МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 9, № 2 (1971), 113—119

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ ЦИКЛИЧЕСКОМ НЕРАВЕНСТВЕ

В. Г. Дринфельд

Доказывается существование и приводится простой способ вычисления $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$, где

$$\gamma_n = \inf_{a_i>0} \left\{ \left[\frac{a_1}{a_2+a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2} \right] : \frac{n}{2} \right\}.$$

Библ. 4 назв.

§ 1. Введение. При $1 \leqslant n \leqslant b$ имеет место неравенство:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2} \geqslant \frac{n}{2}, \; a_i > 0. \quad (1)$$

В то же время Цулауф [4] показал, что уже при $n = 24$ это неравенство не всегда имеет место. В связи с этим возникает вопрос о поведении величины

$$\gamma_n = \inf_{a_i>0} \left\{ \left[\frac{a_1}{a_2+a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2} \right] : \frac{n}{2} \right\}. \quad (2)$$

Ранкин [2] доказал, что последовательность γ_n сходится и

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \inf_n \gamma_n.$$

Используя метод, развитый Ранкином в работе [3], Диананда [1] получил следующую оценку:

$$0{,}922476 \leqslant \lim_{n\to\infty} \gamma_n \leqslant \gamma_{24} < 0{,}998394.$$

В нашей работе будет указан простой способ сколь угодно точного вычисления $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$. Попутно будет доказано и его существование.

В дальнейшем будут использованы:

1° Частный случай неравенства Коши — Буняковского:

$$(1 + a^2)(1 + b^2) \geqslant (1 + ab)^2.$$

2° Неравенство Чебышева:

Если $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$, то

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{k_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

где $\{k_i\}$ — любая перестановка чисел 1, 2, ..., n.

§ 2. Оценка (снизу) величины γ_n. Пусть $a_i > 0$ и

$$\frac{a_2}{a_1} = k_1, \quad \frac{a_3}{a_2} = k_2, \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}} = k_{n-1}, \quad \frac{a_1}{a_n} = k_n.$$

Тогда

$$k_i > 0, \ \prod_{i=1}^{n} k_i = 1, \ \frac{a_i}{a_{i+1} + a_{i+2}} = \frac{1}{\frac{a_{i+1}}{a_i}\left(1 + \frac{a_{i+2}}{a_{i+1}}\right)} = \frac{1}{k_i(1 + k_{i+1})},$$

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \ldots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} = \frac{1}{k_1(1 + k_2)} + \ldots + \frac{1}{k_n(1 + k_1)}. \quad (3)$$

Расположим последовательность $\{k_i\}$ в порядке возрастания и обозначим полученную последовательность m_1, m_2, ..., m_n. Тогда последовательности

$$\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \ldots, \frac{1}{m_n}; \quad \frac{1}{1 + m_n}, \frac{1}{1 + m_{n-1}}, \ldots, \frac{1}{1 + m_1}$$

противомонотонны, и, по неравенству Чебышева,

$$\frac{1}{k_1(1 + k_2)} + \ldots + \frac{1}{k_n(1 + k_1)} \geqslant \frac{1}{m_1(1 + m_n)} + \frac{1}{m_2(1 + m_{n-1})} + \ldots + \frac{1}{m_n(1 + m_1)}. \quad (4)$$

Введем обозначения: $m_i m_{n+1-i} = c_i$.

Тогда

$$\prod_{i=1}^{n} c_i = \left(\prod_{i=1}^{n} m_i\right)^2 = 1,$$

$$r_i = \frac{1}{m_i(1+m_{n+1-i})} + \frac{1}{m_{n+1-i}(1+m_i)} =$$

$$= \frac{m_i + m_{n+1-i} + 2m_i m_{n+1-i}}{m_i m_{n+1-i}(1+m_i)(1+m_{n+1-i})} = \frac{1}{m_i m_{n+1-i}} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{m_i m_{n+1-i} - 1}{(1+m_i)(1+m_{n+1-i})}\right) = \frac{1}{c_i}\left(1 + \frac{c_i - 1}{(1+m_i)(1+m_{n+1-i})}\right).$$

Если $c_i \geqslant 1$, то $r_i \geqslant 1/c_i$. Если $c_i < 1$, то

$$r_i = \frac{1}{c_i}\left(1 + \frac{c_i - 1}{(1+m_i)(1+m_{n+1-i})}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{c_i}\left(1 + \frac{c_i - 1}{(1+\sqrt{c_i})^2}\right) = \frac{1}{c_i}\left(1 + \frac{\sqrt{c_i} - 1}{\sqrt{c_i} + 1}\right) = \frac{2}{c_i + \sqrt{c_i}},$$

так как

$$(1+m_i)(1+m_{n+1-i}) \geqslant (1+\sqrt{m_i m_{n+1-i}})^2 = (1+\sqrt{c_i})^2$$

по неравенству Коши — Буняковского.

Итак, окончательно

$$r_i = \frac{1}{m_i(1+m_{n+1-i})} + \frac{1}{m_{n+1-i}(1+m_i)} \geqslant \begin{cases} \dfrac{1}{c_i}, & c_i \geqslant 1, \\ \dfrac{2}{c_i + \sqrt{c_i}}, & c_i < 1. \end{cases} \tag{5}$$

Сложив неравенства (5) для $1 \leqslant i \leqslant n$ и разделив на 2, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i(1+m_{n+1-i})} \geqslant \sum_{c_i \geqslant 1} \frac{1}{2c_i} + \sum_{c_i < 1} \frac{1}{c_i + \sqrt{c_i}}. \tag{6}$$

Введем обозначения: $c_i = e^{x_i}$. Так как $\prod_{i=1}^{n} c_i = 1$, то $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Пусть $g(x)$ — выпуклая опора функций

$$y = e^{-x}, \qquad y = 2(e^x + e^{x/2})^{-1} \tag{7}$$

(т. е. наибольшая выпуклая вниз функция, не превосходящая функций (7)). Тогда

$$e^{-x_i} \geqslant g(x_i),$$
$$2(e^{x_i} + e^{x_i/2})^{-1} \geqslant g(x_i)$$

и

$$\frac{2}{n}\left(\sum_{c_i \geqslant 1} \frac{1}{2c_i} + \sum_{c_i < 1} \frac{1}{c_i + \sqrt{c_i}}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i) \geqslant g\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{2}\right) = g(0) = \gamma \qquad (8)$$

в силу выпуклости $g(x)$. Из (3), (4), (6), (8) получаем

$$\frac{2}{n}\left(\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}\right) \geqslant \gamma, \qquad (9)$$

откуда следует, что $\gamma_n \geqslant \gamma$.

Выясним теперь, что представляет собой график $g(x)$. Заметим для этого, что

1° $e^{-x} < 2(e^x + e^{x/2})^{-1}$ при $x > 1$; $e^{-x} > 2(e^x + e^{x/2})^{-1}$ при $x < 1$.

2° Функция $y = e^{-x}$, очевидно, выпукла (вниз), а так как вторая производная функции $(e^x + e^{x/2})^{-1}$ равна

$$(e^x + e^{x/2})^{-3} \cdot \left(e^{2x} + \frac{3}{4}e^{3x/2} + \frac{1}{4}e^x\right) > 0,$$

то и эта функция выпукла.

3° В точке $x = 0$ производные функций (7) не равны между собой, так что общая касательная кривых (7) лежит ниже точки (0, 1). Пусть эта касательная соединяет точки $(x', e^{-x'})$ и $(x'', 2(e^{x''} + e^{x''/2})^{-1})$, $x'' < 0 < x'$.

Отсюда вытекает, что график $g(x)$ состоит из трех частей (см. рис.): $y = e^{-x}$, при $x > x'$, $y = 2(e^x + e^{x/2})^{-1}$ при $x < x''$ и общей касательной кривых (7). В частности, $\gamma = g(0)$ есть ордината точки пересечения общей касательной кривых (7) с осью OY и, следовательно, $\gamma < 1$.

§ 3. Доказательство равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma$. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно большого n можно

подобрать a_i так, чтобы было

$$\gamma_n = \frac{\dfrac{a_1}{a_2+a_3} + \ldots + \dfrac{a_n}{a_1+a_2}}{\dfrac{1}{2}n} < \gamma + \varepsilon. \qquad (10)$$

Пусть

$$u_0 = e^{x'}, \qquad v_0 = e^{x''}, \qquad u_0^{\alpha_0} v_0^{1-\alpha_0} = 1.$$

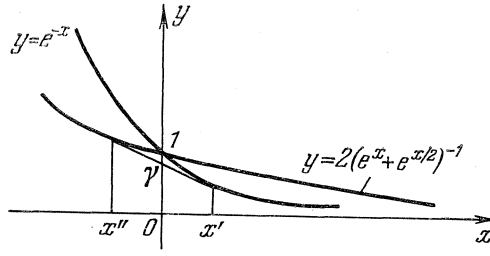
Легко видеть, что

$$\gamma = \frac{\alpha_0}{u_0} + \frac{1-\alpha_0}{\frac{1}{2}(v_0 + \sqrt{v_0})}.$$

Ввиду непрерывности функции

$$\frac{\alpha}{u} + \frac{1-\alpha}{\frac{1}{2}(v + \sqrt{v})}$$

для достаточно большого n можно подобрать величины



α_1, u_1, v_1 так, чтобы α_1 было дробью со знаменателем n и четным числителем, $u_1^{\alpha_1} v_1^{1-\alpha_1} = 1$, и

$$\frac{\alpha_1}{u_1} + \frac{1-\alpha_1}{\frac{1}{2}(v_1 + \sqrt{v_1})} - \gamma < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Положим

$$k_1 = \delta, \quad k_2 = \frac{u_1}{\delta}, \quad k_3 = \delta, \quad k_4 = \frac{u_1}{\delta}, \ldots, k_{\alpha_1 n} = \frac{u_1}{\delta};$$

$$k_{\alpha_1 n+1} = \ldots = k_n = \sqrt{v_1},$$

что возможно ввиду четности $\alpha_1 n$. Заметим, что

$$\prod_{i=1}^{n} k_i = u_1^{\alpha_1 n/2} v_1^{(1-\alpha_1)n/2} = 1.$$

Имеем (при $\delta < \sqrt{v_1}$)

$$\frac{1}{k_1(1+k_2)} + \ldots + \frac{1}{k_n(1+k_1)} = \frac{\frac{1}{2}\alpha_1 n}{\delta + u_1} + \frac{\frac{1}{2}\alpha_1 n - 1}{\frac{u_1}{\delta} + u_1} +$$

$$+ \frac{(1-\alpha_1)n}{v_1 + \sqrt{v_1}} + \frac{1}{\frac{u_1}{\delta}(1+\sqrt{v_1})} + \left(\frac{1}{\sqrt{v_1}(1+\delta)} - \frac{1}{v_1+\sqrt{v_1}}\right) <$$

$$< \frac{\frac{1}{2}\alpha_1 n}{\delta + u_1} + \frac{\frac{1}{2}\alpha_1 n}{\frac{u_1}{\delta} + u_1} + \frac{\frac{1}{2}(1-\alpha_1)n}{\frac{1}{2}(v_1+\sqrt{v_1})} + \frac{1}{\sqrt{v_1}} - \frac{1}{v_1+\sqrt{v_1}}.$$

При достаточно малом δ будет

$$\alpha_1\left(\frac{1}{\delta+u_1} + \frac{1}{\frac{u_1}{\delta}+u_1} - \frac{1}{u_1}\right) < \frac{\varepsilon}{3},$$

а при достаточно большом n

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{v_1}} - \frac{1}{v_1+\sqrt{v_1}}}{\frac{1}{2}n} < \frac{\varepsilon}{3}$$

и поэтому

$$\gamma_n \leqslant \frac{\frac{1}{k_1(1+k_2)} + \ldots + \frac{1}{k_n(1+k_1)}}{\frac{1}{2}n} <$$

$$< \frac{\alpha_1}{u_1} + \frac{1-\alpha_1}{\frac{1}{2}(v_1+\sqrt{v_1})} + \frac{2}{3}\varepsilon < \gamma + \varepsilon,$$

т. е. неравенство (10) справедливо. Наконец, положим

$$a_1 = 1, \quad \frac{a_{i+1}}{a_i} = k_i, \quad 1 \leqslant i < n, \quad \frac{a_1}{a_n} = k_n.$$

Это возможно, так как $\prod_{i=1}^{n} k_i = 1$.

Подсчет привел к результату:

$$\gamma = 0{,}989,$$

что не так далеко от значения $\gamma = 1$.

Приношу глубокую благодарность В. И. Левину за остановку задачи и большое внимание.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
24.XI.1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Dianandа P. H., A cyclic inequality and an extension of it II, Proc. Edinburgh Math. Soc., **13** (1962), 2, 143—152.
[2] Rankin R. A., An inequality, Math. Gaz., **42** (1958), 39—40.
[3] Rankin R. A., A cyclic inequality, Proc. Edinburgh Math. Soc., **12** (1961), 139—147.
[4] Zulauf A., On a conjecture of L. J. Mordell. II, Math. Gaz., **43** (1959), 182—194.