

15. Каратопраклиев Г. Д. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 59—63.  
 16. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М., 1973.  
 17. Каратопраклиева М. Г. // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. София. 1985.  
 18. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М., 1959. Т. 5.

Народная Республика Болгария

Поступила в редакцию  
3 июля 1986 г.

УДК 517.95

А. Г. КУЗЬМИН

## УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

В последние годы значительное внимание в литературе, посвященной уравнениям смешанного типа, уделяется вопросам спектральной теории [1, с. 378; 2—7]; при этом рассматриваются уравнения Чаплыгина и Лаврентьева — Бицадзе. В данной работе рассматривается уравнение, имеющее независимую переменную  $t$  типа времени и равномерно эллиптический оператор по пространственным переменным  $x = (x_1, \dots, x_n)$ :

$$Lu \equiv ku_{tt} + a_{ij}u_{x_i x_j} + \alpha u_t + \beta i u_{x_i} + cu = f, \quad a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \mu \xi^2, \quad (1)$$

где  $u_t = du/dt$ ;  $u_{x_i} = du/dx_i$ ;  $a_{ij} \equiv a_{ji}$  и по дважды повторяющемуся в одночлене индексу подразумевается суммирование от 1 до  $n$ . Коэффициенты и правая часть уравнения (1) являются функциями  $x$  и  $t$ , причем  $k(x, t)$ , вообще говоря, изменяет знак в заданной области  $D$ .

В работах [8—12] доказаны априорные оценки для решений некоторых краевых и начально-краевых задач для уравнения (1) при весьма слабых ограничениях на коэффициенты. Доказана фредгольмова разрешимость этих задач для уравнения

$$L_\lambda u \equiv Lu - \lambda u \quad (2)$$

с вещественным параметром  $\lambda$ . Постановка задач зависит от знака коэффициента  $k$  на основаниях цилиндрической области  $D$ . На разрешимость задач существенным образом влияют значения коэффициента  $\alpha$  на множестве  $K$  тех точек поверхности вырождения типа, которые или являются характеристическими, или расположены на боковой границе области  $D$ .

Таким образом, установленные в [8—12] результаты для уравнения (1), в целом аналогичны классическим теоремам для эллиптических уравнений, а также известным результатам о фредгольмовой разрешимости задачи Трикоми [2—4]. Отличительной чертой уравнения (1) является необходимость наложения некоторых ограничений на коэффициент  $\alpha$  на множестве  $K$ . Близкие результаты для более простого уравнения были получены в [13], однако некоторые утверждения этой работы нуждаются в переработке [14]. Уравнения вида (1), содержащие, кроме того, смешанную производную  $u_{tx_i}$ , рассмотрены в [10].

В данной работе доказана фредгольмова разрешимость задач для уравнения (2) в энергетическом классе (в отличие от [8—12], где рассматривалось пространство Соболева  $W_2^2(D)$ ). Исследованы сопряженные задачи. Выявлены направления распространения особенностей решения в гиперболических частях области  $D$ . Показано, что с точки зрения гладкости решений уравнение (1) обладает свойствами, аналогичными свойствам гиперболических уравнений, если  $\alpha$  достаточно велико.

В частном случае при  $k \leq 0$  в области  $D$  полученные результаты по

существованию совпадают с известными результатами для гиперболо-параболических уравнений вида (1) [15—18], а при  $k < 0$  — с классическими результатами для гиперболических уравнений [19].

В другом частном случае, когда  $k \geq 0$  в  $D$ , полученные для уравнения (1) результаты согласуются с теорией Фикеры для эллиптико-параболических уравнений [20—22], хотя в этом случае уравнение (1) представляет более узкий класс эллиптико-параболических уравнений, чем тот, для которого развита теория Фикеры, из-за отсутствия  $u_{ix_i}$  и ограничения  $a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \mu\xi^2$ . Выражение  $2\alpha - k_t$  играет ту же роль при изучении уравнения (1) в энергетическом классе, что и функция Фикеры при изучении эллиптико-параболических уравнений в  $L_p(D)$  или в  $W_2^1$  с весом.

Уравнение смешанного типа (1) изучалось в работах [23—30], в которых, однако, не затрагивался вопрос о фредгольмовой разрешимости задач и не проводилось сравнение с теориями гиперболо-параболических и эллиптико-параболических уравнений. В работах [23—25] был использован метод  $\varepsilon$ -регуляризации уравнения (1) уравнением третьего порядка; в [26] применен метод Лакса — Филлипса, включающий технику сглаживающих операторов для доказательства существования сильного решения. В работе [28] существование решения доказано методом Галеркина. В [29] использован метод Ладыженской — Вишика для нестационарных операторных уравнений; в [27, 30] — метод конечных разностей.

**1. Постановка задач. Основные леммы.** Обозначим через  $\Omega \subset R^n$  ограниченную область переменного  $x$  с границей  $\partial\Omega \in C^2$  [19, с. 117]. Пусть  $D = \{(x, t) : x \in \Omega, 0 < t < T\}$  — цилиндрическая область с боковой границей  $S$ . Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют следующим требованиям гладкости:  $k, a_{ij} \in C^2(\bar{D})$ ;  $\alpha, \beta_i, c \in C^1(\bar{D})$ .

Предположим, что коэффициент  $k(x, t)$  сохраняет знак на основаниях области  $D$ . Рассмотрим задачи [23—26]: найти решение  $u(x, t)$  уравнения (2) в области  $D$ , удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} &\text{при } t=T \text{ если } k > 0, \text{ то } u=0 \quad \forall x \in \Omega, \text{ если } k < 0, \text{ то } u=u_t=0 \quad \forall x \in \Omega, \\ &\text{при } t=0 \text{ если } k > 0, \text{ то } u=0 \quad \forall x \in \Omega, \text{ если } k < 0, \text{ то условие не ставится,} \\ &\text{на } S \quad u=0. \end{aligned} \quad (3)$$

Задача (2), (3) по существу распадается на четыре задачи, которые ниже будут изучаться параллельно.

Обозначим через  $W_{2,L}^1(D)$  подпространство пространства  $W_2^1(D)$ , полученное путем замыкания множества гладких в  $\bar{D}$  функций, удовлетворяющих условиям (3), по норме  $\|u\|_1$ , если задано  $u=0$  при  $t=T$  (см. (3)), и по норме  $\|u\|_1 + \max_{T-\varepsilon \leq t \leq T} \left( \int_{\Omega_t} (|k|u_t^2 + a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} + u^2) dx \right)^{1/2}$ ,

если задано  $u=u_t=0$  (здесь  $\varepsilon > 0$  — достаточно малое число). Через  $\|u\|_l$  здесь и далее обозначены нормы в пространствах Соболева  $W_2^l(D)$ . Рассмотрим неограниченный оператор  $L_\lambda$ , действующий из  $W_{2,L}^1(D)$  в  $L_2(D)$ . В качестве его области определения возьмем совокупность  $W_{2,L}^2(D)$  функций из  $W_2^2(D)$ , удовлетворяющих условиям (3). Легко показать, что оператор  $L_\lambda$  допускает замыкание. Область определения замкнутого оператора  $\bar{L}_\lambda$  обозначим через  $V_L^1(D)$  и назовем энергетическим классом решений задачи (2), (3).

Эквивалентное определение класса  $V_L^1(D)$  можно дать путем замыкания оператора  $A$ , действующего из  $W_2^1(D)$  в  $L_2(D)$ , если задано  $u=0$  при  $t=T$ , и в пространство  $L_2(D) \times L_2(\Omega)$ , если задано  $u=u_t=0$ . В последнем случае каждой функции  $u$  из области определения  $W_{2,L}^2(D)$  оператора  $A$  ставится в соответствие пара  $\{L_\lambda u, u_t(x, T)\}$  [19, с. 229].

Очевидно,  $W_{2,L}^2(D) \subseteq V_L^1(D) \subseteq W_{2,L}^1(D)$ . В частности, если  $k(x, t) \geq \delta > 0$  в области  $D$ , то класс  $V_L^1(D)$  совпадает с  $W_{2,L}^2(D)$  [19, с. 12]. Если  $k(x, t) \leq -\delta < 0$  в области  $D$ , то решения из класса  $V_L^1(D)$  являются решениями из энергетического класса в смысле обычного определения таких решений для гиперболических уравнений [19, с. 209]. Это оправдывает название класса  $V_L^1(D)$  как энергетического, хотя для уравнения смешанного типа (2) обычную оценку интеграла  $\int (|k|u_t^2 + a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} + u^2) dx$  по  $\Omega_t$  при  $0 \leq t \leq T$  получить нельзя и, следовательно, нельзя использовать обычную энергетическую норму для описания класса  $V_L^1(D)$ .

Сопряженная задача имеет вид

$$L^+v - \lambda v \equiv kv_{tt} + (a_{ij}v)_{x_i x_j} + (2k_t - \alpha)v_t - (\beta_i v)_{x_i} + (c + k_{tt} - \alpha_t - \lambda)v = g, \quad (4)$$

при  $t=T$  если  $k > 0$ , то  $v=0 \quad \forall x \in \Omega$ ,  
если  $k < 0$ , то условие не ставится,

при  $t=0$  если  $k > 0$ , то  $v=0 \quad \forall x \in \Omega$ ,  
если  $k < 0$ , то  $v=v_t=0 \quad \forall x \in \Omega$ ,  
на  $S \quad u=0$ . (5)

Аналогично определению  $V_L^1(D)$  дается определение энергетического класса решений  $V_{L^+}^1(D)$  для сопряженной задачи (4), (5).

Везде далее черту в обозначениях  $\bar{L}_\lambda$  и  $\bar{L}_\lambda^+$  будем опускать.

Наложим теперь некоторые ограничения на поверхность вырождения типа  $l$  уравнения (2). Пусть поверхность  $l$ , определяемая уравнением  $k(x, t)=0$ , состоит из гладких замкнутых поверхностей или поверхностей с краем, расположенным на боковой границе  $S$ , причем ее можно представить в виде суммы конечного числа участков, на которых  $|k_t| \geq \delta > 0$  или  $|k_{x_i}| \geq \delta > 0$ . Пусть характеристические точки поверхности  $l$  (т. е. точки, в которых нормаль к поверхности параллельна оси  $t$ ) изолированы или образуют плоские области с границей из  $C^2$ , причем таких областей и изолированных характеристических точек конечное число.

**Лемма 1.** Пусть выполнено условие

$$2\alpha - k_t > 0 \text{ на множестве } K \quad (6)$$

и  $\lambda$  достаточно велико или диаметры эллиптических частей области  $D$  достаточно малы. Тогда задача (2), (3) однозначно разрешима в классе  $V_L^1(D)$  при  $\forall f \in L_2(D)$ .

**Доказательство.** В условиях леммы 1 справедливо неравенство

$$m \|u\|_1 \leq \|L_\lambda u\|_0 \quad (7)$$

для  $\forall u \in V_L^1(D)$ . Здесь и далее через  $m$  обозначены положительные, вообще говоря, разные постоянные, не зависящие от функции  $u$ . Неравенство (7) доказано в [8] при достаточно большом  $\lambda$  и условии  $k(x, 0) \leq 0$  или при условии  $k(x, 0) > 0$  и  $u_t(x, 0) = 0$ . Если же  $k(x, 0) > 0$  и в соответствии с (3) задано  $u(x, 0) = 0$ , то неравенство (7) доказывается путем рассмотрения интеграла  $\int_D L_\lambda u (tu_t + h_{ij}u_{x_i} - rku) e^{mt} dD$ , отличающегося от соответствующего интеграла в [8] множителем перед  $u_t$ .

Если  $\lambda$  фиксировано и  $k(x, t) \leq 0$  в области  $D$ , причем имеются изолированные точки вырождения типа, то оценка (7) следует из интеграла  $\int L_\lambda u \cdot u_t e^{mt} dD$ ; в этом случае член  $(\lambda - c)uu_t e^{mt}$  интегрировать по частям

не нужно [16]. В силу непрерывной зависимости последнего интеграла от коэффициентов оператора  $L_\lambda$  получаем, что при фиксированном  $\lambda$  и достаточно малых диаметрах эллиптических частей области  $D$  оценка (7) также остается в силе. Из неравенства (7) следует единственность решения задачи (2), (3) в энергетическом классе.

Существование решения из энергетического класса докажем методом продолжения по параметру с привлечением результатов [23—26]. Положим  $L^0 u \equiv k u_{tt} + (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + \alpha_0 u_t - \lambda u$ . Оператор  $L^0$  из всего  $V_L^1(D)$  на  $L_2(D)$  имеет ограниченный обратный  $(L^0)^{-1}$  при условии достаточно большого  $\alpha_0$  и  $\forall \lambda \geq 0$  [23—26]; условие  $(a_{ij})_t \xi_i \xi_j \geq 0$ , которое требуется в этих работах, легко обеспечить, умножая при необходимости уравнение  $L^0 u = f$  на  $e^{\nu t}$  с достаточно большим  $\nu$ . Рассмотрим теперь семейство уравнений  $L^\nu u \equiv L^0 u + \gamma[(\alpha - \alpha_0) u_t + \{\beta_i - (a_{ij})_{x_j}\} u_{x_i} + cu] = f$ , где  $0 \leq \gamma \leq 1$ ,  $L^1 \equiv L_\lambda$ . Оно эквивалентно семейству уравнений  $u + \gamma(L^0)^{-1}[(\alpha - \alpha_0) u_t + \{\beta_i - (a_{ij})_{x_j}\} u_{x_i} + cu] = (L^0)^{-1} f$  в классе  $V_L^1(D)$ . Оценивая в  $W_2^1(D)$  норму второго слагаемого в левой части, получаем разрешимость при  $0 \leq \gamma \leq \gamma_1$ , где  $\gamma_1$  достаточно мало. Очевидно, решение  $u \in W_2^1(D)$  принадлежит  $V_L^1(D)$ . Далее, с использованием оценки  $m \|u\|_1 \leq \|L^\nu u\|_0$ ,  $u \in V_L^1(D)$ , равномерной по  $\gamma$ , легко получить разрешимость уравнения  $L^\nu u = f$  при  $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$ . Таким образом, за конечное число шагов получаем разрешимость в классе  $V_L^1(D)$  для значений параметра  $0 \leq \gamma \leq 1$  и, в частности, разрешимость уравнения  $L^1 u = f$ , т. е. задачи (2), (3). Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** Пусть выполнено условие

$$2\alpha - 3k_t > 0 \text{ на множестве } K \quad (8)$$

и  $\lambda$  достаточно велико или диаметры эллиптических частей области  $D$  достаточно малы. Тогда сопряженная задача (4), (5) однозначно разрешима в классе  $V_{L^+}^1(D)$  при  $\forall g \in L_2(D)$ .

Для доказательства заменим в уравнении (4)  $t$  на  $T - \tau$  и  $v$  на  $u$ . Тогда получим задачу вида (2), (3) с коэффициентами при  $u_{\tau\tau}$  и  $u_\tau$ , равными  $k_1 = k(x, T - \tau)$  и  $\alpha_1 = \alpha - 2k_t$  соответственно. Согласно (6), последняя задача однозначно разрешима при  $2\alpha_1 - (k_1)_\tau = 2\alpha - 3k_t > 0$  на множестве  $K$ , что выполнено в силу (8).

Таким образом, в условиях лемм 1 и 2 существуют ограниченные обратные операторы  $(L_\lambda)^{-1}$  и  $(L_\lambda^+)^{-1}$ , отображающие взаимно однозначно  $L_2(D)$  на  $V_L^1(D)$  и  $V_{L^+}^1(D)$  соответственно.

## 2. Фредгольмова разрешимость задач в классе $V_L^1(D)$ .

**Теорема 1.** Пусть выполнено условие (6) и  $f \in L_2(D)$ . Тогда задача (2), (3) однозначно разрешима в  $V_L^1(D)$  при всех вещественных  $\lambda$ , кроме не более чем счетного числа значений  $\lambda = \lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Единственной предельной точкой для  $\{\lambda_i\}$  может быть лишь  $\lambda = -\infty$ . При этих и только этих значениях  $\lambda = \lambda_i$  задача (2), (3) с  $f \equiv 0$  имеет нетривиальные решения, причем каждому  $\lambda_i$  соответствует лишь конечное число линейно независимых решений.

2. Пусть, кроме условия (6), выполнено условие (8). Тогда значения  $\lambda = \lambda_i$  являются также собственными значениями сопряженной задачи (4), (5), причем  $\lambda_i$  для нее имеют ту же кратность, что и для задачи (2), (3). Соответствующие собственные функции  $v_{ij}$  принадлежат  $V_{L^+}^1(D)$ .

Для разрешимости задачи (2), (3) при  $\lambda = \lambda_i$  необходимо и достаточно выполнения условий ортогональности  $f$  ко всем функциям  $v_{ij}$  при том же  $i$ .

**Доказательство.** Перепишем уравнение (2) с любым вещественным  $\lambda$  в виде  $L_\lambda u \equiv Lu - \lambda_0 u = f + (\lambda - \lambda_0)u$ . Выбирая  $\lambda_0$  достаточно большим, получаем в левой части оператор, имеющий ограниченный

обратный, действующий из  $L_2(D)$  в  $V_L^1(D)$  (лемма 1). Поэтому последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$u = (\lambda - \lambda_0) L_{\lambda_0}^{-1} u + L_{\lambda_0}^{-1} f. \quad (9)$$

С учетом полной непрерывности вложения  $V_L^1(D)$  в  $L_2(D)$  получаем, что  $L_{\lambda_0}^{-1}$  — вполне непрерывный оператор как оператор из  $L_2(D)$  в  $L_2(D)$ . Отсюда следует первое утверждение теоремы 1.

Переходим к доказательству второго утверждения теоремы. Уравнение (9) и уравнение с сопряженным оператором

$$v = (\lambda - \lambda_0) (L_{\lambda_0}^{-1})^* v + g_1 \quad (10)$$

составляют фредгольмову пару в  $L_2(D)$ . Чтобы перейти от уравнения (10) к задаче (4), (5), докажем, что  $(L_{\lambda}^{-1})^* = (L_{\lambda}^+)^{-1}$  при достаточно большом  $\lambda$ . Для любых  $u \in V_L^1(D)$ ,  $v \in V_{L^+}^1(D)$  в условиях теоремы 1 имеем  $(L_{\lambda} u, v) = (u, L_{\lambda}^+ v)$ . Обозначим  $L_{\lambda} u$  через  $\varphi$  и  $L_{\lambda}^+ v$  — через  $\psi$ . Тогда  $(\varphi, (L_{\lambda}^+)^{-1} \psi) = (L_{\lambda}^{-1} \varphi, \psi)$ , причем  $\varphi$  и  $\psi$  пробегают все  $L_2(D)$  (леммы 1 и 2). Отсюда  $(L_{\lambda}^{-1})^* = (L_{\lambda}^+)^{-1}$ . Последнее соотношение позволяет переписать уравнение (10) в виде (4) с  $g = L_{\lambda_0} g_1$ . Отсюда следует, что собственные значения  $\lambda_i$  и функции  $v_{ij}$  уравнения (10) являются собственными значениями и функциями задачи (4), (5). Для разрешимости уравнения (9) при  $\lambda = \lambda_i$  необходимо и достаточно выполнения условий  $\int L_{\lambda_0}^{-1} f \cdot v_{ij} dD = 0$ , которые можно переписать в виде

$$\int f \frac{v_{ij}}{\lambda - \lambda_0} dD = 0. \text{ Теорема 1 полностью доказана.}$$

Заметим, что оператор  $L$  является симметрическим, если  $\alpha \equiv k_t$ ,  $\beta_i \equiv (a_{ij})_{x_j}$ , при этом  $Lu \equiv (ku_t)_t + (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + cu$ . Если, кроме того,  $k(x, 0) > 0$ ,  $k(x, T) > 0$ , и в соответствии с (4) задано условие  $u = 0$  на основаниях области  $D$ , то задача (2), (3) является формально самосопряженной. Однако для нее условие однозначной разрешимости (6) в классе  $V_L^1(D)$  не может быть выполнено на всем множестве  $K$ . Если же  $k(x, 0) < 0$ ,  $k(x, T) < 0$ , то задача (2), (3) и сопряженная задача (4), (5) однотипны точно так же, как в теории гиперболических уравнений [19, с. 233].

### 3. О принадлежности решений пространству $W_2^2(D)$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнено условие (6), кроме того,  $2\alpha + k_t > 0$  на множестве  $K$  и  $f \in W_2^1(D)$ . Тогда всякое решение  $u \in V_L^1(D)$  задачи (2), (3) принадлежит пространству  $W_2^2(D)$ .

**Доказательство.** Пусть  $u \in V_L^1(D)$  — решение задачи (2), (3) с  $f \in W_2^1(D)$ . Его можно представить как решение уравнения  $L_{\lambda_0} u = f + (\lambda - \lambda_0) u \in W_2^1(D)$  с краевыми условиями (3). Так как  $2\alpha + k_t > 0$  на множестве  $K$ , то последняя задача при достаточно большом  $\lambda_0$  имеет решение  $\bar{u} \in W_{2,L}^2(D)$  [8]. В силу единственности решения этой задачи в классе  $V_L^1(D)$  (лемма 1) получаем  $\bar{u} = u$ , что и доказывает теорему 2.

Легко видеть, что решение  $u \in W_{2,L}^2(D)$  фактически принадлежит более узкому классу  $V_L^2(D)$  функций из  $W_{2,L}^2(D)$  таких, что  $L_{\lambda} u \in W_2^1(D)$ . Вместо  $f \in W_2^1$  в теореме 2 можно потребовать  $f_t \in L_2$ .

Рассмотрим теперь вопрос о распространении особенностей решения в области  $D$ . Обозначим через  $M$  некоторую точку, расположенную в гиперболической части области  $D$ , через  $G_{\varepsilon}$  — шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $M$ .

**Теорема 2'.** Пусть выполнены условия теоремы 1, кроме того,  $f \in W_2^1(D \setminus G_{\varepsilon})$  и  $2\alpha + k_t > 0$  на множестве  $K$ . Тогда всякое решение

$u \in V_L^1(D)$  задачи (2), (3) принадлежит  $W_2^2(D_M)$ , где  $D_M = D \cap (t > t_M + 2\epsilon)$ .

Доказательство. Пусть  $u \in V_L^1(D)$  — решение задачи (2), (3). Рассматривая функцию  $u$  как решение уравнения  $L_{\lambda_0} u = f_1 = f + (\lambda - \lambda_0) u$  и аппроксимируя правую часть  $f_1$  функциями  $f_1^i \in W_2^1(D)$  в норме  $L_2(D)$ , получаем последовательность решений  $u_i \in W_{2,L}^2(D)$ , аппроксимирующую  $u$  в норме  $W_2^1(D)$ . Вводя срезающую функцию  $\varphi(t)$ , равную нулю при  $t \leq t_M + 3\epsilon/2$  и единице при  $t \geq t_M + 2\epsilon$ , легко получить для  $v_i = \varphi u_i$ ,

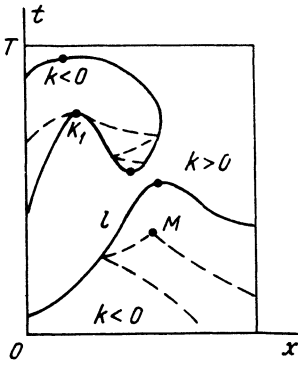


Рис. 1

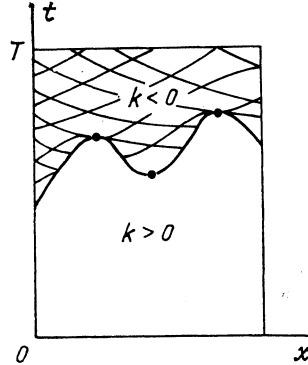


Рис. 2

что  $Lv_i \in W_2^1(D)$ , причем  $m \|v_i\|_2 \leq \|L_{\lambda_0} v_i\|_1$ , откуда  $\|v_i - v_j\|_2 \rightarrow 0$  при  $i, j \rightarrow \infty$ , что и доказывает теорему 2'.

Теорема 2' показывает, что особенности решения задачи (2), (3) при условии (6) распространяются в отрицательном направлении оси  $t$ . Легко доказать, что особенности распространяются по существу вблизи характеристического коноида с вершиной в точке  $M$  (рис. 1). При этом если боковая поверхность коноида пересекается с поверхностью вырождения типа  $l$ , то возмущение, исходящее из точки  $M$ , достигает эллиптической части области и распространяется в ней (а также вдоль поверхности  $l$ ) как в отрицательном, так и в положительном направлении оси  $t$ . Таким образом, изменение  $f$  в окрестности  $G_\epsilon$  может повлиять, вообще говоря, на значения решения  $u$  в любой точке области  $D$ . Однако если рассматривать не возмущения, а особенности, то они распространяются именно в отрицательном направлении оси  $t$ , так как после выхода особенностей на параболическую поверхность  $l$  они сглаживаются в силу локальных свойств эллиптических и параболических уравнений. Описанное свойство решений задачи (2), (3) тесно связано с распространением малых возмущений в соплах Лавала и газовых струях [12, 31, 32]. Гиперболической части области  $D$  соответствует область сверхзвукового течения газа, где возмущения сносятся потоком газа в направлении сверху вниз. При этом возмущения распространяются также в боковых направлениях, и если они достигают дозвуковой области, то распространяются в ней во всех направлениях, включая направление вверх по течению.

Аналогично можно проследить распространение особенностей решения от некоторой точки  $K_1 \in K$ , в которой нарушено условие  $2\alpha + k_t > 0$ , если в остальных точках множества  $K$  это условие выполнено и, кроме того,  $f \in W_2^1(D)$  (рис. 1).

4. О значениях  $\alpha$  на множестве  $K$ . Отмеченное в предыдущем абзаце свойство показывает, что ограничения вида  $2\alpha + (2i - 3)k_t > 0$ ,  $i = 1, 2$ , использованные выше и в [23—30], возникают в связи с влиянием коэффициента  $\alpha$  на поведение решений уравнения (2) вблизи множества  $K$ . Это влияние можно подробно проследить на примере обыкновенного дифференциального уравнения  $tu_{tt} + \alpha_0 u_t + c_0 u = f(t)$ ,  $\alpha_0, c_0 = \text{const}$ , где величина  $\alpha_0$  определяет порядок нулей или бесконечностей

решений в особой точке  $t=0$  (см. также [33]). Таким образом, роль коэффициента  $\alpha$  для уравнения (2) можно сравнить с той ролью, которую играет величина угла излома границы при изучении эллиптических уравнений в областях с нерегулярной границей.

В данном пункте, не затрагивая вопроса о локальных свойствах решений уравнения (2) вблизи множества  $K$ , мы отметим условия принадлежности решений задачи (2), (3) пространствам  $W_2^l(D_\eta)$  при  $l=3, 4, \dots$ , где  $D_\eta = \{(x, t) : x \in \Omega, \eta < t < T - \eta\}$  ( $0 < \eta < T/2$ ).

Решение  $u \in V_L^1(D)$  задачи (2), (3) принадлежит пространству  $W_2^l(D_\eta)$ ,  $l \geq 2$ , если  $2\alpha + (2i-3)k_i > 0$  на множестве  $K$  при  $i=1, 2, \dots, l$  и, кроме того,  $f \in W_2^{l-1}(D)$ . Если при этом  $k(x, T) < 0$  и  $l > 2$ , то должны быть выполнены условия согласования начальных и граничных данных при  $t=T$ . Доказательство этого утверждения проводится методом продолжения по параметру с привлечением результатов [24]. Указанные ограничения на  $\alpha$  являются достаточными, но не необходимыми условиями принадлежности решений пространствам  $W_2^l$ . В работе [9] доказана однозначная разрешимость некоторых задач в  $V_L^2(D)$  при выполнении только одного условия  $2\alpha + k_i > 0$  на множестве  $K$  и достаточно большом  $\lambda$ .

Заметим, что неравенство  $2\alpha + (2i-3)k_i > 0$  выполнено для  $i=2, 3, \dots$ , если  $2\alpha - k_i > 0$  и  $k_i > 0$ . С другой стороны, если  $k_i < 0$ , то для неравенства  $2\alpha + (2i-3)k_i > 0$  при большом  $i$  требуется достаточно большое  $\alpha$ . Таким образом, получаем, что с точки зрения гладкости решений уравнение смешанного типа (2) обладает теми же свойствами, что и гиперболические уравнения, если  $\alpha$  достаточно велико.

Если  $\alpha$  достаточно мало, а именно  $2\alpha - k_i < 0$  на множестве  $K$ , то задача (2), (3) может быть некорректной в  $V_L^1(D)$ ; при этом может нарушаться единственность или решения может не существовать. Действительно, в этом случае оказывается однозначно разрешимой задача, в которой на нижнем гиперболическом основании заданы начальные данные, а верхнее гиперболическое основание свободно от граничных условий. Такая задача сводится к задаче (2), (3) путем замены  $t$  на  $T - \tau$ . При этом условие  $2\alpha - k_i < 0$  переходит в условие  $2\alpha_2 - (k_2)_\tau > 0$ , где  $\alpha_2 = -\alpha(x, T - \tau)$ ,  $(k_2)_\tau = k(x, T - \tau)$ . Особенности решения в этом случае распространяются в положительном направлении оси  $t$  (см. теорему 2').

Важность неравенств  $2\alpha - k_i > 0$  и  $2\alpha - k_i < 0$  для постановки граничных условий ясно видна из сравнения со случаем параболического уравнения (такое сравнение представляет интерес, хотя параболические уравнения и не охватываются теоремами 1—2' из-за ограничений, наложенных на поверхность вырождения типа). А именно пусть  $k \equiv 0$  в области  $D$ , тогда указанные два неравенства принимают вид  $\alpha > 0$  и  $\alpha < 0$ . Это соответствует известному факту, что при положительных  $\alpha$  и  $k \equiv 0$  в  $D$  для параболического уравнения (2) корректна задача с начальными данными на основании  $t=T$  области  $D$ , а при отрицательных  $\alpha$  — на основании  $t=0$ .

Проследим более подробно влияние  $\alpha$  на гладкость решений задачи (2), (3) в случаях, когда область  $D$  разбивается поверхностью вырождения типа на две части, причем  $k_t$  сохраняет знак на этой поверхности. При этом введем понятия решений с меньшей гладкостью, чем из класса  $V_L^1(D)$ .

Пусть сначала  $k(x, 0) > 0$ ,  $k(x, T) < 0$  и  $k_t \leq -\delta < 0$  на поверхности  $k(x, t) = 0$  (рис. 2). Тогда условия (3) принимают вид

$$u(x, 0) = u(x, T) = u_t(x, T) = u|_S = 0. \quad (3')$$

Расширим оператор  $L_\lambda$  до оператора  $L_\lambda$ , действующего из  $W_2^1(D)$  в пространство  $W_{2,L}^{-1}(D)$ , полученное замыканием  $L_2(D)$  по норме  $\|f\|_{-1,*} =$

$= \sup_v \{ |(f, v)| / \|v\|_1 \}$ , где  $v \in W_2^1(D)$ ,  $v(x, 0) = v|_S = 0$  и  $(f, v)$  — скалярное произведение в  $L_2(D)$ . В качестве области определения оператора  $L_\lambda$  выберем множество функций из  $W_2^1(D)$ , удовлетворяющих уравнению (2) в смысле интегрального тождества [19, с. 210] в достаточно малой окрестности верхнего основания области  $D$ . Норма  $\|L_\lambda u\|_{-1, *}$  на таких функциях  $u$  оценивается, как и в [3]. Решением задачи (2), (3') из пространства  $W_2^1(D)$  будем называть функцию  $u$ , принадлежащую области определения оператора  $L_\lambda$  и такую, что  $L_\lambda u = f$ .

Если  $2\alpha - 3k_t > 0$  на множестве  $K$  и  $\lambda$  достаточно велико, то для всякой функции  $u$  из области определения оператора  $L_\lambda$  справедлива оценка

$$m \|u\|_0 \leq \|L_\lambda u\|_{-1, *}, \quad (11)$$

которая выводится из неравенства  $(L_\lambda^+ v, -v_t + h_i v_{x_i} - rkv) \geq m \|v\|_1^2$ , где  $v \in W_2^1(D)$ ,  $v(x, 0) = v|_S = 0$ , аналогично работе [26] (см. (3.7)). Из оценки (11), в частности, следует единственность решения задачи (2), (3') из пространства  $W_2^1(D)$ .

Оценка (11) позволяет расширить оператор  $L_\lambda$  до оператора  $\tilde{L}_\lambda$ , действующего из  $L_2(D)$  на все  $W_{2,L}^{-1}(D)$ . (Действительно, если выполнены условия (6), (8), то обратный оператор  $L_\lambda^{-1}$  ограничен и определен на множестве  $L_2(D)$ , плотном в  $W_{2,L}^{-1}(D)$ , поэтому  $L_\lambda$  можно расширить до  $\tilde{L}_\lambda$ . Если условия (6), (8) не выполнены, то аналогичное расширение получаем с помощью представления  $L_\lambda u = (L_\lambda u + \alpha_0 u_t) - \alpha_0 u_t$ , где  $\alpha_0$  достаточно велико.) Решением задачи (2), (3') из класса  $V_L^0(D)$  будем называть функцию  $u$ , принадлежащую области определения  $V_L^0(D) \subset L_2(D)$  оператора  $\tilde{L}_\lambda$  и такую, что  $\tilde{L}_\lambda u = f \in W_{2,L}^{-1}(D)$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Решение  $u \in V_L^0(D)$  существует при условии (8) и достаточно большом  $\lambda$ . (Условие (6) можно снять, применяя продолжение по параметру, как и при доказательстве леммы 1.)

Таким образом, при достаточно большом  $\lambda$  справедливы следующие результаты (таблица).

Условие на $\alpha$ на множестве $K$	Априорная оценка	Существование решения задачи (2), (3')	Ссылка
$3k_t < 2\alpha < k_t$	$m \ u\ _0 \leq \ \tilde{L}_\lambda u\ _{-1, *}$	$u \in V_L^0(D)$	Замечание 1
$k_t < 2\alpha < -k_t$	$m \ u\ _1 \leq \ L_\lambda u\ _0$	$u \in V_L^1(D)$	Лемма 1
$-k_t < 2\alpha$	$m \ u\ _2 \leq \ L_\lambda u\ _1$	$u \in V_L^2(D)$	Теорема 2

Из таблицы видно, что с увеличением  $\alpha$  гладкость решения задачи (2), (3') увеличивается. Что касается единственности решения, то, выбирая наиболее слабое условие  $2\alpha - 3k_t > 0$  и оценку  $m \|u\|_0 \leq \|\tilde{L}_\lambda u\|_{-1, *}$ , получаем единственность в наиболее широком классе  $V_L^0(D)$ .

Рассмотрим теперь случай  $k(x, 0) < 0$ ,  $k(x, T) > 0$ ; пусть  $k_t \geq \delta > 0$  на поверхности  $k(x, t) = 0$  (рис. 3). При этом условия (3) принимают вид

$$u(x, T) = u|_S = 0. \quad (3'')$$

В соответствии с леммой 1 задача (2), (3'') однозначно разрешима в  $V_L^1(D)$ , если  $\lambda$  достаточно велико и выполнено условие (6). При на-

рушении условия (6), точнее, при  $2\alpha - k_t < 0$  на множестве  $K$  единственность решения этой задачи нарушается. Действительно, в соответствии со сказанным в начале данного пункта если  $2\alpha - k_t < 0$ , то однозначно разрешимой является задача, в которой, кроме краевых условий (3''), задано  $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ .

Если условие (6) нарушено, однако выполнено более слабое условие  $2\alpha + k_t > 0$  на множестве  $K$ , то единственность решения можно обеспе-

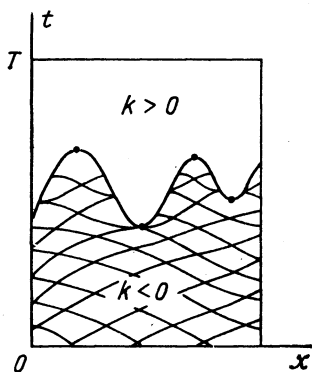


Рис. 3

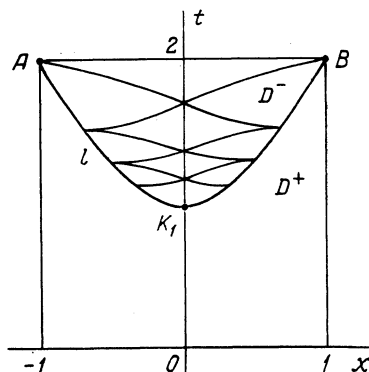


Рис. 4

чить, сужая класс, в котором ищется решение, и рассматривая  $V_L^2(D)$  [9].

В данном случае  $k_t \geq \delta > 0$  на множестве  $K$ , поэтому из неравенства  $2\alpha - k_t > 0$  следует  $2\alpha + (2i-3)k_t > 0$  при  $i=2, 3, \dots$ . Следовательно, решение задачи (2), (3'') является сколь угодно гладким, если коэффициенты и правая часть уравнения достаточно гладкие. Увеличение  $\alpha$  в этом случае не влияет на гладкость решения задачи.

З а м е ч а н и е 2. Рассмотрим задачу (2), (3'') совместно с сопряженной задачей (4), (5'):

$$v(x, 0) = v_t(x, 0) = v(x, T) = v|_S = 0. \quad (5')$$

Аналогично понятию решения из класса  $V_L^0(D)$  можно ввести понятие решения сопряженной задачи (4), (5') из класса  $V_{L+}^0(D)$ . В этом случае в теореме 1 о фредгольмовой разрешимости задачи (2), (3'') можно не требовать выполнения условия (8). Тогда собственные функции  $v_{ij}$  сопряженной задачи могут не принадлежать  $V_{L+}^1(D)$ , но во всяком случае  $v_{ij} \in V_{L+}^0(D)$ .

**5. Частные случаи  $k \leq 0$  и  $k \geq 0$  в области  $D$ .** Полученные результаты можно обобщить на цилиндрические области с неплоскими основаниями в виде «шапочки»; при этом основания, на которых уравнение имеет гиперболический тип, должны быть ориентированы пространственным образом [10].

Кроме того, можно допустить параболическое вырождение на множестве  $\bar{K}$  точек, линий и поверхностей, расположенных внутри эллиптических и гиперболических частей области  $D$ , если наложить некоторые ограничения на геометрию этого множества и потребовать на нем выполнения условия (6) (заметим, что  $k_t = k_{x_1} = \dots = k_{x_n} = 0$  на множестве  $\bar{K}$ ).

В частном случае, когда  $k(x, t) \leq 0$  в области  $D$ , т. е. уравнение (2) является гиперболо-параболическим, из леммы 1 следует однозначная разрешимость начально-краевой задачи (2), (3) в энергетическом классе при единственном условии (6) (условие большого  $\lambda$  не требуется). Это совпадает с результатами, полученными для таких уравнений в [15–18]. Действительно, условие  $2\alpha - k_t > 0$  на множестве  $\bar{K}$  при ис-

пользуемых предположениях об этом множестве эквивалентно условию  $2\alpha - k_t - \mu k \geq \delta > 0$  в области  $D$  для некоторого  $\mu > 0$  [15—18].

В другом частном случае, когда  $k(x, t) \geq 0$  в области  $D$ , т. е. уравнение (2) является эллиптико-параболическим, условие однозначной разрешимости в классе  $V_L^1(D)$  состоит из неравенства (6) и требования достаточно большого  $\lambda$ . Это согласуется с теорией эллиптико-параболических уравнений [20—22], хотя имеются и некоторые отличия.

Согласие состоит, во-первых, в том, что в [20—22] и в теоремах 1—2' принципиальную роль играет множество характеристических точек поверхности вырождения типа. Во-вторых, разрешимость задач существенно зависит от значений  $\alpha$  и  $k_t$  на этом множестве, причем  $\lambda$  должно быть достаточно велико.

Отличия заключаются, во-первых, в том, что в уравнении (1) отсутствует член с  $u_{tx_i}$  и наложено ограничение  $a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \mu\xi^2$ , т. е. уравнение (1) при  $k \geq 0$  представляет более узкий класс эллиптико-параболических уравнений, чем тот, который изучен в [20—22]. Во-вторых, краевые задачи в данной работе изучены в других функциональных классах по сравнению с [20—22], и с этим связано наличие множителя 2 в условии (6), в то время как в выражении для функции Фикеры этого множителя нет. В-третьих, в [20—22] не накладывается ограничений на  $\alpha$  и  $k_t$  в характеристических точках, расположенных внутри эллиптико-параболической области, в то время как выше требуется выполнение условия (6) на множестве  $K$  (это связано с методом получения априорных оценок).

Проследим указанные отличия на примере, когда  $k(x, t) > 0$  при  $0 < t < T/2$  и  $T/2 < t < T$ , причем  $k(x, 0) = k(x, T/2) = 0$ . Пусть заданы краевые условия (3''). Как легко показать, в этом случае остается в силе утверждение леммы 1. Поэтому при  $2\alpha(x, 0) - k_t(x, 0) > 0$ ,  $2\alpha(x, T/2) - k_t(x, T/2) > 0$  и достаточно большом  $\lambda$  последняя задача однозначно разрешима. С другой стороны, при  $2\alpha(x, 0) - k_t(x, 0) < 0$ ,  $2\alpha(x, T/2) - k_t(x, T/2) < 0$  и достаточно большим  $\lambda$ , как можно показать, однозначно разрешима задача Дирихле.

Вместе с тем, согласно [20—22; 34, с. 130], постановка краевого условия на характеристической части границы определяется знаком функции Фикеры, имеющей для уравнения (2) вид  $(\alpha - k_t)v_{n+1}$  на основаниях области  $D$  (где  $v = (0, 0, \dots, v_{n+1})$  — вектор внутренней нормали к области). Применительно к указанному в предыдущем абзаце примеру получаем, что при  $\alpha(x, 0) - k_t(x, 0) \geq 0$  на нижнем основании области  $D$  краевое условие ставить не следует, а при  $\alpha(x, 0) - k_t(x, 0) < 0$  следует. Это отличие от полученного выше результата о важности знака  $2\alpha - k_t$  связано с тем, что в [20—22] краевые задачи изучаются в других классах функций — в  $L_p(D)$  и  $W_2^1$  с весом, а принадлежность решений пространству  $W_2^1$  без веса изучается только в некоторых подобластях области  $D$ .

Возвращаясь к уравнению (2) со знакопеременным коэффициентом  $k(x, t)$  и учитывая сказанное в п. 4 о влиянии знака  $2\alpha - k_t$  на постановку начально-краевых условий, получаем, что выражение  $2\alpha - k_t$  играет ту же роль при изучении уравнения смешанного типа (2), что и функция Фикеры при изучении эллиптико-параболических уравнений. По-видимому, именно функция Фикеры заменит выражение  $2\alpha - k_t$  на множестве  $K$  при обобщении полученных результатов на уравнения с производной  $u_{tx_i}$  и рассмотрении пространства  $L_p(D)$  или  $W_2^1$  с весом.

**6. О сопряжении решений задач для  $D^+$  и  $D^-$ .** Рассмотренные выше задачи можно изучать путем сопряжения (склеивания) на поверхности вырождения типа решений вспомогательных задач для эллиптических и гиперболических частей смешанной области  $D$ .

Пусть, например, задано уравнение

$$(1-t+x^2)u_{tt} + u_{xx} + \alpha(x, t)u_t + \beta(x, t)u_x + c(x, t)u - \lambda u = f(x, t) \quad (12)$$

в прямоугольнике  $D = \{(x, t) : 0 < t < 2, -1 < x < 1\}$  (рис. 4). В области  $D^- = D \cap (1 - t + x^2 < 0)$  рассмотрим начально-краевую задачу для вырождающегося гиперболического уравнения (12) с начальными данными  $u = u_t = 0$  при  $t = 2$  и краевым условием  $u = \tau(x)$  на линии вырождения типа  $l$ :  $1 - t + x^2 = 0$ . Если эта задача разрешима, то можно найти  $u(x, t)$  в  $D^-$  и, в частности, предельные значения производной  $u_t = v^-(x)$  на линии  $l$ . С другой стороны, можно решить задачу Дирихле в области  $D^+ = D \cap (1 - t + x^2 > 0)$  при заданных  $u = \tau(x)$  на линии  $l$  и  $u = 0$  на остальной части  $\partial D^+$  и найти значения производной  $u_t = v^+(x)$  на линии  $l$ . Поэтому задачу (3'), (12) можно интерпретировать как задачу нахождения таких значений  $\tau(x)$ , при которых значения производных  $v^-(x)$  и  $v^+(x)$  на  $l$  совпадают. Лемма 1 показывает, что последняя задача однозначно разрешима в подходящем классе функций при условии  $2\alpha + 1 > 0$  в точке  $K_1(0, 1)$  и достаточно большом  $\lambda$  (это условие можно не ставить в точках  $A(-1, 2)$  и  $B(1, 2)$  [8]).

Если же  $2\alpha + 1 < 0$  в точке  $K_1$ , то решение указанной начально-краевой задачи в области  $D^-$ , по-видимому, не принадлежит  $V_L^1(D^-)$  из-за возникающей особенности в точке  $K_1$ . В этом случае разрешима задача для области  $D^-$  без начальных условий с краевым условием  $u = \tau(x)$  на линии  $l$  (подобные задачи изучались в [35, 36]). Решение последней задачи, которое выстраивается в положительном направлении оси  $t$ , дает соотношение между  $\tau(x)$  и  $v^-(x)$ , вносимое на линию  $l$  из области  $D^-$ . С другой стороны, как и в предыдущем абзаце, можно найти соотношение между  $\tau(x)$  и  $v^+(x)$ , вносимое на линию  $l$  из  $D^+$ . Исключение  $v^- = v^+$  из этих соотношений приводит к уравнению относительно  $\tau(x)$  на линии  $l$ . Это уравнение соответствует задаче нахождения решения уравнения смешанного типа (12), удовлетворяющего краевым условиям

$$u(x, 0) = u|_s = 0. \quad (13)$$

Согласно п. 4, задача (12), (13) действительно однозначно разрешима в  $V_L^1(D)$  при условии  $2\alpha + 1 < 0$  в точке  $K_1$ ; эта задача сводится к (2), (3'') путем замены  $t$  на  $T - t$ .

Подчеркнем, что при рассмотрении уравнения (12) в области  $D^+$  для однозначной разрешимости задачи, кроме задания  $u = 0$  на двух боковых и на нижней сторонах прямоугольника, требуется задание  $u = \tau(x)$  на линии  $l$  (в соответствии с теорией Фикеры). В то же время при рассмотрении уравнения (12) во всем прямоугольнике  $D$  задания каких-либо условий на гиперболической части границы не требуется, если  $2\alpha + 1 < 0$  в точке  $K_1$ . Само наличие области гиперболичности приводит к тому, что на линию  $l$  вносится некоторое соотношение между  $\tau(x)$  и  $v^-(x)$ .

В [37—39] подобным образом путем сопряжения решений задач в  $D^-$  и  $D^+$  и перехода к сингулярному интегральному уравнению на линии  $l$  изучены некоторые задачи для модельных уравнений смешанного типа.

В [31] аналогичная задача, возникающая в акустике сверхзвуковых струй, решена численно путем нахождения последовательных приближений для решения в областях  $D^+$  и  $D^-$ .

Автор выражает искреннюю признательность И. Е. Егорову за полезное обсуждение результатов данной работы.

### Литература

1. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
2. Сорокина Н. Г. // Применение функционального анализа к задачам математической физики. Киев, 1973. С. 125—184.
3. Диденко В. П. // Укр. мат. журн. 1973. Т. 25, № 1. С. 14—24.
4. Диденко В. П. // Тр. Всесоюз. конф. по уравнениям с частными производными. М., 1978. С. 102—105.
5. Кальменов Т. Ш. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 8. С. 1418—1425.

6. Гайдай Н. Н. // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 1. С. 31—38.
7. Коврижкин В. В. // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 182—186.
8. Кузьмин А. Г. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 77—83.
9. Кузьмин А. Г. Краевые задачи для уравнений смешанного типа, произвольным образом изменяющихся тип в заданной области. Л., 1985. Деп. в ВИНТИ 20.03.85, № 2012—85
10. Кузьмин А. Г. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 1. С. 66—74.
11. Кузьмин А. Г. // Уравнения неклассического типа. Новосибирск, 1985. С. 79—82.
12. Кузьмин А. Г. // Вестник ЛГУ. 1986. Сер. 1, вып. 4. С. 65—70.
13. Петрушко И. М. // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 1. С. 123—135.
14. Нахушев А. М. // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257, № 1. С. 45—47.
15. Брюханов В. А. // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 3—6.
16. Врагов В. Н. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 24—31.
17. Егоров И. Е. // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск, 1979. С. 45—48.
18. Нахушев А. М. // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 66—73.
19. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М., 1973.
20. Фикера Г. // Математика: Период. сб. пер. иностр. ст. 1963. Т. 7, № 6. С. 99—121.
21. Коhn J. J., Nirenberg L. // Communications on pure and applied mathematics. 1967. Vol. 20. P. 797—872.
22. Олейник О. А., Радкевич Е. В. // Итоги науки и техники: Мат. анализ. М., 1971. С. 7—252.
23. Врагов В. Н. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098—1105.
24. Врагов В. Н. // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск, 1978. С. 5—13.
25. Терехов А. Н. // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск, 1979. С. 128—136.
26. Каратопраклиев Г. Д. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 64—75.
27. Дачев Г. Д. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 11. С. 1894—1902.
28. Ларькин Н. А. // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 6. С. 1308—1314.
29. Егоров И. Е. // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, 1985. С. 60—72.
30. Каратопраклиева М. Г. // Докл. БАН. 1985. Т. 38, № 11. С. 1453—1456.
31. Лебедев М. Г. // Изв. АН СССР. Сер. мех. жидкости и газа. 1977. № 2. С. 92—99.
32. Пао С. П. // Ракетная техника и космонавтика. 1972. Т. 10, № 5. С. 44—52.
33. Архапов В. П., Соболев А. В. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 4. С. 777—779.
34. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., 1966.
35. Мельник З. О. // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 6. С. 1096—1104.
36. Харибегашвили С. С. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 6. С. 1313—1316.
37. Кузьмин А. Г. // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 10. С. 1853—1861.
38. Кузьмин А. Г. // Неклассические задачи уравнений математической физики. Новосибирск, 1982. С. 106—108.
39. Кузьмин А. Г. // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 8. С. 1478—1490.

Ленинградский государственный университет  
им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию  
3 июля 1986 г.

УДК 517.95

М. ЛОПЕС

## ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

**1. Введение.** В настоящей работе рассматривается линейное эллиптическое уравнение

$$L(u) \equiv \sum_{|k| \leq 2m} a_k(x) D^k u = f(x) \quad (1)$$

в ограниченной области  $\Omega$   $n$ -мерного евклидова пространства  $R^n$ . Здесь