ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М., «Наука», 1977.
[2] *Lacombe D.* Recursion theoretic structure for relational sistems.— Logic Colloquium 69, Amsterdam — London, North Holland, 1971, 3—17.

УДК 513.7

Т. Г. ИСАНОВ

О ПРОДОЛЖЕНИИ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ КЛАССА $C^{m,\lambda}$

В настоящей работе рассматривается выпуклая поверхность F_0 класса $C^{m,\lambda}$ $(m \geqslant 2)$ с положительной гауссовой кривизной. Пусть τ — изгибающее поле поверхности F_0. Если поле бесконечно малого изгибания τ поверхности F_0 таково, что для каждой точки $M \in F_0$ существует окрестность $U_M \in F_0$ и аналитическое изгибание этой окрестности в классе $C^{m,\lambda}$ поверхностей, для которого τ является полем скоростей в начальный момент, то будем говорить, что τ локально продолжаемо до аналитического изгибания в соответствующем классе поверхностей.

Справедлива следующая

Теорема. *Всякое бесконечно малое изгибание класса $C^{m,\lambda}$ поверхности положительной гауссовой кривизны локально продолжаемо до аналитического изгибания в классе $C^{m,\lambda}$ поверхностей.*

Эта теорема является обобщением теоремы из статьи ([1]), поэтому методы доказательств этих теорем существенно не отличаются.

Взяв точку $M \in F_0$, рассмотрим ее окрестность $U_M \in F_0$, обладающую свойствами а), б) ([1]) и введем в пространстве прямоугольные декартовы координаты x, y, z, приняв P_M за плоскость (x, y).

Если x, y, $z(x, y)$ координаты точки из U_M, проектируемой в точку с координатами x, y, то $r_0 = (x, y, z(x, y))$ — функция класса $C^{m,\lambda}(m \geqslant 2)$, $(x, y) \in D$.

Теперь построим семейство $C^{m,\lambda}(m \geqslant 2)$ функций $r^*(x, y; t)$, $(x, y) \in D$, $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, аналитически зависящих от параметра t и удовлетворяющих условиям:

α) при всяком $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ квадратичная форма $(dr^*)^2$ совпадает с $(dr_0)^2$ всюду в D и, кроме того, $r^*(x, y; 0) = r_0(x, y)$, $(x, y) \in D$;

$$\beta)\ r_t^*(x, y; 0) = \tau(x, y),\ (x, y) \in D.$$

Для этого, в свою очередь (как в ([1])), строится последовательность $\{\rho_n(x, y)\}$ $C^{m,\lambda}$-функций, заданных на D и подчиненных условиям:

1. $\rho_0(x, y) = r_0(x, y)$ на D.
2. $\rho_1(x, y) = {}^1/_2\tau(x, y)$ на D.
3. При любом натуральном $n \geqslant 2$ выполнено уравнение

$$d\rho_0 d\rho_n + \sum_{i=1}^{n-1} d\rho_i d\rho_{n-i} = 0.$$

4. Ряд с общим членом $\|\rho_n\|_{m,\lambda} t^n$ сходится равномерно на D при всех t из некоторого отрезка $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Действительно, при этих условиях

поверхности $F(t)$, задаваемые вектор-функциями

$$r^*(x, y; t) = \rho_0(x, y) + 2\sum_{n=1}^{\infty} t^n \rho_n(x, y), \ (x, y) \in D, \ t \in [-\varepsilon, \varepsilon],$$

принадлежат классу $C^{m,\lambda}$ и удовлетворяют условиям α), β). Будем доказывать существование последовательности $\{\rho_n(x, y)\}$, обладающей свойствами 1—4. Положим $\rho_0(x, y) = r_0(x, y)$ (обеспечив этим выполнение свойства 1).

По теореме А. В. Погорелова ([2]) изгибающее поле принадлежит классу $C^{m,\lambda'}(\lambda' < \lambda)$. На самом деле, эту теорему можно усилить до $\tau \in C^{m,\lambda}$. Для этого введем систему координат x', y', z', приняв произвольную точку P' за начало координат, а плоскость (x', y') выберем так, чтобы некоторая окрестность точки P' поверхности F_0 однозначно проектировалась на плоскость (x', y'). При достаточно малом R окрестность точки P' поверхности F_0 задается уравнением $z' = z'(x', y')$, где $z'(x', y')$ — функция класса $C^{m,\lambda}$ в круге $\Omega: x'^2 + y'^2 < R^2$. Известно, что (см. ([2])) вертикальная составляющая $\xi(x', y')$ поля $\tau(x', y')$ удовлетворяет уравнению:

$$r'\xi_{y'y'} - 2s'\xi_{x'y'} - t'\xi_{x'x'} = 0, \tag{1}$$

где r', s', t' обозначают вторые производные функции $z'(x', y')$ (они принадлежат классу $C^{m-2,\lambda}$).

По теореме о гладкости решений эллиптических уравнений ([3]) решение уравнений (1) принадлежит классу $C^{m,\lambda}$ в $\Omega': x'^2 + y'^2 < R'^2$, где $R' = R - \delta$.

Две другие составляющие поля τ выражаются через криволинейные интегралы от известных функций (см. ([2]), с. 256) и они тоже принадлежат классу $C^{m,\lambda}$ в окрестности U' произвольной точки P'. Отсюда следует, что если поверхность принадлежит классу $C^{m,\lambda}$, то каждое изгибающее поле тоже принадлежит классу $C^{m,\lambda}$ $(m \geqslant 2)$.

Положим $\rho_1(x, y) = {}^1/_2\tau(x, y)$, $(x, y) \in D$. Этим будет обеспечено выполнение свойства 2 и справедливость уравнения $d\rho_0 d\rho_1 = 0$.

Далее все рассуждения точно такие же, как в ([1]), только во всех формулах (7)—(12) нормы на множествах функций $C^{3,\lambda}$, $C^{2,\lambda}$, $C^{1,\lambda}$ $(\|\cdot\|_{3,\lambda}, \|\cdot\|_{2,\lambda}, \|\cdot\|_{1,\lambda})$, соответственно заменяются нормами на множествах функций $C^{m,\lambda}$, $C^{m-1,\lambda}$, $C^{m-2,\lambda}$ $(\|\cdot\|_{m,\lambda}, \|\cdot\|_{m-1,\lambda}, \|\cdot\|_{m-2,\lambda})$, где $m \geqslant 2$. Возможность такой замены следует из оценки $\|F_n\|_{m-2,\lambda} \leqslant K'(\|\rho_i\|_{m,\lambda}\|\rho_{n-i}\|_{m,\lambda})$ и оценок для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа (см. ([1, 3, 4])).

В заключение автор выражает благодарность Ю. Ф. Борисову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ташкент,
Институт сейсмологии АН УзССР

Статья поступила
6 декабря 1977 г.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Исанов Т. Г.* О продолжении бесконечно малых изгибаний.— Докл. АН СССР, 1977, 234, № 6, 1257—1260.
2 *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., «Наука», 1969.
3 *Ладыженская О. А.* и *Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1973.
4 *Бакельман И. Я.* Геометрические методы решения эллиптических уравнений. М., «Наука», 1965.