И. В. Павлов, А. В. Скориков, Пространства $L_{\bar{p}}$ со смешанной нормой на бесконечномерном торе, *Изв. вузов. Матем.*, 1986, номер 2, 69–72

5. Выберем некоторую точку $x_0 \in M$ и так же, как и в разделе 3, зафиксируем репер (e_i, e_α) векторного пространства E_n таким образом, чтобы $x_0 = L(e_i)$, $y_0 = f(x_0) = L(e_\alpha)$. Интерпретируем вектора пространства E_n как точки в проективном пространстве P_{n-1}. Рассмотрим множество плоскостей, проходящих через точки $e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_k$. Это множество есть поверхность в M, которую будем обозначать через U_i. Заметим, что в системе координат x_i^α поверхность U_i описывается так:

$$x_1^\alpha = 0, \dots, x_{i-1}^\alpha = 0, \quad x_{i+1}^\alpha = 0, \dots, x_k^\alpha = 0.$$

Но тогда очевидно, что локально $M \cong U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k$. Теперь определим ковектора $\overset{j}{p}$: в репере $\partial/\partial x_i^\alpha$ их координаты $\overset{j}{p} = (S_\beta^j, \dots, S_\beta^j)$, $S_\beta^j = y_\sigma^j A_\beta^\sigma$, $A_\alpha^\sigma = \delta_\alpha^\sigma - x_\alpha^t y_t^\sigma$. Следует отметить, что поверхности U_i так же, как и ковектора $\overset{j}{p}$, вообще говоря, зависят от точки x_0 и определены локально, поэтому, говоря об этих поверхностях и ковекторах, подразумеваем, что точка x_0 выбрана и зафиксирована. Тогда верна

Теорема 6. *Связность ∇ на M есть связность Нейфельда тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_X Y = \overset{0}{\nabla}_X Y + \overset{j}{p}(X)\, Y + \overset{i}{p}(Y)\, X, \qquad (*)$$

где $X \in T_p U_i$, $Y \in T_p U_j$; $p \in U_1 \times \dots \times U_k$, $\overset{0}{\nabla}$ — евклидова связность, характеризующаяся тем, что ее коэффициенты в репере $\partial/\partial x_i^\alpha$ равны нулю, поверхности U_i и ковектора $\overset{j}{p}$ выбраны вышеописанным образом.

Следствие. Поверхности U_i автопараллельны в связности Нейфельда, и связность, индуцированная стандартным образом на этих поверхностях, проективно-евклидова.

Таким образом, если на поверхностях U_i в окрестности некоторой точки $x_0 \in G_{n,k}$ задать проективно-евклидовы связности с ковекторами $\overset{j}{p}$ и по формуле $(*)$ построить связность во всей окрестности, то и получится связность Нейфельда.

В заключение следует отметить, что термин „связность Нейфельда" был предложен А. П. Норденом в [6].

Автор выражает глубокую благодарность А. П. Нордену за его внимание к работе и постоянные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейфельд Э. Г. Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства.— Изв. вузов. Матем., 1976, № 11, с. 48—55.
2. Норден А. П. Проективные метрики на грассмановых многообразиях.— В сб.: Дифференц. геометрия. Уфа, 1982, с. 64—72.
3. Егиазарян К. М. Аффинные связности на грассмановом многообразии.— Изв. вузов. Матем., 1980, № 5, с. 76—78.
4. Шапуков Б. Н. Связности на дифференцируемых расслоениях.— В сб.: Пробл. геометрии. Итоги науки и техн. М., ВИНИТИ АН СССР, 1983, т. 15, с. 61—94.
5. Егиазарян К. М. Спроектированные инвариантные аффинные связности.— Тр. геом. семин. Казань, 1980, вып. 12, с. 27—37.
6. Норден А. П. Теория композиций.— В сб.: Пробл. геометрии. Итоги науки и техн. М., ВИНИТИ АН СССР, 1978, т. 10, с. 117—146.

г. Казань

Поступили
первый вариант—15.10.1984
окончательный вариант—23.05.1985

И. В. Павлов, А. В. Скориков

УДК 517.518

ПРОСТРАНСТВА $L_{\bar{p}}$ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ТОРЕ

1. *Введение.* Цель данной работы — введение и изучение пространств $L_{\bar{p}}$ со смешанной нормой, состоящих из функций, определенных на бесконечном декартовом произведении и тем самым зависящих от бесконечного числа переменных. В случае конечного декартового произведения пространства функций со смешанной нормой и их приложения к теоремам вложения

хорошо изучены ([1]—[4] и др.). Основные результаты данной работы устанавливают условия на поведение координат p_k при $k\to\infty$ вектора $\bar p=(p_1, p_2, \dots)$, при которых справедливы обычные теоремы о сходимости монотонных последовательностей в пространствах $L_{\bar p}$ и равномерная выпуклость этих пространств.

В качестве декартового произведения нами выбирается бесконечномерный тор $T^\infty=\prod\limits_{k=1}^{\infty} T_k$, где $T_k=T$ — единичная окружность. Этот случай является, на наш взгляд, одним из наиболее важных, т. к. на T^∞ естественно рассматривать вопросы об ограниченности в $L_{\bar p}$ векторного оператора Рисса (введенного впервые в [5]), о теоремах вложения (для обычных $L_p(T^\infty)$ некоторые результаты получены недавно А. Д. Бендиковым), о связи с вероятностными процессами (результаты в этом направлении докладывались авторами в марте 1984 г. на XVIII школе-коллоквиуме по теории вероятностей и математической статистике и составят предмет отдельной публикации).

2. *Определение пространства $L_{\bar p}(T^\infty)$ и некоторые его свойства.* Пусть $T_k=T$ — единичная окружность, рассматриваемая как топологическая группа $(k=1, 2, 3, \dots)$, $T^n:=\prod\limits_{k=1}^{n} T_k$, $T^\infty:=\prod\limits_{k=1}^{\infty} T_k$, $T^{\infty-n}:=\prod\limits_{k=n+1}^{\infty} T_k$, а dx_k, ν^n, ν, $\nu^{\infty-n}$ — меры Хаара соответственно на группах T_k, T^n, T^∞, $T^{\infty-n}$. Через $L_p(T^n)$ (либо $L_p(T^\infty)$) обозначим пространства функций на T^n (либо T^∞), интегрируемых с p-й степенью по мере ν^n (либо ν). Пусть ε^n — мера Дирака в нуле на T^n. Рассмотрим меры $\nu_n:=\varepsilon^n\otimes\nu^{\infty-n}$ на T^∞ $(n=1, 2, 3, \dots)$, которые сингулярны относительно ν. Меры ν_n позволяют построить аппроксимацию функций от бесконечного числа переменных функциями, зависящими от конечного числа переменных.

Предложение 1. 1) *Если* $f\in L_p(T^\infty)$, *то* $f*\nu_n\in L_p(T^n)\subset L_p(T^\infty)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$;

2) $\|f\|_p=\sup\limits_n\|f*\nu_n\|_p=\lim\limits_{n\to\infty}\uparrow\|f*\nu_n\|_p$ *и* $f*\nu_n\to f$ ν-*почти всюду* (*п. в.*);

3) $f*\nu_n\to f$ *в* $L_n(T^\infty)$, *если* $1\leqslant p<\infty$.

Эти обстоятельства, а также результаты работы [1], приводят к следующему определению.

Определение. Пусть $\bar p=(p_1, p_2, \dots)$ — бесконечномерный вектор, причем $1\leqslant p_k\leqslant\infty$ $(k=1, 2, 3, \dots)$. Обозначим $\bar p^n=(p_1, p_2, \dots, p_n)$ и предположим, что $f\in L_1(T^\infty)$. Множество функций f таких, что $\|f\|_{\bar p}:=\sup\limits_n\|f*\nu_n\|_{\bar p^n}<\infty$, где

$$\|f*\nu_n\|_{\bar p^n}:=\|\dots\|\,\|f*\nu_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)\|_{p_n, x_n}\|_{p_{n-1}, x_{n-1}}\dots\|_{p_1, x_1},$$

а

$$\|g(x_1, \dots, x_k)\|_{p_k, x_k}:=\begin{cases}\left(\int\limits_{T_k}|g(x_1, \dots, x_k)|^{p_k}dx_k\right)^{1/p_k}, & p_k<\infty;\\ \operatorname{ess\,sup}\limits_{x_k\in T_k}|g(x_1, \dots, x_k)|, & p_k=\infty,\end{cases}$$

назовем пространством со смешанной нормой и обозначим через $L_{\bar p}(T^\infty)=L_{\bar p}$.

Имеет место

Предложение 2. 1) *Если* $p_k=p$ $(k=1, 2, 3, \dots)$, *то* $L_{\bar p}=L_p(T^\infty)$;

2) *при любом n справедливо неравенство* $\|f*\nu_n\|_{\bar p^n}\leqslant\|f*\nu_{n+1}\|_{\bar p^{n+1}}$ *и, следовательно,* $\|f\|_{\bar p}=\lim\limits_{n\to\infty}\uparrow\|f*\nu_n\|_{\bar p^n}$;

3) *пространство $L_{\bar p}$ является нормированным идеальным пространством* (см. [6], с. 139), *т. е. если* $f\in L_{\bar p}$ *и* $|g|\leqslant|f|$, *то* $\|g\|_{\bar p}\leqslant\|f\|_{\bar p}$.

В силу п. 3) этого предложения естественно считать, что если $f\notin L_1$, то $\|f\|_{\bar p}=\||f|\|_{\bar p}=\infty$.

Теорема 1. *Пусть* $1\leqslant p_k\leqslant\infty$, $k=1, 2, 3, \dots$, *и вектор* $\bar q=(q_1, q_2, \dots)$ *таков, что* $1/p_k+1/q_k=1$, $k=1, 2, 3, \dots$ *Тогда*

$$\|f\|_{\bar p}=\sup_{g\in M_{\bar q}}\int\limits_{T^\infty}|fg|\,d\nu=\sup_{g\in M_{\bar q}}\int\limits_{T^\infty}fg\,d\nu,$$

где f — измеримая функция на T^∞, а $M_{\bar q}$ — множество конечнозначных функций g, зависящих от конечного числа переменных и таких, что $\|g\|_{\bar q}=1$.

Из теоремы 1, применяя результаты [6] (см. теорему IV.1.7 и лемму IV.3.4), получаем

Следствие 1. В пространстве $L_{\bar p}$ выполнено условие (B) (см. [6], с. 143): если последовательность $(f_n)\subset L_{\bar p}$, $f_n\geqslant 0$, монотонно возрастает почти всюду и $\sup\limits_n \|f_n\|_{\bar p}<\infty$, то существует $f\in L_{\bar p}$ такая, что $f_n\uparrow f$ п. в.

Следствие 2. В пространстве $L_{\bar p}$ выполнено условие (C) (см. [6], с. 142): если $0\leqslant f_n\uparrow f$ п. в. и $f\in L_{\bar p}$, то $\|f_n\|_{\bar p}\uparrow\|f\|_{\bar p}$.

Следствие 3. В пространстве $L_{\bar p}$ выполняется свойство Фату: если f_n, $f\in L_{\bar p}$ и $f_n\to f$ по мере ν, то $\|f\|_{\bar p}\leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty}\|f_n\|_{\bar p}$.

Кроме того, из [6] (теорема VI.3.4) вытекает, что $L_{\bar p}$ — банахово пространство.

Рассмотрим теперь вопрос о том, когда в пространстве $L_{\bar p}$ выполняется условие (A), т. е. когда из $f_n\downarrow 0$ п. в., $f_n\in L_{\bar p}$ следует $\|f_n\|_{\bar p}\downarrow 0$ (см. [6], с. 142).

Теорема 2. *Условие* (A) *выполняется в каждом из следующих случаев*:

$$1)\ \prod_{k=1} p_k<\infty;\qquad 2)\ \sup_k p_k<\infty \ \text{ и } \ \varliminf_{k\to\infty} p_k>1.$$

Покажем, что если $\sup\limits_k p_k=\infty$, то в $L_{\bar p}$ свойство (A) не выполняется. Это тривиально, если существует k такое, что $p_k=\infty$. Пусть $p_k<\infty$ при любом $k=1, 2, 3, \ldots$ Не нарушая общности, можно считать, что $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-1/p_k)>0$. Рассмотрим подмножества $A_k\subset T_k$, меры Хаара которых равны $a_k=(1-1/p_k)^{p_k}$. Пусть $B_n:=\prod\limits_{k=1}^{n}A_k\times\prod\limits_{k=n+1}^{\infty}T_k$ и положим $f_n=I_{B_n}$. С одной стороны, $\nu(B_n)=\prod\limits_{k=1}^{n}a_k\downarrow 0$, т. к. $a_k\to e^{-1}<1$, и поэтому $f_n\downarrow 0$ п. в. А с другой стороны,

$$\|f_n\|_{\bar p}=\prod_{k=1}^{n}a_k^{1/p_k}=\prod_{k=1}^{n}(1-1/p_k)>\prod_{k=1}^{\infty}(1-1/p_k)>0.$$

Следствие 4. Если выполнено одно из условий теоремы 2, то пространство $L_{\bar p}$ имеет следующие свойства:

1) $L_{\bar p}$ сепарабельно;

2) если $f\in L_{\bar p}$, то $f*\nu_n\to f$ в $L_{\bar p}$;

3) $L_{\bar p}^*=L_{\bar q}$ (вектор $\bar q$ такой же, как в теореме 1).

3. *Дальнейшие результаты*. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. *Пространство $L_{\bar p}$ равномерно выпукло тогда и только тогда, когда $\sup\limits_k p_k<\infty$ и $\inf\limits_k p_k>1$.*

Теорема 4. *Пусть f_n, $f\in L_{\bar p}$ и $\|f_n\|_{\bar p}\to\|f\|_{\bar p}$. Предположим, что выполняется одно из следующих условий:*

1) *$f_n\to f$ слабо, $\sup\limits_k p_k<\infty$ и $\inf\limits_k p_k>1$;*

2) *$f_n\to f$ п. в., $\sup\limits_k p_k<\infty$ и $\inf\limits_k p_k>1$;*

3) *$f_n\to f$ п. в., $\prod\limits_{k=1}^{\infty}p_k<\infty$.*

Тогда $\|f-f_n\|_{\bar p}\to 0$.

Теорема 5. *Пусть K — некоторое подмножество функций из $L_{\bar{p}}$ и выполнены условия:*

1) $\sup\limits_{f\in K} \|f\|_{\bar{p}} < \infty$;

2) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая окрестность* v *нуля в* T^∞, *что* $\|f(x+y) - f(x)\|_{\bar{p},x} < \varepsilon$ *для всех* $f \in K$, $y \in v$.

Тогда множество K *относительно компактно в* $L_{\bar{p}}$.

Обратное утверждение получается при выполнении одного из условий теоремы 2.

В заключение авторы выражают благодарность С. Г. Самко и А. Н. Ширяеву за внимание к работе, а также А. Д. Бендикову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Benedek A., Panzone R. The spaces L^p with mixed norm.— Duke Math. J., 1961, v. 28, № 3, p. 301—324.

2. Бесов О. В. Классы функций с обобщенным смешанным условием Гёльдера.— Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1969, т. 105, с. 21—29.

3. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1975. 480 с.

4. Бухвалов А. В. О пространствах со смешанной нормой.— Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ., астр., 1973, № 19, с. 5—12.

5. Bendikov A. D., Pavlov I. V. Spaces H^p and BMO on the infinite dimensional torus.— III Международн. конф. по теории вероятностей и матем. статистике. Тезисы докл. Вильнюс, 1981, т. 3, с. 26—27.

6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. 2-е изд. М., 1977. 741 с.

г. Ростов-на-Дону

Поступила
07.06.1984

И. А. Печников

УДК 514.754

КЛАССИФИКАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ Δ_{n-1} НА МНОГООБРАЗИИ ВСЕХ ПРЯМЫХ n-МЕРНОГО АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Отнесем $(2n-2)$-мерное многообразие $\mathrm{Gr}(1, n)$ всех прямых в A_n к подвижному реперу $\{A, m_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, относительно которого произвольная прямая (луч) $L_1 \in \mathrm{Gr}(1, n)$ имеет локальные уравнения $x^\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$, вследствие чего формы ω_n^α и ω^α, стоящие в деривационных формулах указанного репера, образуют базис кокасательного расслоения T^* к $\mathrm{Gr}(1, n)$.

Произвольное поле направлений ξ в касательном расслоении T определяется (локально) системой $\omega_n^1 : \omega_n^2 : \ldots : \omega_n^{n-1} : \omega^{n-1} : \omega^{n-2} : \ldots : \omega^1 = a^1 : a^2 : \ldots : a^{2n-2}$, где $a^1, a^2, \ldots, a^{2n-2}$ — аналитические функции, заданные на $\mathrm{Gr}(1, n)$. Для любого элемента $L_1 \in \mathrm{Gr}(1, n)$ отношение $a^1 : a^2 : \ldots : a^{2n-2}$ интерпретируется как некоторая точка $M \in P_{2n-3}$ (проективизация касательного пространства T_L [1] или диаграмма Циндлера [2]). При этом асимптотическому конусу $B_L(2) \subset T_L$, возникающему при погружении многообразия $\mathrm{Gr}(1, n)$ в проективное пространство, сопоставляется в P_{2n-3} алгебраическая $(n-1)$-поверхность $S_{n-1}: a^{2n-2}/a^1 = a^{2n-3}/a^2 = \ldots = a^n/a^{n-1}$, через каждую точку которой проходят $(n-2)$-мерная и неинцидентная ей одномерная образующие этой поверхности.

Если точка M принадлежит поверхности S_{n-1}, то ей соответствует в A_n пучок прямых $\{F, L_2\}$, центр F и 2-плоскость L_2 которого инцидентны лучу L_1, и в то же время — интегральный для поля направлений ξ торс $L_1({}^t\Phi_1) \supset L_1$, для которого F — фокус, а L_2 — касательная 2-плоскость. Произвольной $(n-2)$-мерной образующей ${}^tl_{n-2} \subset S_{n-1}$ соответствует гиперсвязка прямых с центром в точке $F \in L_1$, и одновременно — совокупность всех тех торсов, для которых эта точка является фокусом. Одномерная же образующая ${}^tl_1 \subset S_{n-1}$ изображает множество всех прямых, заполняющих некоторую 2-плоскость, а также все торсы, для которых эта плоскость касательная. Инвариантная образующая

$$ {}^zl_{n-2}: \quad a^\alpha = 0 \tag{1} $$

есть образ гиперсвязки прямых в A_n с центром в несобственной точке луча, и в то же время — совокупности всех цилиндров, проходящих через луч L_1.