М. П. Савелов, Предельные распределения статистики Пирсона для неоднородной полиномиальной схемы, *Дискрет. матем.*, 2017, том 29, выпуск 4, 121–129

DOI: 10.4213/dm1480

Дискретная математика

том 29 выпуск 4 * 2017

УДК 519.214.5 DOI https://doi.org/10.4213/dm1480

Предельные распределения статистики Пирсона для неоднородной полиномиальной схемы

 М. П. Савелов*

Для неоднородной полиномиальной схемы найдены условия, при которых распределение статистики Пирсона сходится к распределению неотрицательно определенной квадратичной формы от независимых случайных величин со стандартным нормальным распределением.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (грант №17-11-01173).

Ключевые слова: критерий хи-квадрат, статистика Пирсона, предельные распределения, нецентральное взвешенное хи-квадрат распределение

1. Введение

Для фиксированного $N \geqslant 2$ рассмотрим последовательность серий полиномиальных схем с N исходами и $m = m_n$ независимыми испытаниями в n-й схеме. Пусть $m_n \to \infty$ при $n \to \infty$. В соответствии с гипотезой H_0 будем считать, что вероятность j-го исхода в t-м испытании n-й серии равна $p_j^{n,t}, j = 1, \ldots, N$. Для $t \geqslant 1$ и $1 \leqslant j \leqslant N$ введем индикаторы $I_j^{n,t}$: $I_j^{n,t} = 1$, если при t-м испытании n-й серии осуществился j-й исход, и $I_j^{n,t} = 0$ в противном случае. Тогда $\nu_j(n) := \sum_{t=1}^{m_n} I_j^{n,t}$ — частота исхода j в n-й серии. Пусть $p_1, \ldots, p_N$ — фиксированные положительные числа, $p_1 + \ldots + p_N = 1$. Статистика Пирсона

$$X(n) := \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{m_n p_j} \left(\nu_j(n) - m_n p_j\right)^2$$

используется, например, в критерии согласия (см. [1]; подробный обзор есть в [3]) с гипотезой
H^*: $p_j^{n,t} = p_j$ при всех $1 \leqslant j \leqslant N, n, t \geqslant 1$,
в которой предполагается, что распределения исходов во всех испытаниях одинаковы. Мы находим предельные распределения статистики $X(n)$ для некоторых случаев с неодинаковыми распределениями исходов.

*Место работы: Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, e-mail: savelovmp@gmail.com

Будем говорить, что последовательность наборов вероятностей $\{p_i^{n,t}\}$ удовлетворяет условиям 1 – 2, если для положительного вектора $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_N)$:

1) существует такой вектор $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_N)$, что $c_1 + \ldots + c_N = 0$ и $\sqrt{m_n}\left(\frac{p_i^{n,1}+\ldots+p_i^{n,m_n}}{m_n} - p_i\right) \to c_i$ при $n \to \infty$ для всех $1 \leqslant i \leqslant N$,

2) существует такая $N \times N$-матрица D, что поэлементно $\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{m_n} \sum_{t=1}^{m_n} \frac{p_i^{n,t} p_j^{n,t}}{\sqrt{p_i p_j}} \right\|_{i,j=1}^N = D$.

Положим по определению

$$A = \left\| \delta_{ij} - \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{t=1}^{m_n} p_i^{n,t} p_j^{n,t}}{m_n \sqrt{p_i p_j}} \right\|_{i,j=1}^N .$$

Через $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N$ обозначим собственные значения матрицы A (вещественные в силу симметричности A), расположенные в порядке неубывания. Пусть C — такая ортогональная матрица, что $A = C^{\mathrm{T}} \Lambda C$, где $\Lambda = (\lambda_i \delta_{ij})_{i,j=1}^N$ и δ_{ij} — символ Кронекера. Ниже доказано, что $\lambda_1 \leqslant 1$, $\lambda_N = 0$.

Будем использовать символ «$\xrightarrow{d}$» для обозначения сходимости случайных величин и векторов по распределению.

Теорема 1. *Если выполнены условия* 1 *и* 2, *то*

$$X(n) \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^N (\sqrt{\lambda_i}\xi_i + \omega_i)^2, \quad n \to \infty,$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — *независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, и* $(\omega_1, \ldots, \omega_N)^\top = C(\frac{c_1}{\sqrt{p_1}}, \ldots, \frac{c_N}{\sqrt{p_N}})^\top$.

Следствие 1. *Если выполнены условия* 1 *и* 2 *для* $\vec{c} = \vec{0}$, *то* $X(n) \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \xi_i^2$, $n \to \infty$, *где* $\xi_i, \xi_2, \ldots$ — *независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение.*

Заметим, что случайная величина $\sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \xi_i^2$, фигурирующая в утверждении следствия 1, стохастически меньше (точнее, не больше) случайной величины, имеющей распределение χ^2_{N-1} (т. е. распределение хи-квадрат с $N-1$ степенями свободы), так как $1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N = 0$.

Пример 1. Пусть при каждом $1 \leqslant j \leqslant N$ величины $p_j^{n,t}$ меняются периодически с периодом L: $p_j^{n,t} = p_j^{n,(t \mod L)}$, и $\frac{p_j^{n,1}+\ldots+p_j^{n,L}}{L} = p_j$, т. е. средняя по периоду вероятность j-го исхода совпадает с p_j. Легко проверить, что для любой последовательности $m_n \to \infty$ при $n \to \infty$, условия 1 и 2 выполнены при $\vec{c} = \vec{0}$ и, значит, выполнены условия следствия 1.

Следствие 1 означает, что стандартный критерий Пирсона (отклоняющий гипотезу H^* при $X(n) > C$) перестает быть состоятельным при переходе от стандартной схемы с однородными испытаниями к схемам с неоднородными испытаниями, в частности, он не позволяет отличить описанные в примере 1 периодические схемы от соответствующих однородных схем.

Замечание 1. Если $\sqrt{n}\left(\frac{p_{j_0}^{n,1}+\ldots+p_{j_0}^{n,m_n}}{m_n}-p_{j_0}\right)\to\infty$ при некотором $j_0\in\{1,\ldots,N\}$, то $\mathbf{E}X(n)\to\infty$.

В самом деле,

$$\mathbf{E}X(n)=\mathbf{E}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{m_np_j}\left(\nu_j(n)-m_np_j\right)^2\geqslant\frac{1}{p_{j_0}}\mathbf{E}\left(\frac{\nu_{j_0}(n)-m_np_{j_0}}{\sqrt{m_n}}\right)^2\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{p_{j_0}}\left(\mathbf{E}\frac{\nu_{j_0}(n)-m_np_{j_0}}{\sqrt{m_n}}\right)^2=\frac{1}{p_{j_0}}\left(\frac{p_{j_0}^{n,1}+\ldots+p_{j_0}^{n,m_n}-m_np_{j_0}}{\sqrt{m_n}}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{p_{j_0}}\left(\sqrt{m_n}\left(\frac{p_{j_0}^{n,1}+\ldots+p_{j_0}^{n,m_n}}{m_n}-p_{j_0}\right)\right)^2\to+\infty.$$

Отметим, что аналогичные следствию 1 утверждения о поведении статистики критерия хи-квадрат можно получить и в ситуации, когда вместо независимости наблюдений предполагается их стационарность (см. [6]). В [7] в задаче, близкой к рассматриваемой, доказана предельная теорема для статистики Пирсона в случае, когда частоты центрируются их математическими ожиданиями. Наконец, упомянем пример из [5] (см. стр.301, последнее равенство перед теоремой 1 и вывод из него), в котором имеет место не отношение стохастического порядка, а неравенство между дисперсиями. А именно: пусть $\zeta_1,\ldots,\zeta_N$ — независимые случайные величины, ζ_i имеет распределение Бернулли с параметром $0\leqslant a_i\leqslant 1$, $1\leqslant i\leqslant N$. Положим $\bar{a}=\frac{a_1+\ldots+a_N}{N}$, $S_N=\zeta_1+\ldots+\zeta_N$. Несложно показать, что

$$\mathbf{D}S_N=N\bar{a}(1-\bar{a})-\sum\nolimits_{j=1}^{N}(a_j-\bar{a})^2,$$

т. е. при фиксированном $\bar{a}$ дисперсия максимальна в случае, когда все a_i равны.

Теперь для фиксированного $N\geqslant 2$ рассмотрим две последовательности серий полиномиальных схем с N исходами в каждой. Предположим, что наблюдения независимы как внутри серий, так и между ними. Пусть в n-й серии в первой последовательности m_n испытаний, а во второй — l_n испытаний. Будем считать, что вероятность j-го исхода в t-м испытании n-й серии равна $p_j^{n,t}, j=1,\ldots,N$, для первой последовательности и $\tilde{p}_j^{n,t}, j=1,\ldots,N$, для второй. Для $t\geqslant 1$ и $1\leqslant j\leqslant N$ введем индикаторы $I_j^{n,t}(k)$: $I_j^{n,t}(k)=1$, если в t-м испытании n-й серии k-й последовательности осуществился j-й исход, и $I_j^{n,t}(k)=0$ в противном случае. Тогда $\nu_j^{(1)}(n):=\sum_{t=1}^{m_n}I_j^{n,t}(1)$ — частота исхода j в n-й серии первой последовательности, $\nu_j^{(2)}(n):=\sum_{t=1}^{l_n}I_j^{n,t}(2)$ — частота исхода j в n-й серии второй последовательности. Для проверки стандартной гипотезы об однородности пар выборок ($p_j^{n,t}=\tilde{p}_j^{n,t}=p_j, j=1,\ldots,N$) используется (см., например, [1]) статистика следующего вида:

$$Y(n)=l_n\cdot m_n\cdot\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\nu_j^{(1)}(n)+\nu_j^{(2)}(n)}\left(\frac{\nu_j^{(1)}(n)}{m_n}-\frac{\nu_j^{(2)}(n)}{l_n}\right)^2.$$

Теорема 2. *Пусть $m_n, l_n \to \infty$ при $n \to \infty$, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Если для наборов вероятностей $p_j^{n,t}$ выполняется условие 1 с вектором $\vec{c}_1$, для наборов вероятностей $\tilde{p}_j^{n,t}$ выполняется условие 1 с вектором $\vec{c}_2$, а условие 2 выполняется для обоих наборов вероятностей с одной и той же матрицей D и $\sqrt{\frac{m_n}{m_n+l_n}}\vec{c}_2 - \sqrt{\frac{l_n}{m_n+l_n}}\vec{c}_1 \to \vec{c} = (c_1, \ldots, c_N)$ при $n \to \infty$, то*

$$Y(n) \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{N} \big(\sqrt{\lambda_i}\xi_i + \omega_i\big)^2, \quad n \to \infty,$$

где $(\omega_1, \ldots, \omega_N)^\top = C(\frac{c_1}{\sqrt{p_1}}, \ldots, \frac{c_N}{\sqrt{p_N}})^\top$ и $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_N = 0$ те же, что в Теореме 1.

Из Теоремы 2 при $\vec{c} = \vec{0}$ и $D = \|\sqrt{p_i p_j}\|$ следует известное утверждение о сходимости распределения статистики $Y(n)$ к распределению хи-квадрат с $N-1$ степенями свободы (см. [1]). Предельное распределение, возникающее в теоремах 1–2, соответствует линейной комбинации случайных величин, имеющих нецентральные хи-квадрат распределения с одной степенью свободы. Таким распределениям, которые естественно назвать нецентральными взвешенными хи-квадрат распределениями, посвящен ряд статей, см. [9], [10] и др.

2. Доказательство теоремы 1

Сначала сформулируем важную для дальнейшего изложения лемму Слуцкого для случайных векторов (см., например, [8, стр. 10, теорема 2.7]).

Лемма 1. *Пусть $\zeta_i \in \mathbb{R}^m$, $\zeta \in \mathbb{R}^m$, $\eta_i \in \mathbb{R}^n$ — такие случайные векторы, что $\zeta_i \xrightarrow{d} \zeta$, $\eta_i \xrightarrow{d} a$, где a — (не случайный) вектор из $\mathbb{R}^n$. Тогда $(\zeta_i, \eta_i) \xrightarrow{d} (\zeta, a)$.*

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1. Пусть положительные $p_1, \ldots, p_N$ фиксированы и выполнены условия 1 и 2. Обозначим через $\vec{\nu}(n)$ вектор-столбец частот исходов в n испытаниях, т.е. $\vec{\nu}(n) := (\nu_1(n), \ldots, \nu_N(n))^\top$, где $^\top$ означает транспонирование. Пусть $\vec{p} := (p_1, \ldots, p_N)^\top$ и $\xi_{n,t} = \frac{1}{\sqrt{m_n}}\left(I_1^{n,t} - p_1^{n,t}, \ldots, I_N^{n,t} - p_N^{n,t}\right)^\top$. Тогда $\mathbf{E}\xi_{n,t} = 0$ и ковариационная $N \times N$-матрица $\mathbf{D}\xi_{n,t}$ вектора $\xi_{n,t}$ имеет вид

$$\mathbf{D}\xi_{n,t} = \frac{1}{m_n}\left\|\operatorname{cov}(I_i^{n,t} - p_i^{n,t}, I_j^{n,t} - p_j^{n,t})\right\| = \frac{1}{m_n}\left\|\delta_{ij}p_i^{n,t} - p_i^{n,t}p_j^{n,t}\right\|.$$

При этом $\frac{1}{m_n}\sum_{t=1}^{m_n}\left\|\delta_{ij}p_i^{n,t}\right\|_{i,j=1}^N \to \|\delta_{ij}p_i\|_{i,j=1}^N$ в силу условия 1, и в силу условия 2 существует предел $\left\|\frac{1}{m_n}\sum_{t=1}^{m_n}p_i^{n,t}p_j^{n,t}\right\|_{i,j=1}^N$. Значит, существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{t=1}^{m_n}\mathbf{D}\xi_{n,t} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{m_n}\sum_{t=1}^{m_n}\left\|\delta_{ij}p_i^{n,t} - p_i^{n,t}p_j^{n,t}\right\|_{i,j=1}^N =$$
$$= \left\|\delta_{ij}p_i - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{m_n}\sum_{t=1}^{m_n}p_i^{n,t}p_j^{n,t}\right\|_{i,j=1}^N =: B. \qquad (1)$$

Далее, $\sum_{t=1}^{m_n}\mathbf{E}|\xi_{n,t}|^3 \to 0$ (где $|x|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^N$), так как каждая компонента вектора $\xi_{n,t}$ не превосходит по модулю число $\frac{1}{\sqrt{m_n}}$. Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\sum_{t=1}^{m_n}\mathbf{E}|\xi_{n,t}|^2 I_{\{|\xi_{n,t}|>\varepsilon\}} \leqslant \varepsilon^{-1}\sum_{t=1}^{m_n}\mathbf{E}|\xi_{n,t}|^3 \to 0, \quad n\to\infty,$$

где I_A принимает значение 1 или 0, если событие A наступило или не наступило соответственно. Из центральной предельной теоремы ([4, теорема 9, стр. 158]) для схемы серий независимых случайных векторов $\xi_{n,t}$ следует, что

$$\frac{\vec{\nu}(n) - \mathbf{E}\vec{\nu}(n)}{\sqrt{m_n}} = \sum_{t=1}^{m_n}\xi_{n,t} \xrightarrow{d} N(\vec{0}, B), \qquad (2)$$

где B определена в (1), а $N(\vec{c}, B)$ обозначает нормальное распределение со средним $\vec{c}$ и ковариационной матрицей B; не вполне корректная запись вида $\xrightarrow{d} N(\vec{0}, B)$ здесь и далее используется, чтобы не вводить лишние обозначения. Далее,

$$\frac{\vec{\nu}(n) - m_n\vec{p}}{\sqrt{m_n}} = \frac{\vec{\nu}(n) - \mathbf{E}\vec{\nu}(n)}{\sqrt{m_n}} + \sqrt{m_n}\left(\frac{\mathbf{E}\vec{\nu}(n)}{m_n} - \vec{p}\right). \qquad (3)$$

В силу условия 1, соотношений (2), (3) и леммы 1 получаем, что

$$\frac{\vec{\nu}(n) - m_n\vec{p}}{\sqrt{m_n}} \xrightarrow{d} N(\vec{c}, B). \qquad (4)$$

Следовательно, $X(n) = \sum_{j=1}^N\left(\frac{\nu_j(n) - m_np_j}{\sqrt{m_np_i}}\right)^2$ и

$$\left(\frac{\nu_1(n) - m_np_1}{\sqrt{m_np_1}}, \ldots, \frac{\nu_N(n) - m_np_N}{\sqrt{m_np_N}}\right)^\top \xrightarrow{d} N(\vec{v}, A), \qquad (5)$$

где матрица A определена во введении и $\vec{v} = (\frac{c_1}{\sqrt{p_1}}, \ldots, \frac{c_N}{\sqrt{p_N}})^\top$.

С помощью ортогонального преобразования можно привести матрицу A к диагональному виду $\|\lambda_i\delta_{ij}\|_{i,j=1}^N$, где $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_N$ — собственные числа матрицы A (неотрицательные в силу неотрицательной определенности ковариационной матрицы A). Пусть C — такая ортогональная матрица, что $A = C^\top\Lambda C$, где $\Lambda = (\lambda_i\delta_{ij})_{i,j=1}^N$. В силу ортогональности ($C^{-1} = C^\top$) получаем, что $CAC^\top = \Lambda$. Ортогональное преобразование с матрицей C переводит многомерное нормальное распределение $N(\vec{v}, A)$

в нормальное распределение $N(\vec{\omega}, \Lambda)$, $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_N) = C\vec{v}$, соответствующее распределению случайного вектора $(\sqrt{\lambda_1}\zeta_1, \dots, \sqrt{\lambda_N}\zeta_N)$, в котором $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Так как ортогональное преобразование сохраняет длины, то в силу (5)

$$X(n) = \sum\nolimits_{j=1}^{N} \left(\frac{\nu_j(n) - m_n p_j}{\sqrt{m_n p_i}} \right)^2 \xrightarrow{d} \sum\nolimits_{j=1}^{N} \left(\sqrt{\lambda_i}\zeta_i + \omega_i \right)^2. \tag{6}$$

Заметим, что $\lambda_N = 0$. В самом деле,

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{p_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{p_N}} \right) B \left(\frac{1}{\sqrt{p_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{p_N}} \right)^\top, \tag{7}$$

$$B = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m_n} \sum_{t=1}^{m_n} \left\| \delta_{ij} p_i^{n,t} - p_i^{n,t} p_j^{n,t} \right\|_{i,j=1}^{N}.$$

Отсюда следует, что сумма строк матрицы B является нулевой строкой, значит, матрица B вырождена. Таким образом, A тоже вырождена и $\lambda_N = 0$.

Покажем теперь, что $\lambda_i \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant N$. Пусть $E := \|\delta_{ij}\|_{i,j=1}^{N}$, тогда $A = E - \lim_{n\to\infty} D_n$, где $D_n = \left\| \frac{\sum_{t=1}^{m_n} p_i^{n,t} p_j^{n,t}}{m_n \sqrt{p_i p_j}} \right\|_{i,j=1}^{N}$. Далее, D_n неотрицательно определена (что будем обозначать так: $D_n \geqslant 0$) в силу того, что для любых чисел $z_i, 1 \leqslant i \leqslant N$, выполнены соотношения

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\sum_{t=1}^{m_n} p_i^{n,t} p_j^{n,t}}{\sqrt{p_i p_j} m_n} z_i z_j = \sum_{t=1}^{m_n} \sum_{i,j=1}^{N} \frac{p_i^{n,t} p_j^{n,t}}{\sqrt{p_i p_j} m_n} z_i z_j = \sum_{t=1}^{m_n} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^{n,t}}{\sqrt{m_n p_i}} z_i \right)^2 \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что $D = \lim_{n\to\infty} D_n \geqslant 0$ (причем D симметрична как предел симметричных матриц). Отметим, что $A \geqslant 0$ в силу того, что A — матрица ковариации. Таким образом, мы получили, что $A = E - D$, где E и D — симметричные неотрицательно определенные матрицы. Для введенной ранее ортогональной матрицы C по ее определению $CAC^\top = \|\lambda_i \delta_{ij}\|_{i,j=1}^{N}$. При этом $CAC^\top = CEC^\top - CDC^\top$, откуда $CDC^\top = \|(1-\lambda_i)\delta_{ij}\|_{i,j=1}^{N}$. Собственные значения $(1-\lambda_i)$ неотрицательно определенной матрицы D неотрицательны, откуда следует, что все собственные значения λ_i матрицы A не превосходят 1. Таким образом, утверждение теоремы 1 доказано.

3. Доказательство теоремы 2

Доказательство во многом повторяет рассуждения из доказательства теоремы 1. Пусть положительные $p_1, \dots, p_N$ фиксированы $(\sum_{j=1}^{N} p_j = 1)$ и выполнены условия теоремы 2. Как и ранее, $\vec{p} := (p_1, \dots, p_N)^\top$. Рассматривая случайные величины $\xi_{n,t}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{m_n}} \left(I_1^{n,t}(1) - p_1^{n,t}, \dots, I_N^{n,t}(1) - p_N^{n,t} \right)^\top$ и рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 1, получаем (ср.(4)), что

$$\frac{\vec{\nu}^{(1)}(n) - m_n \vec{p}}{\sqrt{m_n}} = \sum_{t=1}^{m_n} \xi_{n,t}^{(1)} \xrightarrow{d} N(\vec{c}_1, B), \tag{8}$$

где B определена в (1). Аналогичным образом получаем, что

$$\frac{\vec{\nu}^{(2)}(n) - l_n\vec{p}}{\sqrt{l_n}} = \sum_{t=1}^{l_n} \xi_{n,t}^{(2)} \xrightarrow{d} N(\vec{c}_2, B), \tag{9}$$

где $\xi_{n,t}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{l_n}}\left(I_1^{n,t}(2) - \tilde{p}_1^{n,t}, \ldots, I_N^{n,t}(2) - \tilde{p}_N^{n,t}\right)^\top$. Положим

$$\zeta_n := \frac{\vec{\nu}^{(1)}(n) - m_n\vec{p}}{\sqrt{m_n}},\ \eta_n := \frac{\vec{\nu}^{(2)}(n) - l_n\vec{p}}{\sqrt{l_n}}.$$

При каждом n векторы ζ_n и η_n независимы. В силу (8) и (9) получаем, что векторы (ζ_n, η_n) слабо сходятся к такому вектору (ζ, η), что ζ и η независимы, $\zeta \sim N(\vec{c}_1, B)$ и $\eta \sim N(\vec{c}_2, B)$. В силу теоремы Скорохода ([4, стр. 164, теорема 11]) существуют вероятностное пространство $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ и такие случайные векторы $\tilde{\zeta}_n$, $\tilde{\eta}_n$, $\tilde{\zeta}$, $\tilde{\eta}$ на нем, что

$$(\tilde{\zeta}_n, \tilde{\eta}_n) \stackrel{d}{=} (\zeta_n, \eta_n),\ (\tilde{\zeta}, \tilde{\eta}) \stackrel{d}{=} (\zeta, \eta),\ (\tilde{\zeta}_n, \tilde{\eta}_n) \stackrel{\text{п.н.}}{\to} (\tilde{\zeta}, \tilde{\eta}),\ n \to \infty.$$

Далее,

$$\sqrt{\frac{m_n}{m_n + l_n}}\tilde{\eta}_n - \sqrt{\frac{l_n}{m_n + l_n}}\tilde{\zeta}_n = \tau_1(n) + \tau_2(n),$$

где $\tau_1(n) = \sqrt{\frac{m_n}{m_n+l_n}}\,\tilde{\eta} - \sqrt{\frac{l_n}{m_n+l_n}}\,\tilde{\zeta}$, $\tau_2(n) = \sqrt{\frac{m_n}{m_n+l_n}}(\tilde{\eta}_n - \tilde{\eta}) - \sqrt{\frac{l_n}{m_n+l_n}}(\tilde{\zeta}_n - \tilde{\zeta})$. В силу того, что $\sqrt{\frac{m_n}{m_n+l_n}}\vec{c}_2 - \sqrt{\frac{l_n}{m_n+l_n}}\vec{c}_1 \to \vec{c}$ при $n \to \infty$ и в силу независимости $\tilde{\zeta}$ и $\tilde{\eta}$ несложно видеть, что $\tau_1(n) - \left(\sqrt{\frac{m_n}{m_n+l_n}}\vec{c}_2 - \sqrt{\frac{l_n}{m_n+l_n}}\vec{c}_1 - \vec{c}\right)$ имеет распределение $N(\vec{c}, B)$ при любом $n \geqslant 1$. Далее, $\sqrt{\frac{m_n}{m_n+l_n}} \leqslant 1$ и $\sqrt{\frac{l_n}{m_n+l_n}} \leqslant 1$, поэтому $\tau_2(n) \stackrel{\text{п.н.}}{\to} 0$. Значит,

$$\tau_1(n) \xrightarrow{d} N(\vec{c}, B),\ \tau_2(n) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0,$$

откуда в силу леммы 1

$$\sqrt{\frac{m_n}{m_n + l_n}}\tilde{\eta}_n - \sqrt{\frac{l_n}{m_n + l_n}}\tilde{\zeta}_n = \tau_1(n) + \tau_2(n) \xrightarrow{d} N(\vec{c}, B)$$

и, следовательно,

$$\sqrt{\frac{m_n l_n}{m_n + l_n}}\Big(\frac{\vec{\nu}^{(1)}(n)}{l_n} - \frac{\vec{\nu}^{(2)}(n)}{m_n}\Big) = \sqrt{\frac{m_n}{m_n + l_n}}\eta_n - \sqrt{\frac{l_n}{m_n + l_n}}\zeta_n \xrightarrow{d} N(\vec{c}, B). \tag{10}$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{m_n}} \to 0$, из (8) следует, что $\frac{1}{\sqrt{m_n}}\frac{\vec{\nu}^{(1)}(n) - m_n\vec{p}}{\sqrt{m_n}} \xrightarrow{d} 0$. Значит, $\frac{\vec{\nu}^{(1)}(n)}{m_n} - \vec{p} \xrightarrow{d} 0$ и потому $\frac{\vec{\nu}^{(1)}(n)}{m_n} - \vec{p} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, при $n \to \infty$

$$\left(\frac{\vec{\nu}^{(1)}(n)}{m_n} - \vec{p}\right) \cdot \frac{m_n}{m_n + l_n} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \quad \left(\frac{\vec{\nu}^{(2)}(n)}{l_n} - \vec{p}\right) \cdot \frac{l_n}{m_n + l_n} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0. \tag{11}$$

В силу (11)

$$\frac{\vec{\nu}^{(1)}(n)+\vec{\nu}^{(2)}(n)}{m_n+l_n}=\vec{p}+\left(\frac{\vec{\nu}^{(1)}(n)}{m_n}-\vec{p}\right)\frac{m_n}{m_n+l_n}+\left(\frac{\vec{\nu}^{(2)}(n)}{l_n}-\vec{p}\right)\frac{l_n}{m_n+l_n}\xrightarrow{\mathrm{P}}\vec{p},$$

откуда в силу (10) и леммы 1 получаем, что

$$\left(\sqrt{\frac{m_nl_n}{m_n+l_n}}\left(\frac{\vec{\nu}^{(1)}(n)}{m_n}-\frac{\vec{\nu}^{(2)}(n)}{l_n}\right)^{\top},\ \left(\frac{\vec{\nu}^{(1)}(n)+\vec{\nu}^{(2)}(n)}{m_n+l_n}\right)^{\top}\right)\xrightarrow{d}(\xi_1,\ldots,\xi_N,\vec{p}^{\top}),$$

где $(\xi_1,\ldots,\xi_N)^{\top}\sim N(\vec{c},B)$. Напомним, что

$$Y(n)=l_nm_n\sum_{j=1}^{N}\frac{\left(\frac{\nu_j^{(1)}(n)}{m_n}-\frac{\nu_j^{(2)}(n)}{l_n}\right)^2}{\nu_j^{(1)}(n)+\nu_j^{(2)}(n)}=\sum_{j=1}^{N}\frac{\left(\sqrt{\frac{m_nl_n}{m_n+l_n}}\left(\frac{\nu_j^{(1)}}{m_n}-\frac{\nu_j^{(2)}}{l_n}\right)\right)^2}{\frac{1}{m_n+l_n}(\vec{\nu}^{(1)}(n)+\vec{\nu}^{(2)}(n))},$$

поэтому

$$Y(n)\xrightarrow{d}\sum_{j=1}^{N}\frac{{\xi_j}^2}{p_j}=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\xi_j}{\sqrt{p_j}}\right)^2,\quad n\to\infty.$$

Используя (7), получаем, что вектор $\left(\frac{\xi_1}{\sqrt{p_1}},\ldots,\frac{\xi_N}{\sqrt{p_N}}\right)$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $\vec{v}=\left(\frac{c_1}{\sqrt{p_1}},\ldots,\frac{c_N}{\sqrt{p_N}}\right)^{\top}$ и следующей ковариационной матрицей:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{p_1}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{p_N}}\right)B\left(\frac{1}{\sqrt{p_1}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{p_N}}\right)^{\top}=A.$$

Отталкиваясь от этого этого факта и рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 1 (см. (6)), получаем, что предельное распределение статистики $Y(n)$ при $n\to\infty$ совпадает с предельным распределением $X(n)$, установленным в теореме 1. Тем самым теорема 2 доказана.

Автор благодарит А. М. Зубкова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. Крамер Г., *Математические методы статистики*, М.: Мир, 1975, 648 с.
2. Chernoff H., Lehmann E.L., “The use of maximum likelihood estimates in χ^2 tests for goodness of fit”, *Ann. Math. Statist.*, **25**:3 (1954), 579–586.
3. Balakrishnan N., Voinov V., Nikulin M. S., *Chi-Squared Goodness of Fit Tests with Applications*, Academic Press, 2013, 256 pp.
4. Булинский А. В., Ширяев А. Н., *Теория случайных процессов*, М.: Физматлит, 2005, 408 с.
5. Wang Y. H., “On the number of successes in independent trials”, *Statist. Sinica*, **3**:2 (1993), 295–312.

6. Chanda K. C., “Chi-square goodness-of-fit tests based on dependent observations”, Statistical Distributions in Scientific Work, NATO Adv. Study Inst. Ser., **79**, Springer, Dordrecht, 35–49.
7. Селиванов Б. И., “О предельных распределениях статистики χ^2 К. Пирсона в схеме независимых испытаний”, *Матем. заметки*, **83**:6 (2008), 899–911; англ. пер.: Selivanov B. I., “Limit distributions of the χ^2 statistic of K. Pearson in a sequence of independent trials”, *Math. Notes*, **83**:6 (2008), 821–832.
8. van der Vaart A. W., *Asymptotic statistics*, Cambridge Univ. Press, 2000, 445 pp.
9. Solomon H., Stephens M. A., “Distribution of a sum of weighted chi-square variables”, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **72**:360 (1977), 881–885.
10. Jensen D. R., Solomon H., “A Gaussian approximation to the distribution of a definite quadratic form”, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **67**:340 (1972), 898–902.

Статья поступила 15.05.2017.