В. Т. Фоменко, О некоторых формулах, возникающих при конформном отображении риманова пространства на евклидово и вытекающих из них следствиях, *Матем. заметки*, 1969, том 6, выпуск 5, 513–520

https://www.mathnet.ru/mzm6958

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 6, № 5 (1969), 513—520

УДК 513.78

О НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА НА ЕВКЛИДОВО И ВЫТЕКАЮЩИХ ИЗ НИХ СЛЕДСТВИЯХ

В. Т. Фоменко

Выводятся формулы преобразования полной и средней кривизны поверхности R_2 в римановом пространстве R_3 при конформном отображении R_3 на евклидово пространство. Библ. 3 назв.

1. Пусть $\bar{E}_3$ — трехмерное конформно евклидово пространство. Отнесем его к конформно евклидовым декартовым координатам x^α $(\alpha = 1, 2, 3)$; тогда метрики пространств $\bar{E}_3$ и E_3 примут соответственно вид

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 &= \bar{a}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \\ ds^2 &= a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\bar{a}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}e^{\sigma}$; $a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$; $\sigma = \sigma(x^\alpha)$ — функция, определяющая коэффициент растяжения линейного элемента $\bar{E}_3$ при отображении $\bar{E}_3$ на E_3.

Зададим в $\bar{E}_3$ двумерную поверхность $\bar{R}_2$ уравнениями

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2), \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{2}$$

и установим связь между метрическими тензорами поверхности $\bar{R}_2 \subset \bar{E}_3$ и его образом $R_2 \subset E_3$. Имеем

$$\bar{g}_{ij} = \bar{a}_{\alpha\beta}\, x^\alpha_{,i}\, x^\beta_{,j}; \qquad g_{ij} = a_{\alpha\beta}\, x^\alpha_{,i}\, x^\beta_{,j} \qquad (i, j = 1,2). \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$\bar{g}_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij}, \qquad \bar{g}^{ij} = e^{-2\sigma} g^{ij}. \tag{4}$$

Выясним, как связаны между собой тензоры $\bar{b}_{ij}$ и b_{ij} второй основной формы поверхностей $\bar{R}_2$ и R_2. Имеем ([2], стр. 180)

$$\bar{b}_{ij} = \bar{a}_{\alpha\beta} \bar{\xi}^{\alpha} \bar{x}^{\beta}_{,ij} \pm (\bar{\Gamma}_{\mu\nu,\beta})_{\bar{E}_3} x^{\mu}_{,i} x^{\nu}_{,j} \bar{\xi}^{\beta}, \tag{5}$$

где $\bar{\xi}^{\alpha}$ — единичный вектор нормали к $\bar{R}_2 \subset \bar{E}_3$;

$$\bar{x}^{\alpha}_{,ij} = \partial^2_{ij} x^{\alpha} - (\bar{\Gamma}^k_{ij})_{\bar{R}_2} x^{\alpha}_{,k}.$$

Учитывая, что

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = e^{2\sigma} \delta_{\alpha\beta}; \qquad \xi^{\beta} = e^{\sigma} \bar{\xi}^{\beta}; \qquad \bar{a}_{\alpha\beta} \bar{\xi}^{\alpha} x^{\beta}_{,i} = 0.$$

Отсюда находим

$$\bar{a}_{\alpha\beta} \bar{\xi}^{\beta} \bar{x}^{\alpha}_{,ij} = e^{2\sigma} \delta_{\alpha\beta} \xi^{\beta} e^{-\sigma} \partial^2_{ij} x^{\alpha} = e^{\sigma} b_{ij}. \tag{6}$$

Так как

$$(\bar{\Gamma}_{\mu\nu,\beta})_{\bar{E}_3} = e^{2\sigma} (\sigma_{\mu} \delta_{\nu\beta} + \sigma_{\nu} \delta_{\mu\beta} - \sigma_{\beta} \delta_{\mu\nu}),$$

то

$$(\bar{\Gamma}_{\mu\nu,\beta})_{\bar{E}_3} x^{\mu}_{,i} x^{\nu}_{,j} \bar{\xi}^{\beta} = -e^{\sigma} g_{ij} (\sigma_{\alpha} \xi^{\alpha}). \tag{7}$$

Обозначая через $\mathbf{n}$ вектор нормали к $R_2 \subset E_3$ через и $\operatorname{grad}\sigma = \{\sigma_{x^1}, \sigma_{x^2}, \sigma_{x^3}\}$, получим

$$(\sigma_{\alpha} \xi^{\alpha}) = (\operatorname{grad} \sigma \cdot \mathbf{n})_{E_3}, \tag{8}$$

где скалярное произведение взято в метрике E_3. Складывая левые и правые части формул (6), (7), находим

$$\bar{b}_{ij} = e^{\sigma} [b_{ij} - g_{ij} (\operatorname{grad} \sigma \cdot \mathbf{n})_{E_3}]. \tag{9}$$

Отсюда получаем

$$\bar{b}_{11} \bar{b}_{22} - \bar{b}^2_{12} = e^{2\sigma} [b_{11} b_{22} - b^2_{12} - g g^{ij} (\operatorname{grad} \sigma \cdot \mathbf{n})_{E_3} + g (\operatorname{grad} \sigma \cdot \mathbf{n})^2_{E_3}],$$

где $g = g_{11} g_{22} - g^2_{12}$. Разделив левую и правую части этого равенства на $\bar{g} = e^{4\sigma} g$, получим

$$\bar{K}_e = e^{-2\sigma} [K_i - 2H (\operatorname{grad} \sigma \cdot \mathbf{n})_{E_3} + (\operatorname{grad} \sigma \cdot \mathbf{n})^2_{E_3}], \tag{10}$$

где $\bar{K}_e$ — внешняя кривизна $\bar{R}_2 \subset \bar{E}_3$; K_i — внутренняя кривизна $R_2 \subset E_3$; H — средняя кривизна $R_2 \subset E_3$. Умножив левую и правую части формулы (9) на $\bar{g}^{ij} = e^{-2\sigma} g^{ij}$, находим

$$\bar{H} = e^{-\sigma} [H - (\operatorname{grad} \sigma \cdot \mathbf{n})_{E_3}], \tag{11}$$

где $\bar{H}$ — средняя кривизна $\bar{R}_2 \subset \bar{E}_3$. Учитывая, что $(\operatorname{grad} \sigma \cdot \mathbf{n})_{E_3} = (\sigma_\alpha \bar{\xi}^\alpha) e^\sigma = e^\sigma (\operatorname{grad} \sigma \cdot \mathbf{n}^*)_{\bar{E}_3}$, из формул (10), (11), получаем

$$\bar{K}_e = e^{-2\sigma} [K_i - H^2 + (e^\sigma \bar{H})^2]. \tag{12}$$

Обозначая через эйлерову разность поверхности, перепишем формулу (12) в виде

$$\bar{E} = e^{-2\sigma} E. \tag{13}$$

Далее из формулы (11) имеем

$$H = e^\sigma [\bar{H} + (\operatorname{grad} \sigma \cdot \mathbf{n}^*)_{\bar{E}_3}], \tag{14}$$

где $\mathbf{n}^*$ — вектор нормали к $\bar{R}_2$ в $\bar{E}_3$; скалярное произведение понимается в смысле метрики $\bar{E}_3$. Переходя в формуле (13) к величинам K_i, $\bar{K}_e$, H, $\bar{H}$ и используя формулу (14), получим

$$K_i = e^{2\sigma} [\bar{K}_e + 2\bar{H} (\operatorname{grad} \sigma \cdot \bar{n}^*)_{\bar{E}_3} + (\operatorname{grad} \sigma \cdot \bar{n}^*)^2_{\bar{E}_3}]. \tag{15}$$

2. Приведенные формулы позволяют доказать некоторые теоремы о полных двумерных поверхностях в пространстве $\bar{E}_3$. Именно, справедлива.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\bar{E}_3$ конформно гомеоморфно E_3. Тогда на всякой полной двумерной поверхности $\bar{R}_2$ в $\bar{E}_3$ выполняется условие*

$$\sup_{\bar{R}_2} e^{2\sigma} [\bar{K}_e + 2\bar{H} (\operatorname{grad} \sigma \cdot \mathbf{n}^*)_{\bar{E}_3} + (\operatorname{grad} \sigma \cdot \mathbf{n}^*)^2_{\bar{E}_3}] \geqslant 0.$$

Доказательство. Так как $\bar{E}_3$ конформно гомеоморфно E_3, то декартовы координаты x, y, z пробегают все E_3, т. е.

$$-\infty < x, y, z < \infty.$$

Следовательно, при конформном отображении $\bar{E}_3$ на E_3 полная поверхность $\bar{R}_2 \subset \bar{E}_3$ перейдет в полную поверхность R_2 пространства E_3. Тогда, согласно известной теореме Н. В. Ефимова [1], на поверхности R_2 выполняется условие

$$\sup_{R_2} K_i \geqslant 0,$$

которое вместе с формулой (15) и доказывает теорему.

З а м е ч а н и е 1. Теорема 1, вообще говоря, неверна для пространств $\bar{E}_3$, конформно гомеоморфных части E_3, например для пространства L_3. В самом деле, отнесем L_3 к конформно евклидовым координатам x^α, отобразив L_3 внутрь шара

$$x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2} < a^2 = \text{const}.$$

Зададим в L_3 поверхность $\bar{R}_2$:

$$x^1 = x,\ x^2 = y,$$
$$x^3 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

Тогда

$$e^{2\sigma}[\bar{K}_e + 2\bar{H}(\operatorname{grad}\sigma\cdot\mathbf{n}^*)_{\bar{E}_3} + (\operatorname{grad}\sigma\cdot\mathbf{n}^*)^2_{\bar{E}_3}] = \\ = -\frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{\bar{R}_2} e^{2\sigma}[\bar{K}_e + 2\bar{H}(\operatorname{grad}\sigma\cdot\mathbf{n}^*)_{L_3} + (\operatorname{grad}\sigma\cdot\mathbf{n}^*)^2_{L_3}] = -\frac{1}{(1 + a^2)^{3/2}}.$$

З а м е ч а н и е 2. Если $\bar{E}_3$ гомеоморфно E_3, и неполно, то его можно пополнить до полного пространства $\bar{\bar{E}}_3$. Тогда для пространства $\bar{\bar{E}}_3$ справедлива теорема 1. В качестве примера укажем на пространство S_3.

Из теоремы 1 вытекает следующая

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\bar{E}_3$ конформно гомеоморфно E_3, причем*

$$\inf_{\bar{E}_3} \sigma \geqslant c > -\infty.$$

Пусть, далее, на плоскости (x, y), $-\infty < x, y < \infty$, задана полная метрика ds^2 с кривизной $\bar{K}_i$, причем

$$\bar{K}_i \leqslant \inf_{\bar{E}_3}[\min_{x_1^\alpha x_2^\beta} K_{x_1^\alpha x_2^\beta} - |\operatorname{grad}\sigma|^2_{\bar{E}_3}] - \varepsilon, \tag{16}$$

где ε — сколь угодно малое положительное число, $K_{x_1^\alpha x_2^\beta}$ — кривизна пространства $\bar{E}_3$ по двумерному направлению $x_1^\alpha x_2^\beta$. Тогда метрика ds^2 не допускает регулярной реализации в $\bar{E}_3$ так, чтобы

$$\bar{H}\,(\operatorname{grad}\sigma\cdot\mathbf{n}^*)_{\bar{E}_3} \leqslant 0. \tag{17}$$

Доказательство. Предположим противное; пусть метрика ds^2 допускает реализацию в $\bar{E}_3$ в виде полной поверхности с условием (17). Тогда имеем

$$J \equiv e^{2\sigma}\,[\bar{K}_e + 2\bar{H}\,(\operatorname{grad}\sigma\cdot\mathbf{n}^*)_{\bar{E}_3} + (\operatorname{grad}\sigma\cdot\mathbf{n}^*)^2_{\bar{E}_3}] \leqslant$$
$$\leqslant e^{2\sigma}\,[\bar{K}_e + |\operatorname{grad}\sigma|^2_{\bar{E}_3}] \leqslant e^{2\sigma}\,[\bar{K}_i - \min_{x_1^\alpha x_2^\beta} K_{x_1^\alpha x_2^\beta} + |\operatorname{grad}\sigma|^2_{\bar{E}_3}] \leqslant$$
$$\leqslant e^{2\sigma}\,[\bar{K}_i - \inf_{\bar{E}_3}(\min_{x_1^\alpha x_2^\beta} K_{x_1^\alpha x_2^\beta} - |\operatorname{grad}\sigma|^2_{\bar{E}_3})] \leqslant -\varepsilon e^{2\sigma}.$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{\bar{E}_3} J \leqslant \sup_{\bar{E}_3}(-\varepsilon e^{2\sigma}) \leqslant -\varepsilon \inf_{\bar{E}_3} e^{2\sigma} \leqslant -\varepsilon e^{2c} < 0.$$

Так как поверхность $\bar{R}_2$ полна, а $\bar{E}_3$ конформно гомеоморфно E_3, то последнее неравенство противоречит теореме 1. Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Полная метрика ds^2 с условием (16), вообще говоря, может быть реализована в $\bar{E}_3$, $\inf\sigma \geqslant c > -\infty$, если не выполнено условие (17). В самом деле, рассмотрим $\bar{E}_3$, гомеоморфное E_3, $\inf\sigma \geqslant c > -\infty$, такое, что в области $x^2 + y^2 + z^2 < a^2$, $a = \text{const}$, оно совпадает с частью S_3. Тогда поверхности Клиффорда, расположенные в области $x^2 + y^2 + z^2 < a^2$ имеют метрику с кривизной $\bar{K}_i$, удовлетворяющей неравенству (16). Условие (17) при этом не выполняется. С другой стороны, в любом $\bar{E}_3$ можно указать поверхности, для которых всюду

$$\bar{H}\,(\operatorname{grad}\sigma\cdot\mathbf{n}^*)_{\bar{E}_3} \leqslant 0.$$

Замечание 2. Для пространства E_3 условие (17) тождественно выполняется для любой поверхности, так как в E_3 $\operatorname{grad}\sigma \equiv 0$. Кроме того, условие (17) выполняется тождественно для любой минимальной поверхности в $\bar{E}_3$.

3. Полученные формулы дают другой подход к решению задачи о построении в конформно евклидовых пространствах поверхностей с заданной средней или внешней кривизной. Действительно, задачи о построении в пространстве $\bar{E}_3$ поверхности $\bar{R}_2$ с наперед заданными средней кривизной $\bar{H}(x, y)$ или внешней кривизной $\bar{K}_e(x, y)$ сводится к нахождению в области D плоскости (x, y) решений $z = f(x, y)$ соответственно следующих дифференциальных уравнений:

$$\frac{(1+q^2)\, r - 2pqs + (1+p^2)\, t}{2(1+p^2+q^2)^{3/2}} + \frac{\sigma_x p + \sigma_y q - \sigma_z}{(1+p^2+q^2)^{1/2}} = \bar{H}(x, y) e^{\sigma(x,y,z)}; \tag{18}$$

$$\frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} - \frac{(1+q^2)\, r - 2pqs + (1+p^2)\, t}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} \cdot \frac{(-\sigma_x p - \sigma_y q + \sigma_z)}{(1+p^2+q^2)^{1/2}} +$$
$$+ \frac{(\sigma_x p + \sigma_y q - \sigma_z)^2}{1+p^2+q^2} = \bar{K}_e(x, y)\, e^{2\sigma(x, y, z)}. \tag{19}$$

Функция $\sigma(x, y, z)$ и ее производные содержат, вообще говоря, искомую функцию.

В качестве примера решим задачу Плато в $\bar{E}_3$, считая, что метрика пространства $\bar{E}_3$ имеет вид

$$d\bar{s}^2 = e^{2\sigma(z)}(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

а контур Z однозначно проектируется на плоскость Oxy. Имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Пусть D — область класса $C^{m+2,\alpha}$, $m \geqslant 1$, $0 < \alpha < 1$, плоскости (x, y) ограничена выпуклой замкнутой кривой Γ с кривизной $k(s) \geqslant k_0 > 0$. Пусть, далее, $\sigma(z) \in C^2(D + \Gamma)$, причем в области $D + \Gamma$ выполняется условие*

$$\sigma''(z) \geqslant \sigma_0 > 0.$$

Тогда для любой функции $\varphi(s) \in C^{m+2,\alpha}(\Gamma)$ существует минимальная поверхность $\bar{R}_2$ в $\bar{E}_3$, заданная уравнением

$$z = f(x, y), \quad f(x, y) \in C^{m+2,\delta}(D + \Gamma),$$
$$0 < \delta < 1,$$

для которой на Γ имеет место равенство

$$f(x, y)|_\Gamma = \varphi(s).$$

Такая поверхность в классе поверхностей, однозначно проектирующихся на плоскость Oxy класса $C^2(D+\Gamma)$, единственна.

Доказательство. Так как

$$(\operatorname{grad}\sigma\bar{n}^*)_{\bar{E}_3} = \frac{\sigma'(z)}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ \bar{H}\equiv 0,$$

то уравнение (18) можно записать в виде

$$A(p,q)\,r+2B(p,q)\,s+C(p,q)\,t=D(z), \qquad (20)$$

где

$$A(p,q)=\frac{1+q^2}{1+p^2+q^2};$$

$$B(p,q)=-\frac{pq}{1+p^2+q^2};$$

$$C(p,q)=\frac{1+p^2}{1+p^2+q^2};$$

$$D(z)=2\sigma'(z).$$

Проверим условия слабой нелинейности уравнения 20) (см. [3], стр. 123).

Имеем:

А. 1) $$A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2=\frac{\xi^2+\eta^2+(q\xi-p\eta)^2}{1+p^2+q^2}\geqslant\alpha_0(\xi^2+\eta^2),$$

где

$$\alpha_0=\frac{1}{1+p^2+q^2}>0$$

при конечных p, q;

А. 2) $D_z=2\sigma''(z)\geqslant\text{const}>0$ в области D для всех $(x,\ y)$;

В. 1) При $|z|\leqslant M$, $p^2+q^2>1$, имеем

$$\frac{2|\sigma'(z)|}{Ap^2+2Bpq+Cq^2}=\frac{2(1+p^2+q^2)}{p^2+q^2}|\sigma'(z)|\leqslant R_M<\infty,$$

где $R_M=\text{const}$;

В. 2) $A_x=A_y=B_x=B_y=C_x=C_y=D_x=D_y\equiv 0$.

Отсюда следует, что условия слабой нелинейности уравнения (20) выполнены, и потому при перечисленных условиях на контур Г задача Дирихле

$$\begin{cases} Ar + 2Bs + Ct = D; \\ z|_{\Gamma} = \varphi(s) \end{cases}$$

в области D всегда имеет единственное решение в классе $C^2(D + \Gamma)$. Отсюда следует справедливость теоремы 3.

Ростовский государственный университет

Поступило 3.XII.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ефимов Н. В., Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны, Матем. сб., 64, № 2 (1964), 286—320.
[2] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, М., 1948.
[3] Бакельман И. Я., Геометрические методы решения эллиптических уравнений, М., 1965.