Nguen Khak Tkhan’, Representation of natural numbers by a cubic form in seven variables, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, Number 2, 3–7

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 511

Нгуен Хак Тхань

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ОДНОЙ КУБИЧЕСКОЙ ФОРМОЙ С СЕМЬЮ ПЕРЕМЕННЫМИ

В 1943 г. Ю. В. Линник доказал, что каждое большое натуральное число есть сумма семи неотрицательных кубов (см. [1]). Позднее Ватсон дал другое доказательство этого факта. При этом был разрешен вопрос о представимости, а вопрос об асимптотической формуле для числа представлений остается открытым.

В настоящей работе мы продолжаем исследования по данной теме. Рассмотрим кубическую форму $Q(x, y, z)=x^3+y^3+x^3-3xyz$. Благодаря ее разложимости удается получить асимптотическую формулу для числа представлений натурального N суммой $Q(x_1, x_2, x_3)+Q(x_4, x_5, x_6)+x_7^3$. Доказывается следующая

1. Основная теорема. *Для числа $J(N)$ представлений натурального N в виде $N=x_1^3+x_2^3+\ldots+x_6^3+x_7^3-3x_1x_2x_3-3x_4x_5x_6$, где x_i — целые, $0\leqslant x_i\leqslant N^{1/3}$, $i=1, 2, \ldots, 7$, справедлива асимптотическая формула*

$$J(N)=\sigma(N)\gamma N^{4/3}+O(N^{152/117+\varepsilon}),$$

где $\sigma(N)\geqslant c>0$, $\gamma>0$ (см. (2), (3)) *и $\varepsilon>0$ — сколь угодно малое число. Константа в знаке «O» зависит только от ε.*

2. Простейшие преобразования. Пусть

$$P=N^{1/3},\quad \tau=12P^2,\quad \varkappa\tau=1.$$

Тогда

$$J(N)=\int_0^1 T^2(\alpha)T_1(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}\,d\alpha,$$

где

$$T(\alpha)=\sum_{0\leqslant x_1,x_2,x_3\leqslant P} e^{2\pi i\alpha(x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3)},$$

$$T_1(\alpha)=\sum_{0\leqslant u\leqslant P} e^{2\pi i\alpha u^3}.$$

По теореме Дирихле каждое число α из промежутка $[-\varkappa, 1-\varkappa]$ можно представить в виде

$$\alpha=\frac{a}{q}+\beta,\quad 1\leqslant q\leqslant\tau,\quad (a, q)=1,\quad |\beta|\leqslant(q\tau)^{-1}. \tag{1}$$

Далее, через E_1 обозначим те α, для которых в представлении (1) $q\leqslant P^{16/39}$, а через E_2 обозначим оставшиеся $\alpha\in[-\varkappa, 1-\varkappa]$. Легко показать, что $E_1=\bigcup E(a, q)$, где

$$E(a, q)=\left\{\alpha\,\middle|\,\frac{a}{q}-\frac{1}{q\tau}\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{q}+\frac{1}{q\tau}\right\},$$

и эти отрезки не пересекаются. Имеем

$$J(N)=J_1+J_2,$$

где

$$J_j=\int\limits_{E_j} T^2(\alpha)\,T_1(\alpha)\,e^{-2\pi i\alpha N}\,d\alpha,\quad j=1,\ 2.$$

3. Вспомогательные леммы. Лемма 1. *Пусть*

$$I(t)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 e^{2\pi i t(x^3+y^3+z^3-3xyz)}\,dx\,dy\,dz,$$

$$Z(t)=\min(1,\ \log(|t|+1)/|t|).$$

Тогда имеет место неравенство

$$I(t)\ll Z(t).$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $t>1$, так как в случае $0<t\leqslant 1$ утверждение леммы становится тривиальным. Имеем $x^3+y^3+z^3-3xyz=w(u^2-uv+v^2)$, где $w=x+y+z$, $u=x-y$, $v=x-z$. Отсюда

$$x=\frac{1}{3}(w+u+v),\quad y=\frac{1}{3}(w-2u+v),\quad z=\frac{1}{3}(w+u-2v).$$

Следовательно,

$$I(t)=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1}du\int\limits_{-1}^{1}dv\int\limits_{g_1(u,v)}^{g_2(u,v)} e^{2\pi i t w f(u,v)}\,dw,$$

где

$$g_1(u,\ v)=\max\{-(u+v),\ 2u-v,\ 2v-u\},$$

$$g_2(u,\ v)=\min\{3-(u+v),\ 3+2u-v,\ 3+2v-u\},$$

$$f(u,\ v)=u^2-uv+v^2.$$

Отсюда

$$\int\limits_{g_1(u,v)}^{g_2(u,v)} e^{2\pi i t w f(u,v)}\,dw\ll\min\left(1,\ \frac{1}{tf(u,\ v)}\right).$$

Заметим, что $0\leqslant f(u,\ v)\leqslant 3$. Поэтому

$$I(t)\ll\iint\limits_{f(u,v)\leqslant\frac{1}{t}} du\,dv+\frac{1}{t}\iint\limits_{\frac{1}{t}\leqslant f(u,v)\leqslant 3}\frac{1}{f(u,\ v)}\,du\,dv$$

Сделаем замену

$$u-v/2=\rho\cos\varphi,\quad \frac{\sqrt{3}}{2}v=\rho\sin\varphi.$$

Тогда

$$I(t) \ll \int\limits_0^{1/\sqrt{t}} \rho d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi + \frac{1}{t} \int\limits_{1/\sqrt{t}}^{\sqrt{3}} \frac{d\rho}{\rho} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \ll \frac{1}{t} + \frac{\ln t}{t} \ll \frac{\ln t}{t}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Положим*

$$S(a,\ q) = \sum_{x,y,z=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{a}{q}(x^3+y^3+z^3-3xyz)}.$$

Тогда $S(a,q) \ll q^{2+\varepsilon}$, *где* $\varepsilon > 0$ — *сколь угодно малое число.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Положим далее

$$S_1(a,\ q) = \sum_{u=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{a}{q} u^3},\quad I_1(t) = \int\limits_0^1 e^{2\pi i t u^3} du.$$

Следствие. *Особый ряд*

$$\sigma(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{0 \leqslant a < q\ (a,q)=1} q^{-6} S^2(a,\ q) S_1(a,\ q) e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} \tag{2}$$

и особый интеграл

$$\gamma = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I^2(t) I_1(t) e^{-2\pi i t} dt \tag{3}$$

сходятся.

Лемма 3. *Обозначим через* $\Phi(X)$ *число решений уравнения* $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = x_1^3 + y_1^3 + z_1^3 - 3x_1y_1z_1$, *где* $x,\ y,\ z,\ x_1,\ y_1,\ z_1$—*целые*, $1 \leqslant x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \leqslant X$. *Тогда*

$$\Phi(X) = XP_4(\log X) + O(X^{73/101+\varepsilon}),$$

где $P_4(x)$—*некоторый многочлен 4-й степени*, $\varepsilon > 0$—*сколь угодно мало.*

Доказательство см. в [2].

4. Асимптотика для J_1. Пусть $\alpha \in E_1$. Тогда

$$T(\alpha) = Nq^{-3} S(a,\ q) I(\beta N) + O(P^2 q),$$

$$T_1(\alpha) = Pq^{-1} S_1(a,\ q) I_1(\beta N) + O(q).$$

Следовательно,

$$J_1 = \int\limits_{E_1} T^2(\alpha) T_1(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha =$$

$$= \sum_{q \leqslant P^{16/39}} \sum_{0 \leqslant a < q\ (a,q)=1} \int\limits_{-1/q\tau}^{1/q\tau} T^2\left(\frac{a}{q} + \beta\right) T_1\left(\frac{a}{q} + \beta\right) e^{-2\pi i N\left(\frac{a}{q} + \beta\right)} d\beta =$$

$$= N^2 PV + O(R),$$

где

$$V = \sum_{q \leqslant P^{16/39}} \sum_{0 \leqslant a < q\,(a,q)=1} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} q^{-7} S^2(a, q) \times$$

$$\times S_1'(a, q) \int_{-1/q\tau}^{1/q\tau} I^2(\beta N) I_1(\beta N) e^{-2\pi i \beta N} d\beta,$$

$$R = \sum_{q = P^{16/39}} \sum_{0 \leqslant a < q\,(a,q)=1} \int_{-1/q\tau}^{1/q\tau} \{q(N^2 q^{-2+\varepsilon} Z(\beta N) + P^4 q^2 + NP^2 q^{\varepsilon} Z(\beta N)) +$$

$$+ (P^4 q^2 + NP^2 q^{\varepsilon} Z(\beta N)) Pq^{-1/3} Z_1(\beta N)\} d\beta,$$

функция $Z(t)$ определена в лемме 1 и $Z_1(t) = \min(1, t^{-1/3})$.

Справедлива оценка

$$R \ll P^{3+\frac{35}{39}} = N^{1+\frac{35}{117}}.$$

Имеем

$$V = N^{-1} \sum_{q \leqslant P^{16/39}} \sum_{0 \leqslant a < q\,(a,q)=1} q^{-7} S^2(a, q) S_1(a, q) e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} \times$$

$$\times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} I^2(t) I_1(t) e^{-2\pi i t} dt + O((Pq^{-1})^{-4/3+\varepsilon}) \right) =$$

$$= N^{-1} \sum_{q \leqslant P^{16/39}} \sum_{0 \leqslant a < q\,(a,q)=1} q^{-7} S^2(a, q) S_1(a, q) e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} I^2(t) I_1(t) e^{-2\pi i t} dt + O\left(N^{-1} \sum_{q \leqslant P^{16/39}} q^{1-7+4+\frac{2}{3}+\varepsilon} P^{-\frac{4}{3}+\varepsilon} q^{\frac{4}{3}-\varepsilon}\right) =$$

$$= N^{-1} \sigma(N) \gamma + O(R_2), \quad R_2 \ll N^{-1} P^{-\frac{16}{117}+\varepsilon},$$

где $\sigma(N)$ и γ определены в следствии.

Таким образом, получим асимптотику величины

$$J_1(N) = N^2 PV + O(R) = N^2 P(N^{-1} \sigma(N) \gamma + O(R_2)) + O(R) =$$

$$= N^{4/3} \sigma(N) \gamma + O(N^{1+\frac{35}{117}}).$$

5. Вклад малых дуг. Асимптотическая формула. Пусть $\alpha \in E_2$, т. е. $\alpha = aq^{-1} + \beta$, $P^{16/39} < q \leqslant \tau = 12P^2$. При таких α имеет место оценка, вывод которой проводится по методу Г. Вейля (см. [3 4]):

$$T_1(\alpha) \ll P^{35/39+\varepsilon}.$$

Отсюда

$$J_2 = \int_{E_2} T^2(\alpha) T_1(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha \ll P^{35/39+\varepsilon} \int_0^1 |T(\alpha)|^2 d\alpha.$$

Из определения $T(\alpha)$ легко видеть, что $\int\limits_0^1 |T(\alpha)|^2 d\alpha$ есть не что иное, как число решений уравнения

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=x_1^3+y_1^3+z_1^3-3x_1y_1z_1,$$

$$x,\ y,\ z,\ x_1,\ y_1,\ z_1 \text{—целые},\ 0\leqslant x,\ y,\ z,\ x_1,\ y_1,\ z_1\leqslant P.$$

Тем самым

$$\int\limits_0^1 |T(\alpha)|^2 d\alpha \ll \Phi(P^3)=\Phi(N),$$

где $\Phi(N)$ была определена в лемме 3 и оценена величиной $\ll N^{1+\varepsilon}$.

Окончательно получим для J_2:

$$J_2 \ll NP^{35/39+\varepsilon} \ll N^{1+\frac{35}{117}+\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$J(N)=J_1+J_2=N^{4/3}\sigma(N)\gamma+O(N^{1+\frac{35}{117}+\varepsilon}),$$

Нам остается доказать, что $\sigma(N)\geqslant c>0$ и $\gamma>0$. Это доказательство совершенно аналогично доказательству положительности сингулярного ряда и сингулярного интеграла проблемы Варинга (см. [5, гл. XI, леммы 3, 4]). Наша теорема доказана.

В заключение сформулируем еще одну теорему, доказательство которой лишь немногим отличается от доказательства основной теоремы.

Теорема. *Для числа $J_n(N)$ представлений натурального N в виде*

$$N=x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3+x_5^3+x_6^3+t^n-3x_1x_2x_3-3x_4x_5x_6,$$

t, x_i*—целые*, $0\leqslant x_i\leqslant N^{1/3}$, $0\leqslant t\leqslant N^{1/n}$, $i=1,\ldots,6$; $n\geqslant 3$, *справедлива асимптотическая формула*

$$J_n(N)=N^{1+\frac{1}{n}}\sigma_n(N)\gamma_n+O(N^{1+\frac{1}{n}-\frac{c_0}{n^2\log n}}),$$

где $\sigma_n(N)\geqslant c_1>0$, $c_0>0$, $\gamma_n>0$, *константа в знаке «O» зависит от n.*

Автор выражает благодарность В. Н. Чубарикову и участникам семинара А. А. Карацубы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линник Ю. В. О разложении больших чисел на семь кубов//Докл. АН СССР. 1942. 35. 179—180.
2. Нгуен Хак Тхань. О кубической форме $x^3+y^3+z^3-3xyz$//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1990. № 3. 103—105.
3. Вейль Г. Избранные труды: Математика. Теоретическая физика. М., 1984.
4. Хуа Ло Кен. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. М., 1964.
5. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М., 1983.

Поступила в редакцию
28.05.90