



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. A. Vavilov, On subgroups of the unitary group over a semilocal ring, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1982, Volume 37, Issue 4, 147–148

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.172

January 21, 2025, 04:13:15



О ПОДГРУППАХ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ НАД ПОЛУЛОКАЛЬНЫМ КОЛЬЦОМ

Н. А. В а в и л о в

В работах [1], [2], [5] описаны подгруппы полной линейной группы $GL(n, \Lambda)$ над полулокальным кольцом Λ , содержащие группу $D(n, \Lambda)$ диагональных матриц. Аналогичный вопрос решен также для расщепимых групп остальных классических типов (для $G Sp_{2l}$ см. [6], изложение результатов для GO_n появится в «Бюллетене Польской Академии наук»). В настоящей заметке мы решаем аналогичный вопрос для подгрупп четномерной унитарной группы, соответствующей форме максимального индекса Витта.

Пусть Λ — ассоциативное кольцо с единицей и инволюцией ρ (антиавтоморфизмом порядка 2). Пусть $\rho x = \bar{x}$; $R = \{x \in \Lambda \mid x = \bar{x}\}$ — кольцо инвариантов; Λ^* и R^* — мультипликативные группы колец Λ и R соответственно. В основных результатах настоящей заметки предполагается, что Λ — полулокальное кольцо такое, что 1) $2 \in R^*$, 2) в каждом поле вычетов R содержится не менее семи элементов, 3) существует $\theta \in \Lambda^*$ такое, что $\bar{\theta} = -\theta$.

Обозначим через f матрицу порядка l , у которой на побочной диагонали стоят 1 и нули на всех остальных местах, а через F — блочную матрицу порядка $2l$, имеющую вид

$$F = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix}.$$

Полная унитарная группа $\Gamma = GU(2l, \Lambda)$ состоит из тех матриц x порядка $2l$ над Λ , для которых $x\bar{F}x^t = \lambda F$, для некоторого $\lambda \in R^*$, где x^t — матрица, транспонированная к x . Через $\Delta = \Delta(2l, \Lambda)$ обозначим подгруппу содержащихся в Γ диагональных матриц.

Напомним, что таблица $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, двух сторонних идеалов σ_{ij} кольца Λ называется D -сетью идеалов в Λ порядка n , если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ и $\sigma_{ii} = \Lambda$ для всех i, j, r (см. [1], [2]). Каждой сети соответствует подгруппа $G(\sigma)$ в полной линейной группе $G = GL(n, \Lambda)$, состоящая из тех матриц $a = (a_{ij}) \in G$, для которых $a_{ij}, a'_{ij} \equiv \delta_{ij} \pmod{\sigma_{ij}}$ при всех i, j , где $a^{-1} = (a'_{ij})$ — обратная к a матрица.

Для $r = 1, \dots, n$ положим $r^* = n + 1 - r$ и назовем сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ порядка n над кольцом Λ с инволюцией унитарной, если $\sigma_{i^*j} = \bar{\sigma}_{ji}$ при всех i, j . В случае $n = 2l$ унитарная сеть определяет унитарную сетевую подгруппу $\Gamma(\sigma) = G(\sigma) \cap \Gamma$ в группе $\Gamma = GU(2l, \Lambda)$. Через $N_\Gamma(\sigma)$ обозначим нормализатор $\Gamma(\sigma)$ в Γ .

Как обычно, через e обозначим единичную матрицу, через e_{ij} — матричную единицу у которой на месте (i, j) стоят 1 и нули на всех остальных местах. Унитарные трансвекции определяются равенствами $T_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij} - \bar{\alpha} e_{j^*i^*}$, $\alpha \in \Lambda$, при $i \neq j, j^*$, и $T_{ii^*}(\alpha) = e + \alpha e_{ii^*}$, $\alpha \in R$. Для унитарной сети σ положим $\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}$, если $i \neq j^*$, и $\hat{\sigma}_{ii^*} = \sigma_{ii^*} \cap R$. Пусть $E_\Gamma(\sigma)$ — подгруппа, порожденная унитарными трансвекциями $T_{ij}(\alpha)$, $\alpha \in \hat{\sigma}_{ij}$, $i \neq j$. Для подгруппы H в Γ , нормализуемой Δ , положим $\hat{\sigma}_{ij} = \{\alpha \in \Lambda; T_{ij}(\alpha) \in H\}$. При незначительных дополнительных предположениях (в частности, выполненных, если Λ — полулокальное кольцо, удовлетворяющее условиям 1) — 3) выше) все $\hat{\sigma}_{ij}$, $i \neq j^*$, являются идеалами в Λ , а $\hat{\sigma}_{ii^*}$ — в R , и если положить $\sigma_{ij} = \hat{\Lambda} \hat{\sigma}_{ij}$ при $i \neq j$ и $\sigma_{ii} = \Lambda$, то набор идеалов $\sigma = (\sigma_{ij})$ образует унитарную сеть, которую мы будем называть сетью, ассоциированной с группой H (см. [4]). При этом $E_\Gamma(\sigma) \leq H$ и σ — наибольшая сеть с таким свойством.

Теорема 1. Пусть Λ — полулокальное кольцо с инволюцией, удовлетворяющее условиям 1) — 3). Тогда для любой подгруппы H в $\Gamma = GU(2l, \Lambda)$, содержащей группу $\Delta = \Delta(2l, \Lambda)$, имеют место включения

$$\Gamma(\sigma) \leq H \leq N_\Gamma(\sigma),$$

где σ — сеть, ассоциированная с группой H .

Напомним, что подгруппа Δ группы Γ называется пронормальной в Γ , если для любого $x \in \Gamma$ подгруппы Δ и $x \Delta x^{-1}$ сопряжены уже в подгруппе $\langle \Delta, x \Delta x^{-1} \rangle$, ими порожденной.

Теорема 2. Пусть Λ — матрично локальное кольцо с инволюцией, удовлетворяющее условиям 1) — 3). Тогда подгруппа $\Delta = \Delta(2l, \Lambda)$ пронормальна в $\Gamma = GU(2l, \Lambda)$.

Иначе говоря, эта теорема утверждает, что если H, F — две подгруппы в Γ , содержащие Δ , и $xHx^{-1} = F$ для некоторого $x \in \Gamma$, то $x = \pi y$, где $y \in H$, а $\pi \in N_{\Gamma}(\Delta)$.

Доказательства теорем 1 и 2 основаны в основном на тех же соображениях, что и доказательства в работах [1], [2], [4] — [6], хотя и несколько сложнее технически.

З а м е ч а н и я. 1°. Для случая конечного поля теорема 1 совершенно другими методами доказана в [8]. 2°. Аналог теоремы 1 имеет место и в том случае, когда условие 3) не выполнено, но в этом случае вместо сетей нужно рассматривать наборы идеалов, в которых условие $\sigma_{ij}\sigma_{ji}^* \subseteq \sigma_{ii}^*$ заменено на более слабое: $\text{Tr } \sigma_{ij}\sigma_{ji}^* \subseteq \sigma_{ii}^*$, где $\text{Tr } I = \{a + \bar{a}, a \in I\}$. 3°. Аналог теоремы 1 справедлив для подгрупп, нормализуемых группой Δ , но при этом включения заменяются на следующие: $E_{\Gamma}(\sigma) \leq H \leq N_{\Gamma}(\sigma)$. 4°. Теорема 2 позволяет, в частности, вычислить фактор-группы $N_{\Gamma}(\sigma)/\Gamma(\sigma)$, возникающие в теореме 1. Все они являются факторами группы Вейля $N_{\Gamma}(\Delta)/\Delta$. 5°. Внешняя задача, решаемая в настоящей заметке, совпадает с задачей, решаемой в [3], [7]. На самом деле это не так даже в том случае, когда в каждой размерности имеется всего одна унитарная группа. Дело в том, что тор, рассматриваемый в этих работах, анизотропен, в то время как в настоящей заметке настолько близок к расщепимому, насколько это возможно.

В заключение автор благодарит Э. И. Боровича за интерес к настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Э. И. Б о р е в и ч. Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1976, 64, с. 12—29.
- [2] Э. И. Б о р е в и ч, Н. А. В а в и л о в. Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц.— Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1978, 148, с. 43—57.
- [3] Э. И. Б о р е в и ч, С. Л. К р у п е ц к и й. Подгруппы унитарной группы, содержащие группу диагональных матриц.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1979, 86, с. 19—29.
- [4] Н. А. В а в и л о в. О параболических подгруппах группы Шевалле скрещенного типа над полулокальным кольцом.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1979, 94, с. 21—36.
- [5] Н. А. В а в и л о в. О подгруппах полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц.— Вестн. ЛГУ, 1981, № 1, с. 10—15.
- [6] Н. А. В а в и л о в, Е. В. Д ы б к о в а. Подгруппы полной симплектической группы, содержащие группу диагональных матриц.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1980, 103, с. 31—47.
- [7] С. Л. К р у п е ц к и й. О подгруппах унитарной группы над локальным полем.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1979, 94, с. 81—103.
- [8] G. M. S e i t z. Subgroups of finite groups of Lie type.— J. Algebra, 1979, 61:1, p. 16—27.

Ленинградский государственный
университет

Поступило в Правление общества
15 декабря 1981 г.