Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Т. Сабиров, К вопросу об устойчивости малых периодических решений, *Докл. АН СССР*, 1966, том 167, номер 4, 755–757

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.89
16 марта 2025 г., 09:36:55

Доклады Академии наук СССР
1966. Том 167, № 4

УДК 517.91.9

МАТЕМАТИКА

Т. САБИРОВ

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МАЛЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 29 VI 1965)

1. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx\,/\,dt = f(t, x, \lambda) \tag{1}$$

с ω-периодическими по t правыми частями, зависящими от скалярного параметра λ. Будем считать, что правые части обладают достаточной гладкостью по совокупности переменных. Во всей статье предполагается, что система (1) при всех λ имеет нулевое решение: $f(t, 0, \lambda) \equiv 0$. Нас будет интересовать вопрос о существовании и устойчивости малых ненулевых ω-периодических решений системы (1) (см. [1, 2]).

Назовем число λ_0 (см. [3, 4]) **бифуркационным значением** параметра, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$, при котором система (1) имеет ненулевое ω-периодическое решение, амплитуда $\max \| x(t) \|$ которого не превышает ε.

Обозначим через $V(t, \lambda)$ фундаментальную матрицу (см. [5]) линеаризованной в нуле системы

$$dx\,/\,dt = A(t, \lambda)x. \tag{2}$$

Легко видеть (см. [3, 6]), что бифуркационными могут быть только те значения параметра λ, при которых матрица монодромии $V(\omega, \lambda)$ имеет собственное значение 1. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Для простоты будем считать, что 1 является собственным значением матрицы $V(\omega, 0)$, и будем интересоваться вопросом о существовании и устойчивости малых периодических решений при малых значениях λ. В статье предполагается, что собственному значению 1 отвечает одна жорданова клетка порядка k матрицы $V(\omega, 0)$. Иначе говоря, предполагается, что порядок собственного значения 1 равен 1, а кратность (размерность корневого подпространства) равна k. Случай $k = 1$ детально изучен в [3]; важные результаты общего характера о бифуркационных значениях получены в [6].

2. Пусть $e_0, e_1, \ldots, e_{k-1}$ — собственный и присоединенные векторы матрицы $V(\omega, 0)$:

$$V(\omega, 0)e_0 = e_0, \quad V(\omega, 0)e_1 = e_1 - e_0, \ldots, V(\omega, 0)e_{k-1} = e_{k-1} - e_{k-2},$$

а $g_0, g_1, \ldots, g_{k-1}$ — собственный и присоединенные векторы сопряженной матрицы $V^*(\omega, 0)$:

$$V^*(\omega, 0)g_0 = g_0, \quad V^*(\omega, 0)g_1 = g_1 - g_0, \ldots, V^*(\omega, 0)g_{k-1} = g_{k-1} - g_{k-2}.$$

Без ограничения общности (см. [7]) можно считать выполненными равенства

$$(e_i, g_j) = 1 \text{ при } i + j = k - 1; \quad (e_i, g_j) = 0 \text{ при } i + j = k - 1. \tag{3}$$

Через $x_0(t)$ обозначим решение линейной системы (2) при $\lambda = 0$, удовлетворяющее начальному условию $x_0(0) = e_0$; через $x_1(t)$ — решение той же системы, удовлетворяющее условию $x_1(0) = e_1$.

Запишем систему (1) в виде

$$dx\,/\,dt = A(t,\lambda)x + B_m(t,x,\lambda) + F(t,x,\lambda), \tag{4}$$

где $B_m(t,x,\lambda)$ содержит однородные члены порядка m по пространственным переменным x, а $F(t,x,\lambda)$ — члены высшего порядка малости. Введем обозначение

$$N = \int\limits_0^\omega (V^{-1}(\tau,0)\,B_m(\tau,x_0(\tau),0),\,g_0)\,d\tau. \tag{5}$$

Если $N \neq 0$, то система (1) при $\lambda = 0$ не имеет малых ненулевых ω-периодических решений.

Матрицу $A(t,\lambda)$ можно записать в виде

$$A(t,\lambda) = A(t,0) + \lambda^p A_1(t) + o(\lambda^p), \tag{6}$$

где $p > 0$ — некоторое целое число. Пусть

$$\alpha_0 = \int\limits_0^\omega (V^{-1}(\tau,0)\,A_1(\tau)\,x_0(\tau),\,g_0)\,d\tau. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть m четно и $\alpha_0 N \neq 0$. Тогда нуль является бифуркационным значением параметра, причем при каждом малом ненулевом λ система (1) имеет единственное ненулевое ω-периодическое решение.*

Теорема 2. *Пусть m нечетно и p четно. Тогда при $\alpha_0 N > 0$ число нуль не является бифуркационным значением параметра, а при $\alpha_0 N < 0$ является, причем при малых ненулевых λ система (1) имеет ровно два малых ненулевых ω-периодических решения.*

Теорема 3. *Пусть m и p нечетны, $\alpha_0 N \neq 0$. Тогда нуль является бифуркационным значением параметра, причем система (1) имеет два ненулевых ω-периодических решения при таких малых λ, что $\lambda\alpha_0 N < 0$, и не имеет ненулевых малых ω-периодических решений при таких λ, что $\lambda\alpha_0 N > 0$.*

Доказательство этих теорем использует известное преобразование Шмидта ([8, 9]) и метод диаграммы Ньютона ([10]).

3. Теоремы 1—3 можно дополнить следующим важным утверждением.

Теорема 4. *Пусть $\alpha_0 N \neq 0$ и $k \geqslant 3$. Тогда все ненулевые малые ω-периодические решения системы (1), существование которых вытекает из теорем 1—3, неустойчивы по Ляпунову.*

Вопрос об устойчивости малых периодических решений для случая $k = 1$ рассмотрен в ([3]).

Рассмотрим случай $k = 2$. Будем считать, что все отличные от 1 собственные значения μ матрицы $V(\omega,0)$ лежат внутри круга $|\mu| < 1$. Положим

$$\delta = (m-1)\alpha_0 + 2\beta_0, \tag{8}$$

где

$$\beta_0 = \frac{1}{2}\Big\{\int\limits_0^\omega \Big(V^{-1}(\tau,0)\,A_1(\tau)\,x_0(\tau) - \frac{m\alpha_0}{N}B_m(\tau,x_0(\tau);0),\,g_1\Big)\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^\omega \Big(V^{-1}(\tau,0)\,A_1(\tau)\,x_1(\tau) - \frac{m\alpha_0}{N}B_m(\tau,x_0^{m-1}(\tau),x_1(\tau);0),\,g_0\Big)\,d\tau\Big\}.$$

Вопрос об устойчивости ненулевых малых ω-периодических решений, соответствующих малым ненулевым λ и существующих в силу теорем 1—3, решается знаками чисел $\lambda^p\alpha_0$ и $\lambda^p\delta$.

Теорема 5. *Малые ненулевые ω-периодические решения устойчивы, если оба числа $\lambda^p\alpha_0$ и $\lambda^p\delta$ отрицательны, и неустойчивы, если хотя бы одно из этих чисел положительно.*

4. В этом пункте рассмотрим случай, когда число (7) обращается в нуль. Будем считать, что

$$A(t, \lambda) = A(t, 0) + \lambda^p A_1(t) + \lambda^{p_1} A_2(t) + o(\lambda^{p_1}), \tag{9}$$

где $p_1 > p$. Обозначим через D матрицу с элементами $d_{ij} = \xi_i \eta_j$, где $e_{k-1} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $g_{k-1} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Как известно, матрица $I - V(\omega, 0) + D$ имеет обратную Г. Положим

$$\alpha_1 = \alpha_1^{(1)} \text{ при } 2p_1 < p_2; \quad \alpha_1 = \alpha_1^{(2)} \text{ при } 2p_1 > p_2; \quad \alpha_1 = \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} \text{ при } 2p_1 = p_2,$$

где

$$\alpha_1^{(1)} = \int_0^\omega \int_0^\omega (V^{-1}(\tau, 0) A_1(\tau) V(\tau, 0) \Gamma V(\omega, 0) V^{-1}(s, 0) A_1(s) x_0(s), g_0)\, d\varepsilon\, ds,$$

$$\alpha_1^{(2)} = \int_0^\omega (V^{-1}(\tau, 0) A_2(\tau) x_0(\tau), g_0)\, d\tau.$$

Пусть $q = \min(2p, p_1)$.

Теорема 6. *Пусть $\alpha_0 = 0$. Тогда утверждения теорем 1—3 сохраняют силу, если всюду заменить α_0 числом α_1, а p числом q.*

Положим

$$\beta_1 = \int_0^\omega (V^{-1}(\tau, 0) A_1(\tau) x_1(\tau), g_0)\, d\tau + \int_0^\omega (V^{-1}(\tau, 0) A_1(\tau) x_0(\tau), g_1)\, d\tau.$$

Теорема 7. *Пусть $\alpha_0 = 0$, но $\alpha_1 \beta_1 N \neq 0$. Пусть $k \geqslant 4$. Тогда все ненулевые малые ω-периодические решения системы (1), существование которых вытекает из теоремы 6, неустойчивы.*

При $k \leqslant 0$ возможно появление как устойчивых, так и неустойчивых малых ненулевых ω-периодических решений. Соответствующие критерии громоздки, и мы их здесь не выписываем.

Выражаю искреннюю благодарность М. А. Красносельскому за руководство моей работой.

Воронежский государственный университет

Поступило 26 VI 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Г. Малкин, Некоторые задачи нелинейной теории колебаний, М., 1956. [2] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., 1955. [3] М. А. Красносельский, ДАН, 150, № 3 (1963). [4] М. А. Красносельский, Топологические методы, 1956. [5] Е. А. Коддингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958. [6] Ю. И. Неймарк, Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, №№ 1, 3, 5, 6 (1958). [7] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, УМН, 15, № 3 (1960). [8] E. Schmidt, Math. Ann., 65 (1908). [9] П. П. Забрейко, М. А. Красносельский, Сибирск. матем. журн., 5, № 3 (1964). [10] Н. Г. Чеботарев, Теория алгебраических функций, М.— Л., 1948.