

3. *Покровский А. В.* Скользящие режимы и стохастические дифференциальные уравнения // Динамика неоднородных систем. М.: ВНИИСИ, 1983. С. 40–45.
4. *Филиппов А. Ф.* Приложения теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью к нелинейным задачам автоматического регулирования // Тр. I междунар. конгр. ИФАК. Теория непрерывных систем. Специальные математические проблемы. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 699–703.
5. *Измайлов Р. Н.* Учет малых запаздываний в дифференциальных уравнениях с разрывными правыми частями // Всесоюзная конференция по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений. Тез. докладов. Кн. 1. Душанбе: Изд-во Таджикского ун-та, 1987. С. 126–127.

Поступила в редакцию
26.XI.1987

ON DETERMINING THE SLIDING VELOCITY ON THE DISCONTINUITY SURFACE

ASARIN Ye. A., IZMAYLOV R. N.

Discontinuous systems are taken up where conventional definitions result in ambiguous modes. Two regularizations (small noise and delay) are discussed and situations are described where a unique mode is obtained.

УДК 517.987

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОЦЕНИВАНИЯ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ИВАНКОВ П. Р., ИВАНОВ Н. М.

(Москва)

Приводятся критерии декомпозируемости нелинейных задач оценивания, обладающих свойствами симметрии. Рассматриваются теоретико-групповые методы, позволяющие представить уравнения, описывающие поведение динамической системы, в виде двух подсистем.

Декомпозиция задач оценивания позволяет представить систему уравнений, описывающих поведение динамической системы, в виде совокупности независимых подсистем меньшей размерности и тем самым упростить алгоритм определения параметров движения. Кроме того, осуществив декомпозицию, можно определить, какие параметры наблюдаемы.

Свойства декомпозируемости, наблюдаемости и симметрии динамических систем тесно взаимосвязаны. Так, например, в работе [1] доказано, что если по данным измерений невозможно определить все компоненты вектора состояния (т. е. динамическая система не является вполне наблюдаемой), то задача оценивания декомпозируема.

Вместе с тем в [2] приведены критерии ненаблюдаемости, основанные на исследовании теоретико-групповых свойств симметрии. Однако в настоящее время отсутствуют теоретико-групповые методы декомпозиции нелинейных задач оценивания. Созданию таких методов посвящена настоящая статья.

1. Симметрия динамических систем

Поведение динамических систем, рассматриваемых в настоящей статье, описывается уравнениями движения и измерений следующего вида:

$$(1) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t),$$

$$(2) \quad \mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t),$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния динамической системы, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ — дифференцируемая вектор-функция из \mathbb{R}^{n+1} в \mathbb{R}^n , $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ — вектор-функция из \mathbb{R}^{n+1} в \mathbb{R}^m , ставящая в соответствие вектору состояния и текущему моменту времени t вектор измерений \mathbf{z} . Очевидно, что при любом фиксированном t функция $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ определяет гладкое векторное поле [3] на \mathbb{R}^n .

Симметрия динамических систем, описываемых уравнениями (1) и (2), характеризуется такой группой G дифференцируемых преобразований фазового пространства \mathbb{R}^n , что при любом значении t выполняются следующие условия: отображение \mathbf{h} инвариантно относительно G ; векторное поле, определяемое $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, инвариантно относительно G [3].

Эти два условия равносильны следующим соотношениям:

$$(3) \quad \mathbf{h}(\mathbf{g}(\mathbf{x}), t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t),$$

$$(4) \quad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{g}(\mathbf{x}), t)$$

для любых $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{g} \in G$. Группу G назовем группой симметрий динамической системы, описываемой уравнениями (1) и (2).

Ниже будет показано, что можно осуществить декомпозицию уравнений движения и измерений, исходя из свойств симметрии.

2. Критерий декомпозируемости задач оценивания с симметрией

Проблема декомпозиции задач оценивания заключается в том, чтобы представить систему уравнений движения и измерений динамической системы в виде совокупности подсистем. В настоящей статье рассматривается задача представления уравнений движения и измерений в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{q}}^1 = \mathbf{v}^1(\mathbf{q}^1, t), \quad \mathbf{z} = \mathbf{h}^1(\mathbf{q}^1, t), \quad \dot{\mathbf{q}}^2 = \mathbf{v}^2(\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, t).$$

Поскольку вид уравнений зависит от выбора фазовых координат, задача декомпозиции сводится к определению подходящей системы координат. В дальнейшем будут использоваться следующие определения. Параметр движения — дифференцируемая функция вектора состояния. Если ξ — такой параметр движения, что $\xi \circ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x})$ для любых $\mathbf{g} \in G$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, то будем говорить, что ξ инвариантен относительно G .

Следующая лемма устанавливает взаимосвязь между свойствами симметрии и декомпозируемости.

Лемма 1. Если существует такая система координат $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ на фазовом пространстве, что ξ_1, \dots, ξ_l ($l < n$) инвариантны относительно группы симметрий G и любой инвариант относительно G параметр является функцией ξ_1, \dots, ξ_l , то уравнения движения и измерений динамической системы могут быть представлены в виде

$$(5) \quad \dot{\mathbf{q}}^1(t) = \mathbf{v}^1(\mathbf{q}^1(t), t),$$

$$(6) \quad \mathbf{z}(t) = \mathbf{h}^1(\mathbf{q}^1(t), t),$$

$$(7) \quad \dot{\mathbf{q}}^2(t) = \mathbf{v}^2(\mathbf{q}^1(t), \mathbf{q}^2(t), t).$$

При этом $\mathbf{q}^1(t)$, $\mathbf{q}^2(t)$ определяются следующим образом:

$$(8) \quad \mathbf{q}^1(t) = (q_1(t), \dots, q_l(t))^T = (\xi_1(x(t)), \dots, \xi_l(x(t)))^T,$$

$$(9) \quad \mathbf{q}^2(t) = (q_{l+1}(t), \dots, q_n(t))^T = (\xi_{l+1}(x(t)), \dots, \xi_n(x(t)))^T.$$

Доказательство леммы приведено в приложении.

Следует отметить, что существование параметров ξ_i ($i=1, \dots, n$), удовлетворяющих условиям леммы 1, зависит от особенностей группы симметрий G .

Учитывая отмеченные особенности, декомпозиция задачи оценивания с симметрией может быть сведена к решению следующих подзадач: определение группы симметрий G ; определение совокупности параметров движения ξ_i ($i=1, \dots, n$), удовлетворяющих условиям леммы 1; составление уравнений (5), (6), (7) в системе координат $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Решение первых двух можно осуществить, исходя из физических особенностей рассматриваемой задачи оценивания, а также используя геометрические методы, изложенные, в частности, в [4, 5], способы определения групп симметрий, приведенные в [2], и следующую лемму.

Лемма 2. Если параметры ξ_1, \dots, ξ_l инвариантны относительно группы преобразований G и существует такое отображение f из \mathbb{R}^l в \mathbb{R}^n , что любой вектор состояния $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ представляется в виде

$$(10) \quad \mathbf{x} = \mathbf{g} \circ f(\xi_1(x), \dots, \xi_l(x)),$$

где $\mathbf{g} \in G$, то любой инвариантный относительно G параметр движения η представляется в виде:

$$(11) \quad \eta(\mathbf{x}) = u(\xi_1(x), \dots, \xi_l(x)),$$

где $u = \eta \circ f$, т. е. η является функцией ξ_1, \dots, ξ_l . Доказательство леммы приведено в приложении.

Для составления уравнений (5), (6), (7) применимы стандартные методы преобразования уравнений при переходе от одной системы координат к другой.

3. Пример

Рассмотрим задачу оценивания параметров плоского движения материальной точки, находящейся в центральном поле сил, по измерениям скорости и расстояния до притягивающего центра. Фазовый вектор \mathbf{x} состоит из четырех компонент x_1, x_2, x_3, x_4 , причем x_1, x_2 — координаты точки, а x_3, x_4 — составляющие вектора скорости. Уравнения движения и измерений имеют вид

$$(12) \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ F(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) x_1 \\ F(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) x_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \sqrt{x_3^2 + x_4^2} \end{pmatrix},$$

где функция F является зависимостью отношения проекции ускорения материальной точки на направление радиус-вектора к расстоянию до притягивающего центра от модуля радиус-вектора.

Определим на \mathbb{R}^4 группу G таких преобразований \mathbf{g}_A , что

$$\mathbf{g}_A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

где A — ортогональная матрица размера 2×2 . Из ортогональности A следует, что если

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \mathbf{g}_A(\mathbf{x}),$$

то

$$(13) \quad \begin{aligned} \sqrt{(x'_1)^2 + (x'_2)^2} &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \sqrt{(x'_3)^2 + (x'_4)^2} &= \sqrt{x_3^2 + x_4^2}. \end{aligned}$$

Используя (13), покажем инвариантность уравнений (12) относительно G . Действительно, в силу (13)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_A}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ AF \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ F \sqrt{(x'_1)^2 + (x'_2)^2} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{g}_A(\mathbf{x})), \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \sqrt{x_3^2 + x_4^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(x'_1)^2 + (x'_2)^2} \\ \sqrt{(x'_3)^2 + (x'_4)^2} \end{pmatrix} = \mathbf{h}(\mathbf{g}_A(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Определим теперь на \mathbb{R}^4 систему координат $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T$, компоненты которой удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\xi_1(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \xi_2(\mathbf{x}) = \frac{x_1 x_3 + x_2 x_4}{\xi_1(\mathbf{x})},$$

$$\xi_3(\mathbf{x}) = \frac{x_1 x_4 - x_2 x_3}{\xi_1(\mathbf{x})},$$

$$\sin(\xi_4(\mathbf{x})) = \frac{x_2}{\xi_1(\mathbf{x})}, \quad \cos(\xi_4(\mathbf{x})) = \frac{x_1}{\xi_1(\mathbf{x})}.$$

Используя (13) и свойства инвариантности скалярного и модуля векторного произведения относительно ортогональных преобразований, нетрудно показать, что ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 инвариантны относительно G . Кроме того, любой вектор \mathbf{x} представляется в виде

$$\mathbf{x} = g_A \circ f(\xi_1(\mathbf{x}), \xi_2(\mathbf{x}), \xi_3(\mathbf{x})),$$

где

$$A = \frac{1}{\xi_1(\mathbf{x})} \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \quad f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1, 0, \xi_2, \xi_3)^T.$$

В силу леммы 2 любой инвариантный относительно G параметр является функцией ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 . Поэтому система координат ξ удовлетворяет всем условиям леммы 1 и, следовательно, при переходе к фазовым координатам ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , ξ_4 уравнения (12) преобразуются к виду (5), (6), (7). Приведем эти уравнения:

$$\dot{q}_1(t) = q_2(t), \quad \dot{q}_2(t) = F(q_1(t))q_1(t) + \frac{q_3^2(t)}{q_1(t)},$$

$$\dot{q}_3(t) = -\frac{q_2(t)q_3(t)}{q_1(t)},$$

$$z_1(t) = q_1(t), \quad z_2(t) = \sqrt{q_2^2(t) + q_3^2(t)}, \quad \dot{q}_4(t) = \frac{q_3(t)}{q_1(t)},$$

где $q_i(t) = \xi_i(\mathbf{x}(t))$ ($i=1, 2, 3, 4$).

4. Заключение

Сравнение способов декомпозиции показывает, что при решении одних задач лучше использовать теоретико-групповой метод анализа, при решении других — известные ранее способы, изложенные, в частности, в [4]. Все зависит от того, насколько трудно определить группу симметрий динамической системы. Поэтому целесообразно производить выбор метода декомпозиции, исходя из условий конкретной задачи. При этом теоретико-групповой подход в ряде случаев позволяет существенно сократить математические выкладки, необходимые для осуществления декомпозиции задач оценивания.

Авторы благодарят профессора Брандина В. Н. за полезные замечания, высказанные им при подготовке статьи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Введем следующие обозначения:

$$\xi(\mathbf{x}) = (\xi_1(\mathbf{x}), \dots, \xi_n(\mathbf{x}))^T,$$

$$\xi^1(\mathbf{x}) = (\xi_1(\mathbf{x}), \dots, \xi_l(\mathbf{x}))^T,$$

$$\xi^2(\mathbf{x}) = (\xi_{l+1}(\mathbf{x}), \dots, \xi_n(\mathbf{x}))^T.$$

В силу (1), (8) имеем

$$(14) \quad \dot{\mathbf{q}}^1(t) = \left. \frac{\partial \xi^1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{w}(\mathbf{x}(t), t).$$

Из инвариантности ξ^1 следует

$$(15) \quad \xi^1(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \xi^1(\mathbf{x}).$$

Дифференцируя левую и правую части (15) по \mathbf{x} , имеем

$$(16) \quad \left. \frac{\partial \xi^1(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}'} \right|_{\mathbf{x}'=\mathbf{g}(\mathbf{x})} \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \xi^1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}.$$

Используя (14), (15) и (16), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial \xi^1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial \xi^1(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}'} \right|_{\mathbf{x}'=\mathbf{g}(\mathbf{x})} \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}', t) = \\ &= \left. \frac{\partial \xi^1}{\partial \mathbf{x}'} \right|_{\mathbf{x}'=\mathbf{g}(\mathbf{x})} \mathbf{v}(\mathbf{g}(\mathbf{x}), t) = \mathbf{w}(\mathbf{g}(\mathbf{x}), t), \end{aligned}$$

т. е. $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ при фиксированном t является инвариантной относительно G функцией. Так как любой инвариантный относительно G параметр является функцией $\xi^1 = (\xi_1, \dots, \xi_l)^T$, имеем

$$(17) \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}^1(\xi^1(\mathbf{x})).$$

Из (8) и (17) следует, что

$$(18) \quad \dot{\mathbf{q}}^1(t) = \mathbf{v}^1(\mathbf{q}^1(t)).$$

В силу инвариантности \mathbf{h} относительно G имеет место соотношение

$$(19) \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{h}(\xi^1(\mathbf{x}), t).$$

Сравнивая (8) и (19), имеем

$$(20) \quad \mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{q}^1(t), t).$$

Очевидно, что

$$\dot{\mathbf{q}}^2(t) = \left. \frac{\partial^2 \xi}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{w}^2(\mathbf{x}(t), t).$$

Так как $\xi = (\xi^{1T}, \xi^{2T})$ является системой координат на \mathbb{R}^n , то пара векторов $\xi^1(\mathbf{x}), \xi^2(\mathbf{x})$ однозначно определяет \mathbf{x} и, следовательно, функция \mathbf{w}^2 может быть представлена в виде:

$$(21) \quad \mathbf{w}^2(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}^2(\xi^1(\mathbf{x}), \xi^2(\mathbf{x}), t).$$

Подставляя (8), (9) в (21), имеем

$$(22) \quad \dot{\mathbf{q}}^2(t) = \mathbf{v}^2(\mathbf{q}^1(t), \mathbf{q}^2(t), t).$$

Соотношения (18), (20), (22) есть не что иное, как выражения (5), (6), (7). Доказательство завершено.

Доказательство леммы 2. Из (10) следует, что

$$\eta(\mathbf{x}) = \eta \circ \mathbf{g} \circ \mathbf{f}(\xi_1(\mathbf{x}), \dots, \xi_l(\mathbf{x})) = \eta \circ \mathbf{f}(\xi_1(\mathbf{x}), \dots, \xi_l(\mathbf{x})).$$

В силу инвариантности η относительно G имеем $\eta \circ \mathbf{g} = \eta$ ($\mathbf{g} \in G$), и, следовательно, справедливо соотношение

$$\eta(\mathbf{x}) = \eta(\xi_1(\mathbf{x}), \dots, \xi_l(\mathbf{x})).$$

Доказательство завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брандин В. Н., Разоренов Г. Н. Условия декомпозируемости нелинейных динамических систем // *АиТ*. 1976. № 12. С. 5–12.
2. Борецкий И. Ф., Павлов В. Г. Теоретико-групповая интерпретация чувствительности гладких динамических систем // *АиТ*. 1980. № 12. С. 5–10.
3. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.
4. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М.: Наука, 1971.
5. Крафт Х. Геометрические методы в теории инвариантов. М.: Мир, 1987.

Поступила в редакцию
27.X.1987

GROUP-THEORETIC METHODS OF DECOMPOSING NONLINEAR PROBLEMS OF ESTIMATING THE STATE VECTOR OF DYNAMIC SYSTEMS

IVANKOV P. R., IVANOV N. M.

Criteria are provided for decomposability of nonlinear estimation problems having symmetry properties. Group-theoretic methods are considered which make it possible to represent equations that describe the behavior of the dynamic system as two subsystems.

УДК 519.837

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА ГРУППОВОГО ПОИСКА ОБЪЕКТА

КЛИМЕНКО Е. В., СКОПЕЦКИЙ В. В., ЧИКРИЙ А. А.

(Киев)

Рассматривается задача оптимизации вероятности обнаружения одного убегающего группой управляемых объектов на конечном интервале времени. Исследуется поиск с обменом и без обмена информацией в группе, даются необходимые условия оптимальности для выбора управлений при априорной информированности. Указывается способ оптимизации скрытного поиска, а также учета зависимости радиуса обнаружения от скоростей игроков. Роль обмена информацией в группе иллюстрируется на простом модельном примере.

1. Введение

Динамические задачи поиска в игровой постановке рассматривались в ряде работ [1–11]. Многообразие математических идеализаций определяет различие в методах исследования игровых задач поиска движущихся объектов. Один из возможных подходов развивается в настоящей работе, продолжающей исследования [2, 3, 11]. Вместо уравнений движения игроков на конечном множестве состояний задается закон преобразования функции распределения состояния, причем переходная матрица зависит от управлений игроков. Строится функционал игры — вероятность обнаружения убегающего на конечном интервале времени. Оптимизация этого функционала осуществляется на основе методов [12–14]. При этом в единой схеме охватываются ситуации с обменом и без обмена информацией в группе, скрытный поиск, учитывается зависимость радиуса обнаружения от скоростей игроков [15, 16]. Предложенную модель поиска