Ю. В. Нестеренко, Об алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям, *Матем. заметки*, 1969, том 5, выпуск 5, 587–598

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 5, № 5 (1969), 587—598

УДК 511

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ЗНАЧЕНИЙ E-ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ЛИНЕЙНЫМ НЕОДНОРОДНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Ю. В. Нестеренко

Доказывается теорема, сводящая исследование алгебраической независимости решений линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений к исследованию однородных систем. С помощью этой теоремы доказывается алгебраическая независимость значений некоторых E-функций. Библ. 7 назв.

В 1929 г. К. Зигель [1] опубликовал аналитический метод, с помощью которого можно устанавливать трансцендентность и алгебраическую независимость значений в алгебраических точках одного класса целых функций, названных им E-функциями *), удовлетворяющих линейным однородным дифференциальным уравнениям с коэффициентами из поля рациональных функций.

В 1954 г. А. Б. Шидловский [2, 3] обобщил метод Зигеля и распространил его на случай E-функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям. В этом методе для установления алгебраической независимости значений совокупности функций необходимо устанавливать алгебраическую независимость решений дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют рассматриваемые функции, над полем рациональных функций **).

---

*) Определение E-функции см. [3].

**) Обзор результатов, полученных этим методом, см. [5].

В работе [1] К. Зигель рассмотрел функции

$$K_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n}, \quad \lambda \neq -1, -2, \ldots,$$

и установил следующий результат:

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — *рациональные числа; все числа* $2\lambda_1, \ldots, 2\lambda_m$ *отличны от нечетных, ни одна из сумм* $\lambda_k + \lambda_l$ *и разностей* $\lambda_k - \lambda_l$ *не является целым числом. Пусть* $\xi_1^2, \ldots, \xi_n^2$ — *отличные друг от друга и от* 0 *алгебраические числа. Тогда* $2mn$ *чисел*

$$K_{\lambda_i}(\xi_j), \qquad K'_{\lambda_i}(\xi_j), \qquad i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n$$

алгебраически независимы.

При доказательстве этой теоремы К. Зигель развил метод, позволивший ему устанавливать алгебраическую независимость решений различных однородных дифференциальных уравнений второго порядка. Однако для исследования решений неоднородных уравнений, что требовалосьдля дальнейших приложений теоремы А. Б. Шидловского [3], этот метод оказался непосредственно неприменим.

В 1966 г. А. Б. Шидловский [4] показал, что если функции, удовлетворяющие неоднородной системе дифференциальных уравнений, связаны не более чем одним алгебраическим уравнением над полем рациональных функций, то исследование алгебраической независимости решений этой системы сводится к исследованию алгебраической независимости решений соответствующей однородной системы, и получил некоторые приложения этого утверждения. В настоящей работе доказывается, что указанный переход от неоднородных систем к однородным может осуществляться при наличии любого числа алгебраических связей между исследуемыми функциями.

Обозначим через F поле функций от одной комплексной переменной, замкнутое по отношению к операции дифференцирования. Пусть

$$Q_i: \quad y'_k = q_{k0}^{(i)} + \sum_{j=1}^{m_i} q_{kj}^{(i)} y_j, \qquad k = 1, \ldots, m_i; \; i = 1, \ldots, r,$$

— совокупность r систем линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами $q_{kj}^{(i)} \in F$,

$$Q_i^*: \quad y_k' = \sum_{j=1}^{m_i} q_{ki}^{(i)} y_j, \qquad k = 1, \ldots, m_i; \ i = 1, \ldots, r,$$

— совокупность соответствующих однородных систем.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть для любого набора ненулевых решений систем Q_i^* совокупность $m_1 + \ldots + m_r$ функций, входящих в него, алгебраически независима над полем F. Тогда если*

$$f_{i1}, \ldots, f_{im_i} \qquad i = 1, \ldots, r, \tag{1}$$

— совокупность решений систем Q_i такая, что для каждого i не все $f_{i1}, \ldots, f_{im_i}$ принадлежат F, то функции (1) алгебраически независимы над полем F.

Для доказательства теоремы мы каждой системе

$$y_k' = q_{k0} + \sum_{i=1}^{m} q_{ki} y_i, \qquad k = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

поставим в соответствие дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_k} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} q_{ki} y_i + q_{k0} \right), \tag{3}$$

действующий в кольце $F[y_1, \ldots, y_m]$ многочленов от переменных $y_1, \ldots, y_m$ с коэффициентами в F. Для любого решения $f_1, \ldots, f_m$ системы (2) и любого $P \in F[y_1, \ldots, y_m]$, очевидно, имеет место равенство

$$\frac{d}{dz} P(f_1, \ldots, f_m) = DP(f_1, \ldots, f_m). \tag{4}$$

Из (4) же следует, что если J — совокупность всех многочленов $P \in F[y_1, \ldots, y_m]$ таких, что $P(f_1, \ldots, f_m) = 0$, то $DJ \subset J$.

ЛЕММА 1. *Пусть I — ненулевой идеал в $F[y_1, \ldots, y_m]$, отличный от всего кольца и такой, что $DI \subset I$. Тогда существует решение $f_1, \ldots, f_m$ системы* (2) *такое, что для любого $P \in I$*

$$P(f_1, \ldots, f_m) = 0.$$

Доказательство. Так как $I \neq F[y_1, \ldots, y_m]$, то (см. [6], стр. 11) существуют в алгебраическом расширении поля F функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ такие, что для любого

$P \in I$ будет $P(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = 0$. Обозначим через $P_1, \ldots, P_s$ базис идеала I. Пусть α — комплексное число такое, что все коэффициенты системы (2), функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ и все коэффициенты многочленов $P_1, \ldots, P_s$ аналитичны в точке α. Рассмотрим решение $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ системы (2) такое, что

$$f_k \big|_{z=\alpha} = \varphi_k(\alpha), \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Функции $f_1, \ldots, f_m$ аналитичны в точке α. Пусть P один из многочленов $P_1, \ldots, P_s$. Обозначим $\Phi(z) = P(f_1(z), \ldots \ldots, f_m(z))$. Из-за выбора точки α функция $\Phi(z)$ аналитична в ней.

Имеем, используя (4),

$$\frac{d^k\Phi}{dz^k} = D^kP(f_1(z), \ldots, f_m(z)), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и

$$\left.\frac{d^k\Phi}{dz^k}\right|_{z=\alpha} = D^kP(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)) =$$
$$= D^kP(\varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_m(\alpha)) = 0,$$

так как $D^kP \in I$, $k = 0, 1, \ldots$ Следовательно, $\Phi(z) \equiv 0$, т. е. $P_i(f_1(z), \ldots, f_m(z)) \equiv 0$, и, значит, для любого $P \in I$, $P(f_1, \ldots, f_m) = 0$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Если система (2) однородна и идеал I также однороден и имеет нетривиальный нуль, то у системы (2) есть ненулевое решение $f_1, \ldots, f_m$ такое, что для любого $P \in I$ будет $P(f_1, \ldots, f_m) = 0$. Это следует из того, что если $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — нетривиальный нуль I, то точку α можно подобрать так, что хоть одно $\varphi_i(\alpha) \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Будем для $P \in F[y_1, \ldots, y_m]$ обозначать P^* совокупность однородных членов старшей степени, входящих в P.

1. Случай $r = 1$. Пусть $f_1, \ldots, f_{m_1}$ — решение системы Q_1, состоящее из функций, алгебраически зависимых над F. Обозначим через I идеал в кольце $F[y_1, \ldots, y_{m_1}]$, состоящий из всех многочленов P таких, что $P(f_1, \ldots, f_{m_1}) = 0$, через I^* — идеал, порожденный всеми многочленами P^* такими, что $P \in I$, D и D^* — операторы, построенные аналогично (3) соответственно для систем Q_1 и $Q_1{}^*$. Из (4) следует, что $DI \subset I$. Пусть $P \in I$. Так как $DP \in I$ то $(DP)^* \in I^*$, а так как D^*P^* равно либо 0, либо $(DP)^*$,

то $D^*P^* \in I^*$. Отсюда следует, что $D^*I^* \subset I^*$. Если мы предположим, что I^* имеет нетривиальный нуль, то, пользуясь замечанием к лемме 1, получим противоречие с условием теоремы. Следовательно, идеал I^* имеет единственный нуль $(0,\ldots, 0)$. Тогда по теореме Гильберта о нулях (см. [6], стр. 12) с некоторым целым M для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant m_1$, имеем $y_i^M \in I^*$.

Пусть $P_1,\ldots, P_s \in I$ и $P_1^*,\ldots, P^*_s$ образуют базис идеала I^*. Такие многочлены найдутся, так как I^* порожден P^* с $P \in I$. Тогда существуют однородные многочлены $H_{ki} \in F[y_1,\ldots, y_{m_1}]$ такие, что

$$y_k^M = \sum_{i=1}^{s} H_{ki}P_i^*, \qquad k = 1, \ldots, m_1.$$

Обозначим $G_k = \sum_{i=1}^{s} H_{ki}P_i$. Так как $P_i \in I$, то $G_k \in I$ и, значит, $G_k(f_1, \ldots, f_{m_1}) = 0$, а поскольку $G_k^* = y_k^M$, то f_k^M является линейной комбинацией произведений $f_1^{l_1} \ldots f_{m_1}^{l_{m_1}}$, $l_1 + \ldots + l_{m_1} < M$ с коэффициентами из F. Отсюда же следует, что линейное пространство, натянутое на $f_1^{l_1} \ldots f_{m_1}^{l_{m_1}}$, $l_k \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, m_1$, конечномерно и, значит, все $f_1, \ldots, f_{m_1}$ алгебраичны над F.

Пусть $T_k(y_k)$ — многочлен от y_k минимальной степени такой, что $T_k(f_k)=0$. Предположим, что хоть для одного k степень T_k больше 1. Тогда существуют алгебраические над F функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m_1}$, являющиеся нулем I и такие, что $(\varphi_1,\ldots, \varphi_{m_1}) \neq (f_1,\ldots, f_{m_1})$. Покажем, что $\varphi_1(z),\ldots,\varphi_{m_1}(z)$ также есть решение системы Q_1. Так как T_k — минимальный многочлен для f_k, то он не имеет кратных множителей и, значит, $\left.\frac{\partial T_k}{\partial y_k}\right|_{y_k=\varphi_k} \neq 0$. Так как $T_k \in I$, то $DT_k \in I$ и $DT_k(\varphi_1,\ldots, \varphi_{m_1}) = 0$, т. е.

$$\frac{\partial T_k}{\partial z} + \frac{\partial T_k}{\partial \varphi_k}\left(\sum_{i=1}^{m_1} q_{ki}^{(1)}\varphi_i + q_{k0}^{(1)}\right) = 0.$$

С другой стороны, дифференцируя по z равенство $T_k(\varphi_k)=0$, имеем

$$\frac{\partial T_k}{\partial z} + \frac{\partial T_k}{\partial \varphi_k} \cdot \varphi_k' = 0.$$

Из двух последних равенств следует, что

$$\varphi_k' = q_{k0}^{(1)} + \sum_{i=1}^{m_1} q_{ki}^{(1)} \varphi_i.$$

Обозначив $\psi_k = f_k - \varphi_k$, получим ненулевое решение системы Q_1^*, состоящее из функций, алгебраических над F, но это противоречит условию теоремы. Следовательно, для каждого k $\deg T_k = 1$ и, значит, $f_k \in F$, $k = 1, \ldots, m_1$.

2. Допустим теперь, что теорема уже доказана для случая, когда количество систем меньше r, $r \geqslant 2$. Обозначим через l количество неоднородных систем среди $Q_1, \ldots, Q_r$. Если $l = 0$, то утверждение теоремы имеет место. Предположим, что теорема уже доказана для всех наборов по r систем, в которых количество неоднородных систем меньше l. Если $l < r$, то, не уменьшая общности, будем считать, что система Q_1 однородна.

Обозначим через $F_1 = F(f_{11}, \ldots, f_{1m_1})$ поле, полученное присоединением к F функций f_{1i}. Поле F_1 замкнуто относительно операции дифференцирования. Любой набор ненулевых решений систем $Q_2^*, \ldots, Q_r^*$ состоит из функций, алгебраически независимых над F_1. При $l < r$ это следует, в силу выбора системы Q_1, из условия теоремы, при $l = r \geqslant 2$ — из предположения относительно l.

Предположим, что найдется такое i, например $i = 2$, что все функции соответствующего решения принадлежат F_1:

$$f_{2j} \in F_1, \quad j = 1, \ldots, m_2.$$

Обозначим D_1, D_1^* дифференциальные операторы, соответствующие системам Q_1, Q_1^*, и в дальнейшем, для краткости, при обозначении коэффициентов системы Q_2 вместо $q_{ki}^{(2)}$ будем писать q_{ki}. Итак, существуют рациональные функции R_k такие, что

$$f_{2k} = R_k(f_{11}, \ldots, f_{1m_1}), \; k = 1, \ldots, m_2.$$

Оператор D_1 можно продолжить с $F[y_1, \ldots, y_{m_1}]$ на поле рациональных функций $F(y_1, \ldots, y_{m_1})$ по правилу

$$D_1\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{D_1 A \cdot B - A \cdot D_1 B}{B^2}. \tag{5}$$

Тогда для $R \in F(y_1, \ldots, y_{m_1})$ имеем

$$\frac{d}{dz} R(f_{11}, \ldots, f_{1m_1}) = D_1 \dot{R}(f_{11}, \ldots, f_{1m_1}).$$

В частности,

$$D_1 R_k(f_{11}, \ldots, f_{1m_1}) = \frac{d}{dz} R_k(f_{11}, \ldots, f_{1m_1}) = f'_{2k} =$$
$$= \sum_{i=1}^{m_2} q_{ki} f_{2i} + q_{k0} = \sum_{i=1}^{m_2} q_{ki} R_i(f_{11}, \ldots, f_{1m_1}) + q_{k0}.$$

И так как $f_{11}, \ldots, f_{1m_1}$, алгебраически независимы над F по п. 1 настоящего доказательства, то

$$D_1 R_k = q_{k0} + \sum_{i=1}^{m_2} q_{ki} R_i, \qquad k = 1, \ldots, m_2. \tag{6}$$

Если $R = A/B$— рациональная функция, то под *измерением* R будем понимать разность степеней многочленов A и B. Пусть N — максимальное из измерений функций R_k, $k = 1, \ldots, m_2$. Пусть $R_k^* = 0$, если измерение R_k меньше N, и равно отношению однородных групп старшей степени числителя и знаменателя, если измерение R_k равно N. Предположим, что $N \neq 0$; тогда, сравнивая в (6) слева и справа члены измерения N, получаем

$$D_1^* R_k^* = \sum_{i=1}^{m_2} q_{ki} R_i^*, \qquad k = 1, \ldots, m_2. \tag{7}$$

Пусть $f_{11}^*, \ldots, f_{1m_1}^*$ — ненулевое решение системы Q_1^*. Обозначим

$$f_{2k}^* = R_k^*(f_{11}^*, \ldots, f_{1m_1}^*). \tag{8}$$

Среди функций $f_{21}^*, \ldots, f_{2m_2}^*$ хоть одна отлична от 0, так как не все R_k^* равны 0 и $f_{11}^*, \ldots, f_{1m_1}^*$ алгебраически независимы над F. Из (7) следует, что $f_{21}^*, \ldots, f_{2m_2}^*$ есть решение Q_2^*, но тогда (8) противоречит условию теоремы. Следовательно, $N = 0$, и из (6) получаем

$$D_1^* R_k^* = q_{k0} + \sum_{i=1}^{m_2} q_{ki} R_i^*, \qquad k = 1, \ldots, m_2; \tag{9}$$

здесь все R_k^* измерения 0. Пусть $R_k^* = A_k/B$, где B — наименьший общий знаменатель R_k^*. Покажем, что $B \in F$. При $m_1 = 1$ это, очевидно, имеет место. Пусть $m_1 > 1$. Тогда, подставляя в (9) $R_k^* = A_k/B$ и пользуясь (5), приходим к равенству

$$A_k \cdot D_1^* B = B \cdot (D_1^* A_k - \sum_{i=1}^{m_2} q_{ki} A_i - q_{k0} B).$$

Отсюда же, так как B-наименьший общий знаменатель, получаем, что B делит $D_1^* B$ и, значит, однородный главный идеал (B) устойчив относительно действия оператора D_1^*. Если мы предположим, что степень B отлична от 0, то тогда, так как $m_1 > 1$, (B) будет иметь нетривиальный нуль, пользуясь замечанием к лемме, мы придем к противоречию с условием теоремы. Следовательно, степень B равна 0, т. е. $B \in F$. А так как все R_k^* измерения 0, то и все $R_k^* \in F$. Отсюда следует, что $\frac{dR_k^*}{dz} = D_1^* R_k^*$, и из (9), что R_k^*, $k = 1, \ldots, m_2$, есть решение Q_2.

Обозначим $\varphi_k = f_{2k} - R_k^*$. Так как $f_{2k} \in F_1$ и $R_k^* \in F \subset F_1$, то $\varphi_k \in F_1$. Поскольку $(f_{21}, \ldots, f_{2m_2})$ и $(R_1^*, \ldots, R_{m_2}^*)$ есть решения Q_2, то $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{m_2})$ есть решение Q_2^*. Но по уже доказанному ненулевые решения систем Q_k^*, $k = 2, \ldots, r$, алгебраически независимы над F_1. Поэтому $\varphi_k = 0$, $k = 1, \ldots, m_2$, и, значит, $f_{2k} = R_k^* \in F$, $k = 1, \ldots, m_2$.

Это противоречие с условием теоремы показывает, что для каждого i, $i = 2, \ldots, r$, не все $f_{i1}, \ldots, f_{im_i}$ принадлежат F_1. Пользуясь индуктивным предположением относительно r, получаем, что $m_2 + \ldots + m_r$ функций

$$f_{i1}, \ldots, f_{im_i}, \qquad i = 2, \ldots, r,$$

алгебраически независимы над F_1. Это же доказывает теорему, так как $f_{11}, \ldots, f_{1m_1}$ по п. 1 алгебраически независимы над F. Из теоремы 1, очевидно, следует

ТЕОРЕМА 2. *Пусть уравнения*

$$y^{(m_k)} + q_{k1} y^{(m_k - 1)} + \ldots + q_{km_k} y = q_{k0}, \qquad k = 1, \ldots, r, \tag{10}$$

$q_{ki} \in F$ *таковы, что если* $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ — *ненулевые решения однородных уравнений, соответствующих* (11), *то*

$$\varphi_k, \varphi_k', \ldots, \varphi_k^{(m_k - 1)}, \qquad k = 1, \ldots, r,$$

алгебраически независимы над F. Тогда если $f_1, \ldots, f_r$ есть решения уравнений (10) *такие, что ни одно $f_i \notin F$, то функции*

$$f_k,\ f'_k, \ldots, f_k^{(m_k-1)}, \qquad k = 1, \ldots, r,$$

алгебраически независимы над F.

Применим доказанные теоремы к конкретным функциям. Рассмотрим функцию

$$K_{\lambda\mu}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)(\mu+1)\ldots(\mu+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n},$$
$$\lambda, \mu \neq -1, -2, \ldots,$$

удовлетворяющую неоднородному дифференциальному уравнению

$$y'' + \frac{2\lambda+2\mu+1}{z} y' + \left(1 + \frac{4\lambda\mu}{z^2}\right) y = \frac{4\lambda\mu}{z^2}.$$

ЛЕММА 2 (см. [1]). *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — комплексные числа, каждое из которых отлично от половины нечетного числа, а сумма и разность каждой пары отлична от целого рационального числа. Пусть, далее, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ таковы, что комплексные числа $\xi_1^2, \ldots, \xi_n^2$ отличны друг от друга и от 0. Тогда если $U_{\lambda\xi}$ — какое-либо решение дифференциального уравнения*

$$y'' + \frac{1}{z} y' + \left(\xi^2 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right) y = 0,$$

то $2mn$ функций

$$U_{\lambda\xi},\ U'_{\lambda\xi},\ \lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_m;\ \xi = \xi_1, \ldots, \xi_n,$$

алгебраически независимы над полем рациональных функций от z.

ЛЕММА 3. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_m$ — рациональные числа такие, что*

$$\lambda_i - \mu_i \neq \frac{2k_1+1}{2}, \qquad (\lambda_i - \mu_i) \pm (\lambda_k - \mu_k) \neq k_2,$$

где k_1, k_2 — целые рациональные числа; числа $\xi_1^2, \ldots, \xi_n^2$ отличны друг от друга и от 0. Тогда $2mn$ функций

$$K_{\lambda_i\mu_i}(\xi_j z), \qquad K'_{\lambda_i\mu_i}(\xi_j z), \qquad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n,$$

алгебраически независимы над полем рациональных функций.

Доказательство. Обозначим через F поле алгебраических функций от z. Очевидно, достаточно доказать алгебраическую независимость указанных функций над полем F. Рассмотрим вместо функций $K_{\lambda\mu}(\xi z)$ функции

$$V_{\lambda\mu\xi} = z^{\lambda+\mu}K_{\lambda\mu}(\xi z),$$

которые являются решениями дифференциальных уравнений

$$V'' + \frac{1}{z}V' + \left(\xi^2 - \frac{(\lambda-\mu)^2}{z^2}\right)V = 4\lambda\mu z^{\lambda+\mu-2}.$$

Коэффициенты этих уравнений принадлежат полю F, и однородные уравнения, полученные из них, удовлетворяют условиям леммы 2. Но тогда из леммы 2 следует, что выполнены условия теоремы 2, и, значит, по этой теореме при условиях леммы 3 функции

$$V_{\lambda_i\mu_i\xi_j}, \quad V'_{\lambda_i\mu_i\xi_j}, \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n,$$

алгебраически независимы над F. А поскольку $z^{\lambda+\mu} \in F$, то и

$$K_{\lambda_i\mu_i}(\xi_j z), \; K'_{\lambda_i\mu_i}(\xi_j z), \; i=1, \ldots, m, \; j=1, \ldots, n,$$

алгебраически независимы над F.

ТЕОРЕМА 3*). *Пусть* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_m$ — *рациональные числа такие, что*

$$\lambda_i - \mu_i \neq \frac{2k_1+1}{2}, \qquad (\lambda_i - \mu_i) \pm (\lambda_k - \mu_k) \neq k_2,$$

где k_1, k_2 — *целые рациональные числа, а* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — *алгебраические числа такие, что числа* $\xi_1^2, \ldots, \xi_n^2$ *отличны друг от друга и от* 0. *Тогда* 2 mn *чисел*

$$K_{\lambda_i\mu_i}(\xi_j), \; K'_{\lambda_i\mu_i}(\xi_j), \qquad i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n,$$

алгебраически независимы.

---

*) Автору стало известно, что подобный результат был получен А. А. Шмелевым более сложным путем непосредственного доказательства алгебраической независимости и сейчас сдан для опубликования.

Доказательство. При рациональных λ_i, μ_i и алгебраических ξ_j, $K_{\lambda_i\mu_i}(\xi_j z)$ являются E-функциями (см. [1]). Поэтому утверждение теоремы следует из леммы 3 и основной теоремы А. Б. Шидловского [3].

Пусть

$$A_{\lambda\mu\nu}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\nu+1)\ldots(\nu+n)}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)(\mu+1)\ldots(\mu+n)} z^n.$$

Используя вместо леммы 2 результаты, полученные И. И. Белогривовым в его кандидатской диссертации [7], аналогично тому, как это было сделано для функций $K_{\lambda\mu}(z)$, доказывается следующая

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* λ_j, μ_j, ν_j, $j = 1, \ldots, m$,— *рациональные числа такие, что*

$$\nu_j,\ \lambda_j,\ \mu_j \neq -k_1 - 1,\quad \nu_j - \lambda_j \neq \pm k_2,\quad \nu_j - \mu_j \neq \pm k_3,$$
$$(2\nu_j - \mu_j - \lambda_j) - (2\nu_k - \mu_k - \lambda_k) \pm [(\lambda_j \pm \lambda_k) - (\mu_j \pm \mu_k)] \neq$$
$$\neq \pm 2k_4,$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 — *целые неотрицательные числа. Далее, пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_n$— *алгебраические числа такие, что* $\xi_1^2, \ldots, \xi_n^2$ *отличны друг от друга и от* 0. *Тогда* $2mn$ *чисел*

$$A_{\lambda_j\mu_j\nu_j}(\xi_i), \qquad A'_{\lambda_j\mu_j\nu_j}(\xi_i), \qquad j = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n,$$

алгебраически независимы.

В заключение я хочу поблагодарить моего руководителя А. Б. Шидловского за постановку задачи и помощь при работе над статьей.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
26.VII.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Siegel C., Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen, Abh. Preuss Acad. Wiss., № 1 (1929—1930), 1—70.

[2] Шидловский А. Б., О критерии алгебраической независимости значений одного класса целых функций, Докл. АН, **100**, № 2 (1955), 221—224.

[3] Шидловский А. Б., О критерии алгебраической независимости значений одного класса целых функций, Изв. АН СССР. Сер. матем., **23**, № 1 (1959), 35—66.

[4] Ш и д л о в с к и й А. Б., О трансцендентности и алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям второго порядка, Докл. АН СССР, **169**, № 1 (1966), 42—45.
[5] Ш и д л о в с к и й А. Б., Трансцендентность значений E-функций, Труды IV Всесоюзного матем. съезда, т. 2, Ленинград, 1961, 147—158.
[6] В а н-д е р-В а р д е н Б. Л., Современная алгебра, т. 2, М., 1948.
[7] Б е л о г р и в о в И. И., Канд. диссертация, М., 1967.