$$w^{(2)}(x, 0)=0, \quad x\in\overline{\Omega}, \tag{51}$$

$$w^{(2)}(x, t)=r(t)\mu(x, t), \quad (x, t)\in S_T. \tag{52}$$

Из строгого принципа максимума для задач (47)—(49) и (50)—(52) следует, что $w^{(1)}(x_0, t)\geqslant w^{(1)}_0>0$, $B\geqslant 0$.

Так как решение задачи (46) можно представить в виде сходящегося в $C([0, T])$ ряда

$$r(t)=\sum_{j=0}^{\infty} B^j g_0, \quad g_0(t)=w^1(x_0, t)/\chi(t), \tag{53}$$

из формулы (53) следует, что $r(t)\geqslant r_0>0$. Теорема 2 доказана.

Замечание. Вместо задачи с краевыми уравнениями (33) можно совершенно аналогично рассмотреть другие типы краевых условий.

Литература

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979.
2. Иванов В. К., Васин В. П., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М., 1978.
3. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М., 1980.
4. Безнощенко Н. Я., Прилепко А. И. // Проблемы математической физики и вычислительной математики. М., 1977. С. 51—62.
5. Безнощенко Н. Я. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 6. С. 1292—1295.
6. Бухгейм А. Л. // Докл. АН СССР. 1975. Т. 284, № 1. С. 21—24.
7. Исаков В. М. // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, № 4. С. 108—109.
8. Искендеров А. Д. // Докл. АН СССР. 1968. Т. 178, № 5. С. 999—1002.
9. Узлов А. Е. // Теоретико-функциональные и численные методы исследования физических процессов. М., 1983. С. 70—75.
10. Takashi Suzuki, Reiji Murayama // Proc. Japan Acad. Ser. A. 1980. Vol. 56, N 6. P. 259—263.
11. Lorenzi A. // Anal. Math. pure ed. appl. 1982. Vol. 131. P. 145—166.
12. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
13. Фридман А. Уравнения параболического типа. М., 1968.
14. Люстерник А. А., Соболев В. Н. Краткий курс функционального анализа. М., 1982.
15. Исаков В. М. // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263, № 6. С. 1296—1299.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию 3 июля 1986 г.

УДК 517.97

М. РАХИМОВ

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ КВАДРАТИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Рассматриваются управляемые объекты, состояния которых описываются абстрактной задачей Коши для линейного уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве, минимизируются квадратичные функционалы. Особенность рассматриваемых в статье задач оптимального управления заключается в том, что исходное уравнение управляемых объектов необязательно является самосопряженным, а минимизируемые функционалы не предполагаются строго выпуклыми. С помощью метода спектрального разложения для изучаемых задач доказано существование оптимальных управлений, получены явные формулы для них, исследованы вопросы управляемости, проведена регуляризация задачи управления с минимальной энергией, получены оценки скорости сходимости для приближенных решений.

2. Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство,

A — линейный оператор, действующий из H в H и имеющий в H плотную область определения $D(A)$; этими же свойствами обладает и сопряженный оператор A^*. Условимся обозначать: $(\cdot, \cdot)=(\cdot, \cdot)_H$, $\|\cdot\|=\|\cdot\|_H$.

Рассмотрим управляемые объекты, состояния которых описываются следующим уравнением с данными Коши:

$$u''(t)-A^2u(t)=p(t)+f(t),\ 0<t<T,\ u(0)=u_0,\ u'(t)=u_1. \quad (1)$$

Предположим, что заданные элементы u_0, $u_1 \in H$ такие, что $\forall p$, $f \in L_2 \equiv \equiv L_2(0, T; H)$ задача (1) имеет единственное решение $u \in C^1(0, T; H)$; $u(t) \in D(A)$, $\forall t \in [0, T]$, удовлетворяющее $\forall v \in C^1(0, T; H)$ $v(t) \in D(A^*)$, $\forall t \in [0, T]$ и $\forall t_1$, $t_2 \in [0, T]$ тождеству

$$(u'(t), v(t))\ \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} [(u', v')+(Au, A^*v)+(p+f, v)]dt.$$

Это предположение выполняется, например, [1, 2], если спектр формального оператора A^2 состоит из неотрицательных собственных значений (с. з.), а система собственных и присоединенных элементов его образует базис Рисса в H и $u_0 \in D(A)$.

Так как абстрактная задача Коши (1) имеет единственное решение, то, сведя уравнение (1) к системе уравнений и используя теории полугрупп операторов [3], легко установить, что существуют сильно непрерывные по $t>0$ операторы $G_1(t)$, $G_2(t) \in \mathscr{L}(H, H)$, такие, что решение задачи (1) можно представить в виде

$$\begin{gathered} u(t)=u_0(t)+\int_0^t G_1(t-\tau)[p(\tau)+f(\tau)]d\tau; \\ u'(t)=u_0'(t)+\int_0^t G_2(t-\tau)[p(\tau)+f(\tau)]d\tau, \end{gathered} \quad (2)$$

где $u_0(t)$ — решение задачи Коши для уравнения (1) без правой части. В дальнейшем всюду предполагается, что операторы $G_1(t)$, $G_2(t)$, $\forall t>0$ вполне непрерывны.

3. В настоящей работе изучаются несколько задач, каждая из которых для удобства изложения выделена отдельным номером.

Задача 1. Найти управление $p \in L_2$, такое, что вместе с соответствующим решением $u \in C^1(0, T; H)$ задачи Коши (1) доставляет минимум функционалу

$$J(p)=a\|u(T)-\psi_0\|^2+b\|u'(T)-\psi_1\|^2+\mu\int_0^T \|p(t)\|^2dt, \quad (3)$$

где заданные числа a и b неотрицательны и $a^2+b^2 \neq 0$, а число $\mu>0$. Здесь также заданы элементы ψ_0, $\psi_1 \in H$, $f \in L_2$.

Задача (1), (3) имеет единственное решение в L_2.

Решение задачи 1. Для получения условия оптимальности значения $u(t)$ и $u'(t)$ из (2) подставим в (3). Тогда, введя обозначения $v_1=-u_0(T)-Sf+\psi_0 \in H$, $v_2=-u_0'(T)-Tf+\psi_1 \in H$; $Sf=\int_0^T G_1(T-t)f(t)dt$, $Tf=\int_0^T G_2(T-t)f(t)dt$; $S, T \in \mathscr{L}(L_2, H)$, получим

$$\delta J(p)=2\int_0^T [a(G_1^*(T-t)Sp-G_1^*(T-t)v_1,\ \Delta p(t))+b(G_2^*(T-t)Tp-$$

$$-G_2^*(T-t)v_2,\ \Delta p(t))+\mu(p(t),\ \Delta p(t))]dt,$$

$$\delta^2 J(p)=a\|S\Delta p\|^2+b\|T\Delta p\|^2+\mu\int_0^T\|\Delta p(t)\|^2dt.$$

Введем функцию $F(t)=aG_1^*(T-t)v_1+bG_2^*(T-t)v_2$ и оператор $K(t)v=[aG_1^*(T-t)S+bG_2^*(T-t)T]v$, $\forall v\in L_2$. Тогда из необходимого условия экстремума, т. е. $\delta J(p)=0$, получим следующее уравнение:

$$\mu p(t)+K(t)p=F(t), \tag{4}$$

которому должно удовлетворять оптимальное управление.

Докажем, что уравнение (4) имеет единственное решение в L_2, при этом укажем способ построения оптимального управления. Отметим, что $F\in L_2$.

Лемма 1. *Оператор $K(t)\in\mathscr{L}(L_2,\ L_2)$ самосопряжен, неотрицателен и вполне непрерывен.*

Самосопряженность и неотрицательность оператора $K(t)$ в L_2 очевидны, а полная непрерывность $K(t)$ следует из компактности операторов $G_1(t)$ и $G_2(t)$ $\forall t>0$ в H.

В силу леммы 1 спектр оператора $K(t)$ дискретен и неотрицателен. Все с. з., кроме, быть может, нуля, имеют конечную кратность. Их можно расположить с учетом их кратности в порядке убывания: $\lambda_k\geqslant\lambda_{k+1}$, $\lambda_k\to 0$, $k\to\infty$. Соответствующие им собственные элементы (с. э.) $\varphi_k\in L_2$ можно выбрать так, чтобы $(\varphi_k,\ \varphi_l)_2=\delta_{kl}$, $\|\varphi_k\|_2=1$, $(\cdot,\ \cdot)_2=(\cdot,\ \cdot)_{L_2}$, $\|\cdot\|_2=\|\cdot\|_{L_2}$. Так как H сепарабельно, то и L_2 сепарабельно, следовательно, существует ортонормированный базис в L_2 из с. э. оператора $K(t)$. При этом $\forall v\in L_2$ справедливо разложение [4]:

$$v(t)=\sum_k (v,\ e_k)_2 e_k(t)+\sum_k (v,\ \varphi_k)_2\varphi_k(t),$$

где одна или обе суммы могут быть конечными или бесконечными, элемент $\sum\limits_k (v,\ e_k)_2 e_k\in N(K(t))$ — собственное подпространство пространства L_2, отвечающий $\lambda=0$, т. е. ядро оператора $K(t)$, $e_k(t)$ — ортонормированный базис в $N(K(t))$, $(e_k,\ \varphi_n)_2=0$, $k,\ n=1,\ 2,\ldots$

Разложим элементы $p(t)$, $F(t)$ в ряды по системе $\{e_k,\ \varphi_k\}$:

$$\begin{aligned} p(t)&=\sum_k p_{0k}e_k(t)+\sum_k p_k\varphi_k(t),\ p_{0k}=(p,\ e_k)_2,\ p_k=(p,\ \varphi_k)_2,\\ F(t)&=\sum_k F_{0k}e_k(t)+\sum_k F_k\varphi_k(t),\ F_{0k}=(F,\ e_k)_2,\ F_k=(F,\ \varphi_k)_2. \end{aligned}\tag{5}$$

Подставим значения $p(t)$ и $F(t)$ из (5) в (4). Тогда с учетом того, что $K(t)e_k=0$, $K(t)\varphi_k=\lambda_k\varphi_k(t)$, $\lambda_k>0$, $K(t)p=\sum\limits_k\lambda_k p_k\varphi_k(t)$, будем иметь $p_{0k}=\mu^{-1}F_{0k}$, $p_k=(\mu+\lambda_k)^{-1}F_k$; $\lambda_k>0$. В итоге решение уравнения (4) получим в виде

$$p(t)=\sum_k\mu^{-1}F_{0k}e_k(t)+\sum_k(\mu+\lambda_k)^{-1}F_k\varphi_k(t), \tag{6}$$

которое принадлежит пространству L_2. Очевидно, что решение уравнения единственно в L_2.

Теорема 1. *Задача 1 имеет единственное решение в L_2, это решение дается формулой (6).*

Задача 2. Найти управление $p\in L_2$, такое, чтобы соответствующее ему решение задачи Коши (1) доставляло минимальное значение функционалу (3) при $\mu=0$.

Вопрос о существовании решения задачи 2 требует специального рассмотрения. Справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы задача 2 или, что то же самое, уравнение*

$$K(t)p=F(t) \tag{7}$$

имели решение в L_2, *необходимо и достаточно, чтобы* $\sum_k \lambda_k^{-2}F_k^2<\infty$ *и либо* $N(K(t))=\{0\}$, *либо* $F_{0k}=(F, e_k)_2=0$ $\forall k$. *Если* $N(K(t))=\{0\}$, *то задача 2 имеет единственное решение* $p_*(t)=\sum_k \lambda_k^{-1}F_k\varphi_k(t)$. *Если же* $N(K(t))\neq\{0\}$, $F_{0k}=0$ $\forall k$, *то решение задачи 2 не единственно (бесконечно). Их можно представить в виде*

$$p(t)=\sum_k c_k e_k(t)+\sum_k \lambda_k^{-1}F_k\varphi_k(t) \quad \forall c_k=\text{const}, \ \sum_k c_k^2<\infty.$$

Задача 3. Задачу 2 решить при условии $\|p\|_2\leqslant R<\infty$.

Решение задачи 3. Функционал (3) при $\mu=0$ не является сильно выпуклым. Поэтому в общем случае нельзя утверждать о единственности решения задачи 3. Существование решения этой задачи вытекает из общих теорем (см. например, [5]).

Так как множество тех управлений p, для которых справедливо неравенство $\|p\|_2\leqslant R$, образует выпуклое множество, то, согласно методу Лагранжа [5], существует неотрицательное число $\lambda\geqslant 0$, такое, что решение $p_0(t)$ задачи 3 доставляет минимум функционалу

$$a\|u(T)-\psi_0\|^2+b\|u'(T)-\psi_1\|^2+\lambda\left(\int_0^T\|p(t)\|^2dt-R^2\right); \ a^2+b^2\neq 0; \ a, \ b\geqslant 0$$

и выполняется равенство $\lambda(\|p_0\|_2-R)=0$. Следовательно, задача 3 сводится к следующему: найти решение системы уравнений

$$\lambda p(t)+K(t)p=F(t), \ \lambda(\|p\|_2-R)=0. \tag{8}$$

В теореме 2 установлена точка $p_*(t)$ глобального минимума функционала (3) при $\mu=0$ (случай, когда $R=\infty$). Используя это решение $p_*(t)$ задачи 2, получим следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполнено неравенство* $\sum_k \lambda_k^{-2}F_k^2\leqslant R^2$. *Тогда* $\lambda=0$, *и для того чтобы задача 3 имела решение, необходимо и достаточно, чтобы либо* $N(K(t))=\{0\}$, *либо* $F_{0k}=0$ $\forall k$. *Если* $N(K(t))=\{0\}$, *то задача 3 имеет единственное решение*

$$p(t)=p_*(t)=\sum_k \lambda_k^{-1}F_k\varphi_k(t). \tag{9}$$

Если же $N(K(t))\neq\{0\}$ *и* $F_{0k}=0$ $\forall k$, *то при* $\sum_k \lambda_k^{-2}F_k^2=R^2$ *решение задачи 3 единственно и оно дается формулой (9); при* $\sum_k \lambda_k^{-2}F_k^2<R^2$ *решение задачи 3 не единственно (бесконечно), их можно представить в виде* $\forall c_k=\text{const}$,

$$p(t)=\sum_k c_k e_k(t)+\sum_k \lambda_k^{-1}F_k\varphi_k(t); \ \sum_k c_k^2+\sum_k \lambda_k^{-2}F_k^2\leqslant R^2.$$

Если $\sum_k \lambda_k^{-2}F_k^2>R^2$ (т. е. $\|p_*\|_2>R$), то, согласно теоремам 2 и 3, величина $\lambda>0$. Следовательно, первое уравнение из (8) должно решаться при условии $\|p\|_2=R$. Учитывая это, исключим λ из уравнения (8). Тогда получим следующее нелинейное уравнение:

$$p=\Lambda p\equiv d^{-1}(p)[F(t)-K(t)p], \ d(p)=R^{-1}\|F-Kp\|_2, \ \sum_k \lambda_k^{-2}F_k^2>R^2. \tag{10}$$

Лемма 2. *Оператор* Λ *из (10) вполне непрерывен в* L_2, *для него справедливо равенство* $\|\Lambda v\|_2 = R \quad \forall v \in L_2$.

Доказательство. Покажем, что Λ в L_2 непрерывен. Пусть v_0 и v — произвольные точки L_2, такие, что $\|v - v_0\|_2 \to 0$. Тогда требуется доказать, что $\|\Lambda v - \Lambda v_0\|_2 \to 0$. Так как

$$\|\Lambda v - \Lambda v_0\|_2 = d^{-1}(v)\,|1 - d(v)d^{-1}(v_0)|\,\|F - K(v - v_0) - Kv_0\|_2 + \\ + d(v)d^{-1}(v_0)\|K(v - v_0)\|_2, \tag{11}$$

то задача сводится к доказательству непрерывности функционала $d(v)$ в произвольной точке $v_0 \in L_2$. Непрерывность $d(v)$ вытекает из непрерывности нормы в L_2.

Оператор Λ компактен в L_2, т. е. любое ограниченное множество из L_2 переводит в компактное множество. Действительнно, пусть $M = \{v_n : \|v_n\|_2 \leqslant N\}$ — произвольное ограниченное множество в L_2. Так как L_2 сепарабельно, то [4] из M можно извлечь подпоследовательность $\{v_{n_k}\} \in M$, которая слабо сходится в L_2 к некоторому пределу $v_n \in L_2$. В силу леммы 1 будем иметь $d(v_{n_k}) \to d(v_n)$. Следовательно, из оценки (11) получим: $\|\Lambda v_{n_k} - \Lambda v_n\|_2 \to 0$, $k \to \infty$.

Равенство $\|\Lambda v\|_2 = R \quad \forall v \in L_2$ очевидно. Лемма 2 доказана.

Согласно лемме 2 и принципу Шаудера [4], придем к следующему заключению.

Теорема 4. *Уравнение (10) или, что то же самое, задача (3) при* $\sum_k \lambda_k^{-2} F_k^2 > R^2$ *имеет решение в* L_2, *удовлетворяющее условию* $\|p\|_2 = R$.

Ниже в п. 6 изложен метод приближенного решения уравнения (10).

При дополнительном ограничении на исходные функции можно доказать единственность решения уравнения (10). Действительно, пусть выполнено условие

$$d(v) \geqslant \omega > 0 \quad \forall v \in \{v : \|v\|_2 = R\}, \ 0 < 2\mu_1\omega^{-1} < 1. \tag{12}$$

Тогда, обозначая через p_1 и p_2 два произвольных решения уравнения (10), будем иметь оценку $\|p_1 - p_2\|_2 = \|\Lambda p_1 - \Lambda p_2\|_2 \leqslant 2\mu_1\omega^{-1}\|p_1 - p_2\|_2$, что приводит к тому, что $p_1 = p_2$. Следовательно, справедлива

Теорема 5. *Пусть* $\sum_k \lambda_k^{-2} F_k^2 > R^2$ *и выполнено условие (12). Тогда задача 3 имеет единственное решение в* L_2, *удовлетворяющее условию* $\|p\|_2 = R$.

Замечание. Условие (12) можно заменить следующей более грубой оценкой $0 < 2\mu_1 R(\|F\|_2 - \mu_1 R)^{-1} < 1$.

В следующем пункте рассматриваются задачи, связанные с переводом системы из начального состояния (1) в некоторую окрестность заданного конечного состояния $u(T) = \psi_0 \in H$, $u'(T) = \psi_1 \in H$.

4. Задача 4. Найти управление $p \in L_2$ с минимальной нормой, реализующее минимум терминальному функционалу $J_1(p) = a\|u(T) - \psi_0\|^2 + b\|u'(T) - \psi_1\|^2$; $a^2 + b^2 \neq 0$; $a, b \geqslant 0$.

Решение задачи 4 дается следующей теоремой (см. теорему 2).

Теорема 6. *Пусть* $\sum_k \lambda_k^{-2} F_k^2 < \infty$ *и* $F_{0k} = 0 \quad \forall k$. *Тогда существует единственное решение задачи 4, представленное формулой*

$$p_0(t) = p_*(t) = \sum_k \lambda_k^{-1} F_k \varphi_k(t). \tag{13}$$

В следующем п. 5 будет показано, что решение $p_0(t)$ из (13) задачи 4 может быть найдено методом регуляризации.

Задача 5. Найти управление $p \in L_2$ с минимальной нормой, реализующее одновременно минимумы двух функционалов

$$J_2(p) = \|u(T) - \psi_0\|^2, \ J_3(p) = \|u'(T) - \psi_1\|^2.$$

Решение задачи 5. Обозначим $K_1(t) = K(t)\big|_{b=0}^{a=1}$, $K_2(t) =$

$=K(t)\,|_{b=1}^{a=0}$, $q(t)=F(t)\,|_{b=0}^{a=1}$, $r(t)=F(t)\,|_{b=1}^{a=0}$. Минимизируя каждый из функционалов $J_2(p)$ и $J_3(p)$ отдельно, получим два уравнения относительно одного $p\in L_2$:

$$K_1(t)p=q(t),\quad K_2(t)p=r(t). \tag{14}$$

Установим следующие вспомогательные утверждения. С помощью операторов S, T и элементов v_1, v_2 определенные в п. 3 функционалы $J_2(p)$ и $J_3(p)$ запишем в виде $J_2(p)=\|Sp-v_1\|^2$, $J_3(p)=\|Tp-v_2\|^2$.

Заметим, что S, $T\in\mathscr{L}(L_2, H)$; $S^*=G_1^*(T-t)$, $T^*=G_2^*(T-t)$; S^*, $T^*\in\mathscr{L}(H, L_2)$.

Введем пространство $\mathscr{L}_2=L_2\oplus L_2$. Рассмотрим в $\mathscr{L}_2$ оператор $E=\begin{pmatrix} K_1(t) & 0 \\ 0 & K_2(t)\end{pmatrix}$. Заметим, что оператор $E\in\mathscr{L}(\mathscr{L}_2, \mathscr{L}_2)$ самосопряжен, неотрицателен и вполне непрерывен. Следовательно, существует с. з. $\rho_k^2\geqslant\rho_{k+1}^2$, $\rho_k>0$, $\rho_k\to 0$, $k\to\infty$, и ортогональный базис в $\mathscr{L}_2$ из с. э. оператора E. Обозначим этот базис через $\{\eta_k(t), \varphi_k(t)\}$, $\eta_k(t)\in N(E)$. При этом векторы $\eta_k=\{\eta_{1k}, \eta_{2k}\}$, $\varphi_k=\{\varphi_{1k}, \varphi_{2k}\}$ выберем так, чтобы каждая из систем $\{\eta_{1k}, \varphi_{1k}\}$ и $\{\eta_{2k}, \varphi_{2k}\}$ составляла ортонормированный базис в L_2.

Введем также пространство $\Omega=H\oplus H$ и оператор $D=\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2\end{pmatrix}$, $V_1=SG_1^*(T-t)$, $V_2=TG_2^*(T-t)\in\mathscr{L}(H, H)$, в Ω. Оператор $D\in\mathscr{L}(\Omega, \Omega)$ также самосопряжен, неотрицателен и вполне непрерывен. Обозначим через $\{\xi_k, \psi_k\}$, $\{\xi_k\}\in N(D)$ систему с. э. (базис) оператора D в Ω, при этом $\xi_k=\{\xi_{1k}, \xi_{2k}\}$, $\psi_k=\{\psi_{1k}, \psi_{2k}\}$, $(\xi_{hk}, \xi_{\nu n})=(\psi_{hk}, \psi_{\nu n})=\delta_{h\nu}^{kn}$, $(\xi_{hk}, \psi_{\nu n})=0$ $\forall k, n$; $h, \nu=1, 2$, где $\delta_{h\nu}^{kn}$ — символ Кронекера.

Отметим, что $N(E)=N(K_1(t))\oplus N(K_2(t))$, $N(D)=N(V_1)\oplus N(V_2)$. Следовательно, $\eta_{hk}\in N(K_h(t))$, $\xi_{hk}\in N(V_h)$, $h=1, 2$. Кроме того, из этих соотношений вытекает, что $S\eta_{1h}=T\eta_{2k}=G_1^*(T-t)\xi_{1k}=G_2^*(T-t)\xi_{2k}=0$ $\forall k$. Действительно, например, из равенства $V_1\xi_{1k}=0$ получим

$$(V_1\xi_{1k}, \xi_{1k})=\int_0^T (G_1^*(T-t)\xi_{1k},\ G_1^*(T-t)\xi_{1k})\,dt=0,$$

что равносильно $G_1^*(T-t)\xi_{1k}=0$ $\forall k$, $\forall t\in[0, T]$.

С. з. операторов E и D совпадают. Кроме того, справедливы тождества: $G_1^*(T-t)\psi_{1k}=\rho_k\varphi_{1k}(t)$, $S\varphi_{1k}=\rho_k\psi_{1k}$, $G_2^*(T-t)\psi_{2k}=\rho_k\varphi_{2k}(t)$, $T\varphi_{2k}=\rho_k\psi_{2k}$.

С помощью установленных выше фактов нетрудно убедиться, что для каждого из уравнений (14) справедлива теорема 2 (с соответствующими изменениями). Тем не менее для решения задачи 4 целесообразно использовать следующие разложения:

$$\begin{gathered} p(t)=\sum_k p_{1k}\eta_{1k}(t)+\sum_k p_{2k}\varphi_{1k}(t),\ p(t)=\sum_k p_{3k}\eta_{2k}(t)+\sum_k p_{4k}\varphi_{2k}(t), \\ v_1=\sum_k a_k\xi_{1k}+\sum_k b_k\psi_{1k},\quad v_2=\sum_k c_k\xi_{2k}+\sum_k d_k\psi_{2k} \end{gathered} \tag{15}$$

и привести функционалы $J_2(p)$ и $J_3(p)$ к видам

$$J_2(p)=\sum_k(\rho_k p_{2k}-b_k)^2+\sum a_k^2,\quad J_3(p)=\sum_k(\rho_k p_{4k}-d_k)^2+\sum_k c_k^2.$$

Очевидно, что наименьшие значения функционалов J_2 и J_3 достигаются на тех управлениях, для которых $p_{2k}=\rho_k^{-1}b_k$, $p_{4k}=\rho_k^{-1}d_k$, а координаты p_{1k} и p_{3k} произвольны.

Таким образом, получаем, что управления $p^*(t)=\sum_k p_{1k}\eta_{1k}(t)+\sum_k\rho_k^{-1}b_k\varphi_{1k}(t)$, $p^*(t)=\sum_k p_{3k}\eta_{2k}(t)+\sum_k\rho_k^{-1}d_k\varphi_{2k}(t)$ соответственно реализуют минимум функционалов J_2, J_3. Координаты p_{1k} и p_{3k} необходимо выбрать из условия

$$\|\sum_k p_{1k}\eta_{1k}-\sum_k p_{3k}\eta_{2k}+\sum_k \rho_k^{-1}(b_k\varphi_{1k}-d_k\varphi_{2k})\|_2=0,$$
$$\sum_k \rho_k^{-2}(b_k^2+d_k^2)<\infty,\quad \sum_k p_{1k}^2+\sum_k p_{3k}^2<\infty. \tag{16}$$

Заметим, что если, кроме условия (16), выполнены равенства $a_k=c_k=0$ $\forall k$ (см. (15), то $J_2(p^*)=J_3(p^*)=0$. Это означает, что система (1) в этом случае «точно» управляема, т. е. выполняются точные равенства $u(T)=\psi_0$, $u'(T)=\psi_1$.

Теорема 7. *Пусть $p_{1k}=p_{3k}=0$ $\forall k$ и выполнены условия (16). Тогда единственное решение задачи 5 имеет вид*

$$p^*(t)=\sum_k \rho_k^{-1}b_k\varphi_{1k}(t)=\sum_k \rho_k^{-1}d_k\varphi_{2k}(t);\quad \sum_k \rho_k^{-2}b_k^2=\sum_k \rho_k^{-2}d_k^2.$$

Отметим, что если, кроме условий теоремы 7, выполнены равенства $a_k=c_k=0$ $\forall k$, то управление $p^*(t)$, определенное согласно теореме 7, определяет решение задачи управления с минимальной энергией, решенной впервые в [6] для систем с конечными степенями свободы (см. также [7]).

5. Как известно [5, 8], решение задачи 4 не обладает свойством устойчивости относительно малых возмущений исходных данных и для ее решения нужно применять метод регуляризации. Рассмотрим этот метод сначала для случая, когда исходные данные в задаче 4 известны точно.

Введем функционал Тихонова:

$$T_\alpha(p)=\alpha\|p\|_2^2+J_1(p),\quad \alpha>0;\quad J_1(p)=a\|u(T)-\psi_0\|^2+b\|u'(T)-\psi_1\|^2. \tag{17}$$

Задача оптимального управления (1), (17) $\forall\alpha>0$ имеет единственное (устойчивое) решение в L_2. Более того, в данном случае можно построить явное решение этой задачи, выражающее как программное, так и синтезирующее оптимальное управление. Выясним, насколько близки решения задачи 4 и задачи (1), (17), предполагая, что выполнены условия теоремы 6. Отметим, что условие $F_{0k}=0$ $\forall k$ из теоремы 7 эквивалентно нормальной разрешимости уравнения (7) (см. [9]). При этом условии решение задачи (1), (17) имеет вид

$$p_\alpha(t)=\sum_k \frac{F_k}{\alpha+\lambda_k}\varphi_k(t). \tag{18}$$

Тогда из формул (13) и (18) будем иметь

$$\|p_\alpha-p_0\|_2^2=\sum_k \frac{\alpha^2F_k^2}{(\alpha+\lambda_k)^2\lambda_k^2}\leqslant\sum_k \lambda_k^{-2}F_k^2<\infty. \tag{19}$$

Так как ряд справа в неравенстве (19) сходится равномерно относительно α, то возможен предельный переход под знаком суммы. Следовательно, $\|p_\alpha-p_0\|_2\to 0$, $\alpha\to 0$.

Представим оценку (19) в более обозримой форме, сделав некоторые дополнительные предположения. Предположим, что $\sum_k \lambda_k^{-3}F_k^2<\infty$. Тогда в силу неравенства $\lambda_k^{-2}\leqslant(\alpha+\lambda_k)^{-2}+2\alpha\lambda_k^{-3}$ справедлива следующая оценка

$$\|p_\alpha\|_2^2\leqslant\|p_0\|_2^2\leqslant\|p_\alpha\|_2^2+2\alpha\eta^2,\quad \eta^2=\sum_k \lambda_k^{-3}F_k^2. \tag{20}$$

Так как $T_\alpha(p_\alpha) \leqslant T_\alpha(p_0)$, то, принимая во внимание (20), получаем отсюда, что

$$\|Sp_\alpha - v_1\|^2 + \|Tp_\alpha - v_2\|^2 \leqslant \|Sp_0 - v_1\|^2 + \|Tp_0 - v_2\|^2 + 2\alpha^2\eta^2. \qquad (21)$$

Более того, если $\sum\limits_k \lambda_k^{-4} F_k^2 < \infty$, то находим

$$\|p_\alpha - p_0\|_2^2 \leqslant \alpha\gamma, \quad \gamma^2 = \sum_k \lambda_k^{-4} F_k^2 < \infty. \qquad (22)$$

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда справедлива оценка (19) и предел* $\lim\limits_{\alpha \to 0} p_\alpha(t) = p_0(t)$ *в* L_2. *Дополнительно, если* $\sum\limits_k \lambda_k^{-3} F_k^2 < \infty$, *то справедливы также оценки (20), (21). Более того, если* $\sum\limits_k \lambda_k^{-4} F_k^2 < \infty$, *то, кроме (19)—(21), справедлива также (22).*

Отметим, что с учетом неравенства $T_\alpha(p_\alpha) \leqslant T_\alpha(0)$ и уравнения Эйлера для $T_\alpha(p)$ легко убедиться в правомерности следующей оценки:

$$\|p_\alpha\|_2 \leqslant \|(\alpha J + K(\cdot))^{-1} F(\cdot, v)\|_2 \leqslant \alpha^{-1/2} \|v\|_\Omega$$
$$\forall F(t, v) \equiv F(t), \quad v = \{v_1, v_2\} \in \Omega, \qquad (23)$$

для любого ограниченного самосопряженного и неотрицательного оператора $K(t) \in \mathscr{L}(L_2, L_2)$ и при любом элементе $v \in \Omega$.

С практической точки зрения представляет интерес анализ случая, когда операторы $G_1(T-t)$, $G_2(T-t)$ и элементы v_1, v_2 в функционале $J_1(p)$ задаются приближенно и вместо них известны возмущенные операторы $\tilde{G}_1(t)$, $\tilde{G}_2(t)$ и элементы $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2$. Предположим, что

$$\|S - \tilde{S}\|_{\mathscr{L}(L_2, H)} \leqslant \varepsilon_S, \quad \|T - \tilde{T}\|_{\mathscr{L}(L_2, H)} \leqslant \varepsilon_T, \quad \|v_1 - \tilde{v}_1\| \leqslant \varepsilon_1,$$
$$\|v_2 - \tilde{v}_2\| \leqslant \varepsilon_2, \quad \tilde{S}p = \int_0^T \tilde{G}_1(t) p(t)\, dt, \quad \tilde{T}p = \int_0^T \tilde{G}_2(t) p(t)\, dt. \qquad (24)$$

Тогда вместо точного функционала $T_\alpha(p)$ будем иметь его приближение

$$\tilde{T}_\alpha(p) = \alpha \|p\|_2^2 + a\|\tilde{S}p - \tilde{v}_1\|^2 + b\|\tilde{T}p - \tilde{v}_2\|^2.$$

Условие минимума функционала $\tilde{T}_\alpha(p)$ приводит к уравнению

$$\alpha \tilde{p}_\alpha + \tilde{K}(t) \tilde{p}_\alpha = \tilde{F}(t), \qquad (25)$$

где оператор $\tilde{K}(t)$ и элемент $\tilde{F}(t)$ определяются по тем же формулам, что и выше (см. п. 3, уравнение (4)), с разницей лишь в том, что в них операторы $G_1(T-t)$, $G_2(T-t)$ и элементы v_1, v_2 заменены соответствующими возмущениями их. Так как оператор $\alpha J + \tilde{K}(t)$ $\forall \alpha > 0$ положительно определен в L_2, то уравнение (25) имеет единственное решение в L_2.

Заметим, что $(\alpha J + \tilde{K}(t))(\tilde{p}_\alpha - p_\alpha) \equiv [G_1(T-t) - \tilde{G}_1(t)]^* (Sp_\alpha - v_1) + [G_2(T-t) - \tilde{G}_2(t)]^* (Tp_\alpha - v_2) - F(t, v)$, $v = \{v_1, v_2\} \in \Omega$, $v_1 = (S - \tilde{S}) p_\alpha + (\tilde{v}_1 - v_1)$, $v_2 = (T - \tilde{T}) p_\alpha + (\tilde{v}_2 - v_2)$. Оператор $\alpha J + \tilde{K}(t)$ самосопряжен. Для произвольного самосопряженного ограниченного оператора B равномерная норма совпадает с величиной $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |(Bx, x)|$, т. е. $\|B\|_{\mathscr{L}} = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |(Bx, x)|$.

Следовательно, в силу неотрицательности оператора $\tilde{K}(t)$, получим $\|\alpha J + \tilde{K}(\cdot)\|_{\mathscr{L}} \leqslant \alpha$, что приводит к заключению, что $\|\alpha J + K(\cdot)\|_{\mathscr{L}}^{-1} \leqslant \alpha^{-1}$.

Далее, учитывая оценки (21) и (24), будем иметь

$$\|(\alpha J + K(\cdot))^{-1} \{[G_1(T-t) - \tilde{G}_1(t)]^* (Sp_\alpha - v_1) + [G_2(T-t) - \tilde{G}_2(t)]^* \times$$

$$\times(Tp_\alpha - v_2)\}\|_2 \leqslant \alpha^{-1}\varepsilon_3[\|SP_0 - v_1\|^2 + \|Tp_0 - v_2\|^2 + 2\alpha^2\eta^2]^{1/2},$$
$$\varepsilon_3 = \max(\varepsilon_S, \varepsilon_T).$$

Используя формулы (20), (23) и (24), находим

$$\|(\alpha J + \tilde{K}(\cdot))^{-1}F(\cdot, v)\|_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\|v\|_\Omega \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha}}[(\varepsilon_S + \varepsilon_T)\|p_0\|_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2].$$

В итоге получим

$$\|\tilde{p}_\alpha - p_\alpha\|_2 \leqslant \alpha^{-1}\varepsilon_3[\|Sp_0 - v_1\|^2 + \|Tp_0 - v_2\|^2 + 2\alpha^2\eta^2]^{1/2} +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\alpha}}[(\varepsilon_S + \varepsilon_T)\|p_0\|_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2].$$

Отсюда и из оценки (22) получим полную погрешность решения $\tilde{p}_\alpha(t)$:

$$\|\tilde{p}_\alpha - p_0\|_2 \leqslant \|p_\alpha - p_0\|_2 + \|p_\alpha - \tilde{p}_\alpha\|_2 \leqslant \alpha\gamma + \alpha^{-1}\varepsilon_3[\|Sp_0 - v_1\|^2 +$$
$$+ \|Tp_0 - v_2\|^2 + 2\alpha^2\eta^2]^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}[(\varepsilon_S + \varepsilon_T)\|p_0\|_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2] \equiv f. \quad (26)$$

Из оценки (26) видно, что если $\alpha^{-1}\varepsilon_3 + \alpha^{-1/2}(\varepsilon_S + \varepsilon_T + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \to 0$, $\alpha \to 0$, то $\|\tilde{p}_\alpha - p_0\|_2 \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Предположим, что $\varepsilon = \max(\varepsilon_S + \varepsilon_T, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ достаточно мало. Тогда если система «точно» управляема, т. е. при управлении $p_0(t)$ из (13) выполнены точные равенства $u(T) = \psi_0 \in H$, $u'(T) = \psi_1 \in H$ (см. п. 4), то $Sp_0 - v_1 = Tp_0 - v_2 = 0$. В этом случае f в правой части (26) есть функция порядка $\varepsilon^{2/3}$. Если точное попадание в точку $\{\psi_0, \psi_1\} \in \Omega$ невозможно, а возможно лишь попадание в некоторую окрестность точки $\{\psi_0, \psi_1\} \in \Omega$, т. е. система (1) «локально» управляема, то $Sp_0 - v_1 \neq 0$, $Tp_0 - v_2 \neq 0$, следовательно, f есть функция вида $\alpha + \varepsilon/\sqrt{\alpha} + \varepsilon/\alpha$. При $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$ она принимает значение порядка $\sqrt{\varepsilon}$.

Теорема 9. *Пусть* $\sum\limits_k \lambda_k^{-4} F_k^2 < \infty$, $F_{0k} = 0$ $\forall k$ *и выполнены оценки (24). Тогда справедлива оценка (26). При этом если входные данные заданы с точностью* $\varepsilon = \max(\varepsilon_S + \varepsilon_T, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ *(см. (24)), то решение задачи 4 может быть определено с точностью порядка* $\varepsilon^{2/3}$ *в случае точной управляемости системы (1) и с точностью* $\sqrt{\varepsilon}$ *при локальной управляемости ее.*

Отметим, что изложенный здесь метод спектрального разложения был предложен В. К. Ивановым (см. библиографию [8]) для нахождения квазирешения одного операторного уравнения вида $Kx = F$, $N(K) = \{0\}$. В. В. Воеводиным [10] этот метод был применен к исследованию алгебраических систем уравнений без предположения, что $N(K) = \{0\}$. Заметим, что специфические трудности рассмотрения задач управлений для уравнения (1) в настоящей работе привели к тому, что для установления оценок (20)—(22), (26), аналогичных соответствующим результатам из [10], метод спектрального разложения был применен для решения уравнения Эйлера тогда, когда в указанных выше работах этот метод удавалось применять непосредственно к исследуемому уравнению.

В заключение этого пункта отметим, что при регуляризации задачи 5 с минимизируемыми одновременно двумя функционалами $J_2(p)$ и $J_3(p)$ целесообразно для одного из $J_2(p)$ и $J_3(p)$ составить функционал Тихонова и, соблюдая условия теоремы 7, установить оценки, аналогичные (19)—(22), (26). При этом отметим, что в этой задаче удобно использовать разложения (15).

6. Займемся вопросами построения приближенного решения уравнения (10). Предположим, что положительные с.з. оператора $K(t)$ такие,

что $\lambda_k \to 0$, $k \to \infty$. Тогда, согласно теореме Гильберта — Шмидта [4], для оператора $K(t)$ справедливо разложение

$$K(t)v = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (v, \varphi_k)_2 \varphi_k(t) \quad \forall v \in L_2, \quad \lambda_k > 0 \quad \forall k. \tag{27}$$

При этом ряд (27) сходится в норме пространства $\mathscr{L}(L_2, L_2)$. Положим

$$K_N(t)v = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k (v, \varphi_k)_2 \varphi_k(t) \quad \forall v \in L_2; \quad F_N(t) = F_0(t) + \sum_{k=1}^{N} F_k^N \varphi_k(t),$$

$$N = 1, 2, \ldots, \quad F_k^N = (F_N, \varphi_k)_2, \quad F_0 \in N(K(t)), \quad F(t) = F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k \varphi_k(t),$$

$$F_k = (F, \varphi_k)_2, \quad \|F_N - F\|_2 \xrightarrow{N \to \infty} 0.$$

Тогда получим оценку

$$\|K_N(\cdot) - K(\cdot)\|_{\mathscr{L}(L_2, L_2)} = \sup_{\|v\|=1} \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k (v, \varphi_k)_2 \varphi_k \right\|_2 \leqslant \lambda_{N+1} \xrightarrow{N \to \infty} 0.$$

Построим последовательность нелинейных операторных уравнений

$$p_N(t) = d_N^{-1} [F_N(t) - K_N(t) p_N], \quad d_N = R^{-1} \|F_N - K_N p_N\|_2;$$

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{-2} F_k^{2N} > R^2; \quad N = 1, 2, \ldots \tag{28}$$

Аналогично тому, как это делалось в доказательстве теоремы 4, можно показать, что уравнение (28) $\forall N = 1, 2, \ldots$ имеет решение $p_N \in L_2$, такое, что $\|p_N\| = R \quad \forall N = 1, 2, \ldots$

Введем обозначение: $a_k^N = (p_N, \varphi_k)_2$, $k = \overline{1, N}$; $N = 1, 2, \ldots$ Преобразуем выражение для d_N:

$$d_N^2 = R^{-2} \left[\|F_N\|_2^2 - 2 \sum_{k=1}^{N} \lambda_k F_k^N a_k^N + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2 a_k^{2N} \right]. \tag{29}$$

Умножая скалярно в L_2 обе части уравнения (28) на $\varphi_k(t)$, получим $a_k^N = (d_N + \lambda_k)^{-1} F_k^N$. Подставим найденное значение a_k^N в (29). Тогда относительно d_N получим следующее алгебраическое уравнение:

$$R^2 d_N^2 = \|F_0\|_2^2 + \sum_{k=1}^{N} d_N^2 (d_N + \lambda_k)^{-2} F_k^{2N}, \quad \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{-2} F_k^{2N} > R^2, \quad N = 1, 2, \ldots \tag{30}$$

Поступая аналогичным образом с уравнением (10), получим уравнение

$$R^2 d^2 = \|F_0\|_2^2 + \sum_{k=1}^{\infty} d^2 (d + \lambda_k)^{-2} F_k^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} F_k^2 > R^2, \quad d = R^{-1} \|F - Kp\|_2. \tag{31}$$

Лемма 3. *Каждое из уравнений (30) и (31) имеет единственный положительный корень d_N и d соответственно, при этом $d_N \to d = R^{-1} \|F - Kp\|_2$, $N \to \infty$, где p — решение уравнения (10).*

Доказательство. Введем следующие две функции:

$$y = R^2 d_N^2 - \|F_0\|_2^2, \quad y = \sum_{k=1}^{N} d_N^2 (d_N^2 + \lambda_k)^{-2} F_k^{2N}, \quad \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{-2} F_k^{2N} > R^2. \tag{32}$$

Графики функций (32) пересекаются в одной точке с положительной ординатой, что является положительным корнем уравнения (30).

Аналогично показывается существование и единственность положительного корня уравнения (31).

Так как $\forall N=1, 2, \ldots$ решение уравнения (28) существует и $\|p_N\|_2^2=\|p_0\|_2^2+\sum_{k=1}^{N} a_k^{2N}=R^2$ $\forall N=1, 2, \ldots,$ $p_0 \in N(K(t))$, то $\sum_{k=1}^{N} a_k^{2N} \to a \leqslant \leqslant R^2$, $N \to \infty$. Кроме того, $\sum_{k=1}^{N} F_k^{2N}$ сходится при $N \to \infty$. Следовательно, учитывая равенства

$$R^2 d_N^2=\|F_0\|_2^2+\sum_{k=1}^{N} (F_k^N-\lambda_k a_k^N)^2 \quad \forall N=1, 2, \ldots,$$

получим, что $d_N \to d$, $N \to \infty$. Далее, нетрудно заметить, что ряд справа в равенствах (30) сходится равномерно относительно d_N. Тогда, переходя в (30) к пределу при $N \to \infty$, $d_N \to d$, из уравнения (30), получим (31).

Опишем схему вычислений $p_N \in L_2$: 1) находим положительный корень d_N уравнения (30); 2) вычислим величину $a_k^N=(d_N+\lambda_k)^{-1}F_k^N$; 3) подставим значения a_k^N, $k=\overline{1, N}$, в формулу $p_N(t)=d_N^{-1}[F_N(t)- - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k a_k^N \varphi_k(t)]$, в результате получим приближенное оптимальное управление $\forall N=1, 2, \ldots$

Теорема 10. *Пусть p, $p_N \in L_2$ являются решениями уравнений (10), (28) соответственно. Тогда справедлива оценка*

$$\|p_N-p\|_2^2 \leqslant \left[\|F_0\|_2^2+2\sum_{k=1}^{N} F_k^{2N}\right]\left(\frac{d_N-d}{d_N d}\right)^2+$$
$$+2d^{-2}\sum_{k=1}^{N} (F_k^N-F_k)^2+d^{-2}\sum_{k=N+1}^{\infty} F_k^2.$$

Доказательство. Из уравнений (10) и (28) легко находим, что

$$p_N(t)=d_N^{-1}F_0(t)+\sum_{k=1}^{N} (d_N+\lambda_k)^{-1}F_k^N \varphi_k(t),$$
$$p(t)=d^{-1}F_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty} (d+\lambda_k)^{-1}F_k \varphi_k(t).$$

Следовательно,

$$\|p_N-p\|_2^2=\|F_0\|_2^2\,(d_N^{-1}-d^{-1})^2+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{F_k^N}{d_N+\lambda_k}-\frac{F_k}{d+\lambda_k}\right)^2+$$
$$+\sum_{k=N+1}^{\infty} (d+\lambda_k)^{-2}F_k^2.$$

Отсюда с учетом неравенства

$$\left(\frac{F_k^N}{d_N+\lambda_k}-\frac{F_k}{d+\lambda_k}\right)^2 \leqslant 2\left(\frac{d_N-d}{d_N d}\right)^2 F_k^{2N}+2d^{-2}(F_k^N-F_k)^2,$$

получим утверждение теоремы 10.

Замечание. Если в уравнениях (30) и (31) величина $\|F_0\|_2>0$, то эти уравнения положителные корни имеют без предположений, что

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{-2} F_k^{\,N} > R^2, \quad N=1, 2, \ldots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} F_k^2 > R^2.$$

Если $\|F_0\|_2=0$, то эти условия являются необходимыми и достаточными для существования положительных корней уравнений (30), (31) соответственно. Кроме того, отметим, что если $\|F-Kp\|_2 \geqslant \omega > 0$ $\forall p \in \{p: \|p\|_2 = R\}$ или $\|F\|_2 - \lambda_1 R > 0$, то в теореме (10) величину d^{-2} можно заменить на $\omega^{-2} R$ или $R(\|F\|_2 - \lambda_1 R)^{-1}$.

Пусть в задаче 3 вместо точного значения $J_1(p)$ функционала $J(p)$ при $\mu=0$ вычислено его приближенное значение $J_1^N(p_N)$ по формуле

$$J_1^N(p_N) = a\|S_N p_N - v_1^N\|^2 + b\|T_N p_N - v_2^N\|^2, \quad N=1, 2, \ldots,$$

где p, p_N — решения уравнений (10), (28) соответственно, а S_N, $T_N \in \mathscr{L}(L_2, H)$; v_1^N, $v_2^N \in H$, $N=1, 2, \ldots$, такие, что при $N \to \infty$ $\|S_N - S\|_{\mathscr{L}} \to 0$, $\|T_N - T\|_{\mathscr{L}} \to 0$, $\|v_1^N - v_1\| \to 0$, $\|v_2^N - v_2\| \to 0$. С учетом уравнений (10) и (28) выражения для $J_1(p)$ и $J_1^N(p_N)$ приведем к видам

$$J_1(p) = a\|v_1\|^2 + b\|v_2\|^2 + d^{-2}(a\|SF\|^2 + b\|TF\|^2) - 2(F, p)_2 -$$
$$-2d^{-2}(K^2F, p)_2 + d^{-2}(a\|SKp\|^2 + b\|TKp\|^2),$$
$$J_1^N(p_N) = a\|v_1^N\|^2 + b\|v_2^N\|^2 + d_N^{-2}(a\|S_N F_N\|^2 + b\|T_N F_N\|^2) - 2(F_N, p_N)_2 -$$
$$-2d_N^{-2}(K_N^2 F_N, p_N)_2 + d_N^{-2}(a\|S_N K_N p_N\|^2 + b\|T_N K_N p_N\|^2).$$

Тогда, учитывая, что $\|v_1^N\|^2 - \|v_1\|^2 = \|v_1^N - v_1\|^2 + 2(v_1^N - v_1, v_1)$, $d_N^{-2}(K_N^2 F_N, p_N) - d^{-2}(K^2F, p) = (dd_N)^{-2}[d^2(K_N^2 F_N, p_N - p) + (d^2 - d_N^2)(K_N^2 F_N, p) + d_N^2(K_N^2 F_N - K^2 F, p)]$; $d_N^{-2}\|S_N K_N p_N\|^2 - d^{-2}\|SKp\|^2 = (dd_N)^{-2}[d^2(S_N K_N \times (p_N - p) + (S_N K_N - SK)p, S_N K_N p_N + SKp) + \|SKp\|^2(d^2 - d_N^2)]$, ..., согласно лемме 3 и теореме 10 нетрудно установить, что $|J_1^N(p_N) - J_1(p)| \to 0$ при $N \to \infty$.

Автор выражает свою искреннюю признательность В. А. Ильину и Ф. П. Васильеву за полезные обсуждения результатов настоящей работы.

Литература

1. Ильин В. А. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1048—1053.
2. Рахимов М. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 1. С. 94—103.
3. Балакришнан А. В. Прикладной функциональный анализ. М., 1980.
4. Треногин В. А. Функциональный анализ. М., 1980.
5. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М., 1984.
6. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., 1968.
7. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М., 1978.
8. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1974.
9. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М., 1974.
10. Воеводин В. В. Линейная алгебра. М., 1974.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 3 июля 1986 г.