо имеют, либо не имеют полиномиальных решений.

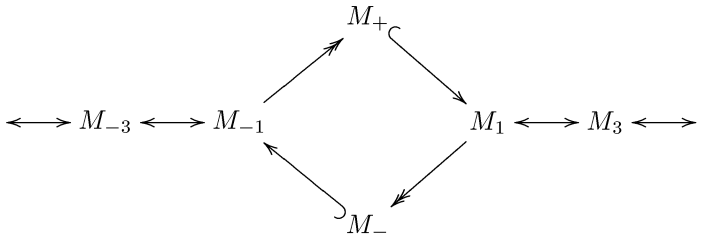

Рис. 7. Цепочка преобразований Дарбу для нечетных γ.

Например, выберем $L_\gamma = \partial^2 - x^2 + \gamma \in \mathcal{A}_1$ при $\gamma \in \mathbb{C}$ и рассмотрим ассоциированные модули M_γ. Все соответствующие гомоморфизмы $\phi_\gamma^\pm\colon M_\gamma \to M_{\gamma\pm2}$ суть изоморфизмы, кроме ϕ_1^- и ϕ_{-1}^+. Если параметр γ – нечетное целое число, то получается последовательность гомоморфизмов, изображенная на рис. 7, где используются стандартные обозначения для инъективных и сюръективных гомоморфизмов, а стрелки $\leftrightarrow$ обозначают изоморфизмы. Модули M_+ и M_- – ядра соответствующих отображений ϕ_1^- и ϕ_{-1}^+.

Используя результаты работы [9], получим, что M_+ и M_- – единственные подмодули M_1 и M_{-1}. В частности, M_1 и M_2 нерасщепимы, откуда следует, что группы $\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}_1}(M_\pm)$ соответствующих $\mathcal{A}_1$-автоморфизмов имеют треугольный (матричный) вид. Тогда из цепочки изоморфизмов Дарбу следует, что группы $\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}_1}(M_{2n+1})$ имеют треугольный вид при всех целых n.

На самом деле, дифференциальные группы Галуа в этом конкретном случае также имеют треугольный вид [10]. Хотя это и наводит на мысль, что группы автоморфизмов модулей должны быть изоморфны дифференциальным группам Галуа соответствующих уравнений, легко видеть, что это не так. Простой контрпример дается цепочкой автоморфизмов

$$\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_1\partial \hookrightarrow \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_1\partial^2 \twoheadrightarrow \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_1\partial.$$

Это расщепимая короткая точная последовательность, а потому группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}_1}(\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_1\partial^2)$ изоморфна $GL_2(\mathbb{C})$, в то время как соответствующая дифференциальная группа Галуа тривиальна.

Проблема состоит в том, что появляются "новые константы", или интегралы, которые действуют как ограничения на элементах группы Галуа. Можно тем не менее построить более общее соответствие между указанными двумя группами, если рассмотреть группу автоморфизмов подходящего тензорного произведения алгебр [11], $\bigotimes_{k[x]} M_L$, профакторизованного по идеалу, порождаемому "константами". Эта конструкция напоминает подход, предложенный в работе [12] для дифференциальной группы Галуа, и будет обсуждена в последующих публикациях.

Список литературы

[1] *S. Saito, N. Saitoh.* Phys. Lett. A. 1987. V. 123. P. 283.
[2] *J. Weiss.* Phys. Lett. A. 1989. V. 137. P. 365.
[3] *N. Kamran, K. Tenenblat.* Duke Math. J. 1996. V. 84. P. 237.
[4] *Е. В. Ферапонтов.* ТМФ. 1997. Т. 110. № 1. С. 86.
[5] *C. Athorne.* Phys. Lett. A. 1995. V. 206. P. 162.
[6] *C. Athorne.* Inverse Problems. 1993. V. 9. P. 217.
[7] *C. Athorne.* J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 6605.
[8] *C. Athorne, J. J. C. Nimmo.* Inverse Problems. 1991. V. 7. P. 645.
[9] *J. C. McConnell, J. C. Robson.* J. Algebra. 1973. V. 26. P. 319.
[10] *H. P. Rehm.* J. Reine Agnew. Math. 1979. V. 307. № 8. P. 1.
[11] *S. C. Coutinho.* A primer of algebraic D-modules. Cambridge: CUP, 1995.
[12] *A. J. Majid.* Lectures on differential Galois theory. New York: Amer. Math. Soc., 1994.