

УДК 519.6

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ СТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТОК ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Т. Н. Бронина

Описывается алгоритм построения начального приближения трехмерных структурированных сеток в областях вращения геометрически сложной формы. Алгоритм позволяет избежать получения около оси вращения вырожденных (не шестигранных) ячеек и ячеек малого объема. Приведены примеры сеток, построенных по предлагаемому алгоритму.

Введение

В данной работе изложен алгоритм построения начальных трехмерных структурированных сеток в областях вращения, причем предлагаемый алгоритм не сводится к “ротационному алгоритму”, который обычно применяется при построении сетки в области вращения, что приводит к появлению около оси вращения вырожденных (не шестигранных) ячеек и ячеек малого объема. Предлагаемый алгоритм позволяет избежать указанных недостатков. Как правило, построение сетки с хорошими вычислительными характеристиками выполняется в два этапа. На первом этапе строится начальная сетка, которая на втором этапе оптимизируется в соответствии с требуемыми критериями качества. Построение начальной сетки обычно выделяется в отдельную задачу, так как применяемые для генерации сеток вариационные методы и численные методы решения дифференциальных уравнений требуют начального приближения для решения. Обычно в качестве начальной берется сетка, полученная методом линейной интерполяции [1–3], но, как правило, для сложных областей такая сетка имеет самопересекающиеся ячейки и для последующей оптимизации необходимы методы, позволяющие работать с такими сетками. В то же время известно [1, 2, 4], что хорошее начальное приближение позволяет в десятки раз уменьшить число итераций при построении сетки, а иногда оказывает существенное влияние на качество конечной сетки. Заметим, что построение сетки на границах области тоже представляет собой отдельную задачу.

Мы приводим описание алгоритма для построения начальных трехмерных структурированных сеток в областях вращения, который позволяет построить сетку на границе области и гарантирует отсутствие самопересекающихся ячеек. Получаемая сетка сохраняет симметрию области.

1. Постановка задачи

В декартовой системе координат $\{x^1, x^2, x^3\}$ с осями $\{X^1, X^2, X^3\}$ в полуплоскости $x^2 = 0$, $x^1 \geq 0$ задана односвязная область U с границей ∂U , определяемой как множество

$$\partial U = t_0^0 \cup \bigcup_{j=1}^J \{B^j\},$$

где t_0^0 — начальная точка элемента e_1^1 , $B^j = \bigcup_{i=1}^{I^j} \{e_i^j, t_i^j\}$ — объединение, называемое далее блоком, нескольких элементов; e_i^j — элемент (дуга окружности или эллипса, отрезок прямой

и т.п.), $e_i^j \neq \emptyset$, $e_1^1 \not\subseteq X^3$; t_i^j — последняя точка элемента e_i^j и начальная точка элемента e_{i+1}^j (аналогично, последняя точка блока B^j является начальной для блока B^{j+1}); $t_{I,J}^j = t_0^0$. Кривую ∂U будем называть образующей.

Преобразование

$$x^1 = x^1 \cos \alpha, \quad x^2 = x^1 \sin \alpha, \quad x^3 = x^3, \quad 0 \leq \alpha \leq \varphi,$$

где $(x^1, x^3) \in \bar{U}$, определяет область вращения G ; ось координат X^3 — ось вращения.

Задача состоит в построении в области G структурированной 3D-сетки $T_{nml} = \{t_{nml}\}$, не имеющей особенностей на оси вращения и самопересекающихся параметрических поверхностей. Здесь $t_{nml} = (x_{nml}^1, x_{nml}^2, x_{nml}^3)$, $n = 1, \dots, N$; $m = 1, \dots, M$; $l = 1, \dots, L$. Под ячейкой сетки в данной работе понимается двенадцатигранник с восемью вершинами $\{t_{n+im+jl+k}\}$, $i = 0, 1$; $j = 0, 1$; $k = 0, 1$ и плоскими треугольными гранями, т.е. точки на гранях получаем с помощью линейных отображений треугольников, лежащих на гранях единичного куба, в физическую область. Тогда при одном фиксированном индексе (например, l) множество $S_l = \{t_{nml}\}_{n,m}$ определяет параметрическую поверхность, образованную соответствующими треугольными гранями двенадцатигранных ячеек. Аналогично определим параметрические поверхности $S_m = \{t_{nml}\}_{n,l}$, $S_n = \{t_{nml}\}_{m,l}$.

На образующей выделены некоторые группы элементов G_w , называемые далее вставками, причем в подобластях, полученных вращением элементов образующей, соответствующих вставкам G_w , трехмерная сетка должна иметь наперед заданное количество параметрических линий. Кроме того, в алгоритмах построения сетки должны быть предусмотрены такие приемы, как фиксация координат и соответствующих им параметрических линий на границах заданной области и “сглаживание” места соединения элементов образующей.

2. Описание алгоритма

Укажем алгоритм построения начального приближения регулярных трехмерных сеток, основанный на геометрическом подходе к построению сеток с учетом естественной симметрии относительно оси вращения и линий соединения отдельных поверхностей вращения, соответствующих элементам e_i^j .

Образующие можно классифицировать по тому, существуют ли в множестве ∂U элементы $e_i^j \in X^3$. Будем рассматривать образующие, у которых не больше двух элементов e_i^j лежат на оси вращения, причем элемент $e_{I,J}^j \subseteq X^3$. Если таких элементов больше, тогда образующую разбиваем на подмножества так, чтобы это требование выполнялось для каждого подмножества, и в этом случае сетка рассчитывается отдельно на каждом подмножестве. Будем обозначать область вращения G через G^1 , если существует единственный элемент $e_i^j \subseteq X^3$, и через G^2 , если существует два таких элемента. Если $X^3 \cap \partial U = \emptyset$, то предлагаемый алгоритм совпадает с ротационным.

Для построения регулярной сетки $T_{nml} = \{t_{nml}\} = \{(x_{nml}^1, x_{nml}^2, x_{nml}^3)\}$ ($n = 1, \dots, N$; $m = 1, \dots, M$; $l = 1, \dots, L$) область вращения G представляется криволинейным шестигранником с 8 вершинами, причем в предлагаемом представлении две (а при угле $\varphi = \pi$ — четыре) грани криволинейного шестигранника лежат в плоскости задания образующей. Отображение исходной области на шестигранник определяется заданием в определенной последовательности восьми точек (вершин шестигранника), часть из которых принадлежит образующей (точки t_i^j из множества ∂U), часть расположена симметрично относительно оси вращения. При таком определении вершин в криволинейном шестиграннике блок B^j такой, что $B^j \not\subseteq X^3$, описывает ребро криволинейного шестигранника и при повороте на угол φ образует одну из граней криволинейного шестигранника.

Для каждого из типов областей (G^1 или G^2) предлагается два способа представления их криволинейным шестигранником. Примеры областей вращения и отображения их на параметрический шестигранник (куб) с множеством вершин $\Xi = \{\xi_i\}$ ($i = 1, \dots, 8$) показаны

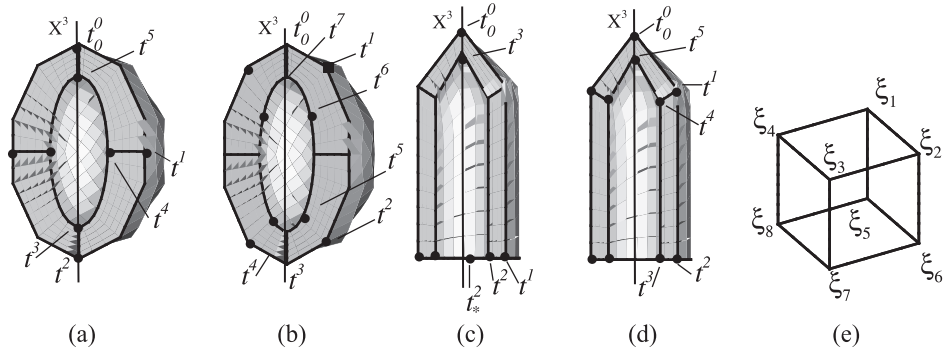


Рис. 1. Соответствие вершин и граней криволинейного шестигранника и параметрического куба.

на рис. 1: на рис. 1(a) и 1(b) для области типа G^2 отображение S^Δ сопоставляет вершинам $t^0, t^1, t^2, -t^1, t^5, t^4, t^3, -t^4$ криволинейного шестигранника соответственно вершины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_8$ куба Ξ , а отображение S^\square делает то же самое с вершинами $-t^1, t^1, t^2, -t^2, -t^6, t^6, t^5, -t^5$. На рис. 1(c) и 1(d) для области типа G^1 S^Δ и S^\square отображают на Ξ точки $t^0, t^1, t_*^1, -t^1, t^3, t^2, t_*^2, -t^2$ и $-t^1, t^1, t^2, -t^2, -t^4, t^4, t^3, -t^3$ соответственно. Через $-t^j$ обозначена точка, симметричная точке t^j относительно оси вращения, точка t_*^j имеет координаты $x_*^{1j} = x^{1j} \cos \varphi/2, x_*^{2j} = x^{1j} \sin \varphi/2, x_*^{3j} = x^{1j}$, точка t^j (индекс I^j опущен) — последняя точка блока B^j . Выбрав для области G желаемый способ отображения (S^Δ или S^\square) вершин криволинейного шестигранника, определим тем самым структуру сетки. Комбинацию типа сетки и способа расположения вершин криволинейного шестигранника назовем конфигурацией сетки. Так как точки $t^j \in \bar{U}$ являются последними точками блоков, то количество точек t^j в отображении позволяет определить количество блоков для каждой конфигурации: для конфигурации (G^1, S^Δ) образующая должна иметь четыре блока ($J = 4$), для (G^1, S^\square) — шесть блоков, для (G^2, S^Δ) — шесть блоков, для (G^2, S^\square) — восемь блоков.

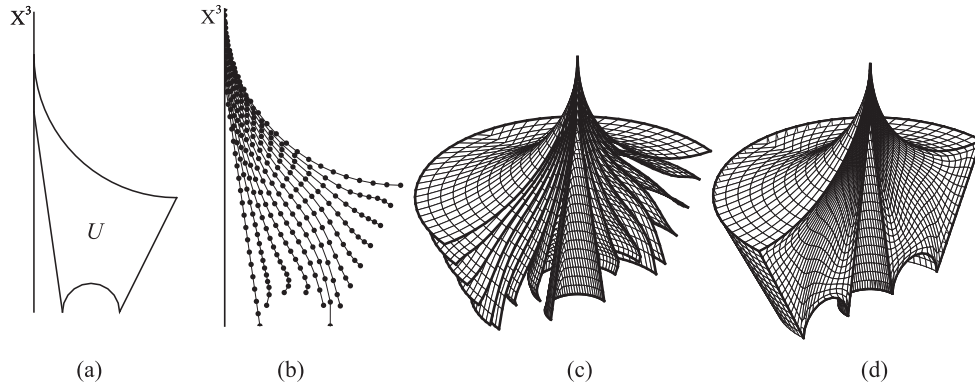


Рис. 2. Этапы построения сетки в области вращения: (a) образующая области вращения, (b) семейство параметрических линий в области \bar{U} для построения параметрических поверхностей, (c) семейство параметрических поверхностей, (d) сетка на границе поверхности вращения.

Идея предлагаемого алгоритма состоит в том, что сетка составляется из набора L двумерных сеток, рассчитанных на некоторых поверхностях вращения, чьи образующие l_i расположены в области \bar{U} . Фактически в области \bar{U} рассчитывается двумерная сетка, и параметрические линии одного из семейств параметрических линий двумерной сетки выбираются в качестве образующих для построения поверхностей вращения. Схема построения сетки по этому алгоритму показана на рис. 2. В случае, если сетка рассчитана с применением ротационного алгоритма, ее можно также рассматривать как набор двумерных сеток, рассчитанных на

некоторых поверхностях вращения, но каждая из таких двумерных сеток имеет вырожденные ячейки (рис. 3(с)).

Построение трехмерной сетки состоит из двух этапов: расчет двумерной сетки в области U и построение двумерных сеток на поверхностях вращения. Поясним некоторые моменты по каждому из этапов.

Построение параметрической поверхности вращения. Пусть в области U построена двумерная сетка $D_{mk} = \{x_{mk}^1, x_{mk}^3\}$ ($m = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, L$), не имеющая самопересекающихся ячеек. Зафиксировав индекс $k = k_1$, получим параметрическую линию $S_{mk_1} = \{x_{mk_1}^1, x_{mk_1}^3\}$.

Тогда, применяя преобразование

$$x_{nmk_1}^1 = x_{mk_1}^1 \cos \alpha_{nm}, \quad x_{nmk_1}^2 = x_{mk_1}^1 \sin \alpha_{nm}, \quad x_{nmk_1}^3 = x_{mk_1}^3,$$

получаем сетку на поверхности вращения S_{k_1} , которая лежит либо на границе области G , если в качестве образующей линии был выбран блок, $B^j \subseteq \partial U$ ($k_1 = 1, k_1 = L$) либо внутри области G . Значение угла α_{nm} зависит как от номера точки в двумерной сетке, так и от выбранной конфигурации. Например, для конфигурации (G^1, S^Δ) значение угла α_{nm} рассчитывается как

$$\alpha_{nn} = \frac{\varphi}{2}, \quad \alpha_{nm} = \frac{\varphi}{2(m-1)(n-1)}, \quad \alpha_{mn} = \varphi - \alpha_{nm} \quad (n = 2, \dots, N-1, m = n+1, \dots, N).$$

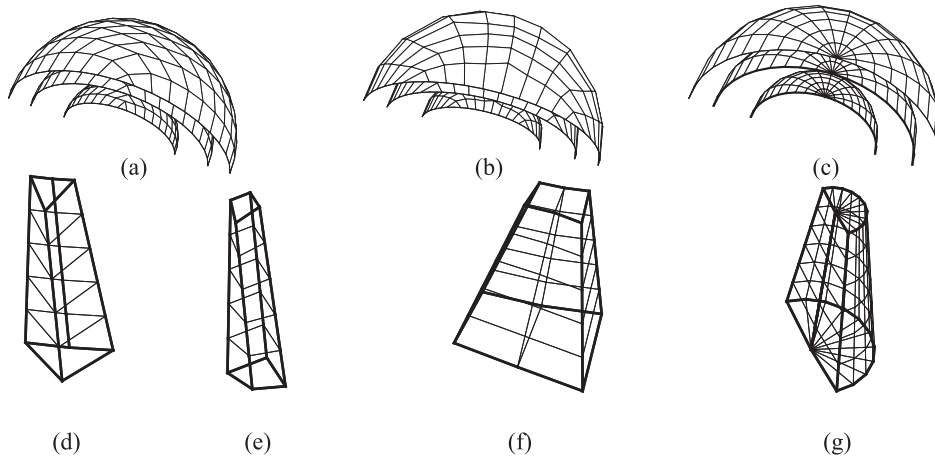


Рис. 3.

Пример расположения параметрических линий на поверхностях вращения для конфигурации (G^1, S^Δ) изображен на рис. 3(а), для конфигурации (G^2, S^\square) — на рис. 3(б). Для сравнения на рис. 3(с) изображены параметрические поверхности в сетке, построенной по ротационному алгоритму. На рис. 3(д)–3(г) изображены ячейки соответствующих сеток, находящиеся около оси вращения; на рис. 3(д) для получения области задан угол $\varphi = \pi$, на рис. 3(е) — угол $\varphi = \pi/2$.

Расчет двумерной сетки в области образующей. Существует много алгоритмов построения оптимальных двумерных сеток (см., например, [5]), и для построения трехмерной сетки по описываемому алгоритму можно использовать любой алгоритм, позволяющий строить невырожденную двумерную сетку. Отметим здесь некоторые моменты, которые, по нашему мнению, позволяют при построении двумерной сетки учесть требования, предъявляемые к трехмерной сетке. Область U с границей ∂U представляем криволинейным четырехугольником, вершинами которого являются точки t^j из набора вершин криволинейного шестигранника.

Задача построения невырожденной сетки разделена на два этапа. На первом этапе построения двумерной сетки строим сетку методом линейной интерполяции (см., например,

рис. 4(a),(c)). Если в сетке получились самопересекающиеся ячейки, применяется алгоритм оптимизации. Для получения сетки без самопересекающихся ячеек мы использовали минимизацию функционала вида

$$F^{ij} = (1 - \varepsilon_1)F_1^{ij} + \varepsilon_1 F_2^{ij}, \quad F_1^{ij} = \sum_{l=1}^4 (S_l - S_0)^2, \quad F_2^{ij} = \sum_{l=5}^6 (S_l - \overline{S_0})^2,$$

$$S_0 = \left(\sum_{l=1}^4 S_l \right) / 4, \quad S_l = \left(\sum_{t=1}^4 S_l^t \right) / 4, \quad \overline{S_0} = \max\{|S_1|, |S_2|\} / 2, \quad 0 \leq \varepsilon_1 \leq 1,$$

где $S_l (l = 1, \dots, 4)$ — площади четырехугольников в девятиточечном шаблоне двумерной регулярной сетки.

Функционал F_1^{ij} (сумма квадратов отклонений площадей четырехугольников от их средней площади) контролирует отсутствие самопересекающихся ячеек. Возможность использования функционалов аналогичного вида для построения оптимальных двумерных сеток указана в [8]. Функционал F_2^{ij} , как показал опыт расчетов, обеспечивает некоторую гладкость параметрических линий сетки. Результат работы алгоритма оптимизации с применением указанных функционалов показан на рис. 4: на рис. 4(a) изображена сетка, у которой некоторые узлы не принадлежат области U ; на рис. 4(b) — сетка, полученная в результате оптимизации начальной сетки, изображенной на рис. 4(a); на рис. 4(d) представлена оптимальная сетка, в начальном приближении (рис. 4(c)) которой имелись самопересекающиеся ячейки. Сетка на границе области вращения, построенная по образующей с рис. 4(d), изображена на рис. 5(a).

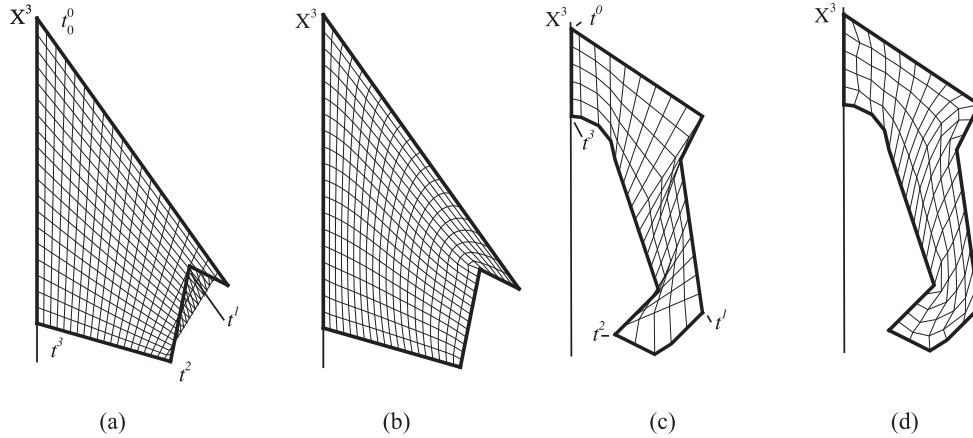


Рис. 4.

Функционалы, аналогичные описанным выше, применялись нами и для оптимизации сеток на поверхностях вращения.

Для управления расстановкой точек на границе (и, как следствие, расположением параметрических линий и поверхностей в трехмерной сетке) вводится множество признаков $P = \{p_i^j, k_i^j, g_i^j\}$, где признак p_i^j определяет, должны ли принадлежать ($p_i^j = -1, 1$) или нет ($p_i^j = 0$) координаты последней точки данного элемента расчетной сетке. Отрезком назовем совокупность рядом стоящих элементов, точка соединения которых имеет признак $p_i^j = 0$. Признак $p_i^j = 1$ указывает на то, что в отрезке образующей необходимо расставить k_i^j точек.

Число точек на отрезке при $p_i^j = -1$ определяется пропорционально отношению длины отрезка к длине блока; признак g_i^j определяет закон распределения длин между точками на отрезке (равномерность, уменьшенные длины на концах и т.п.). Расстояние между точками на

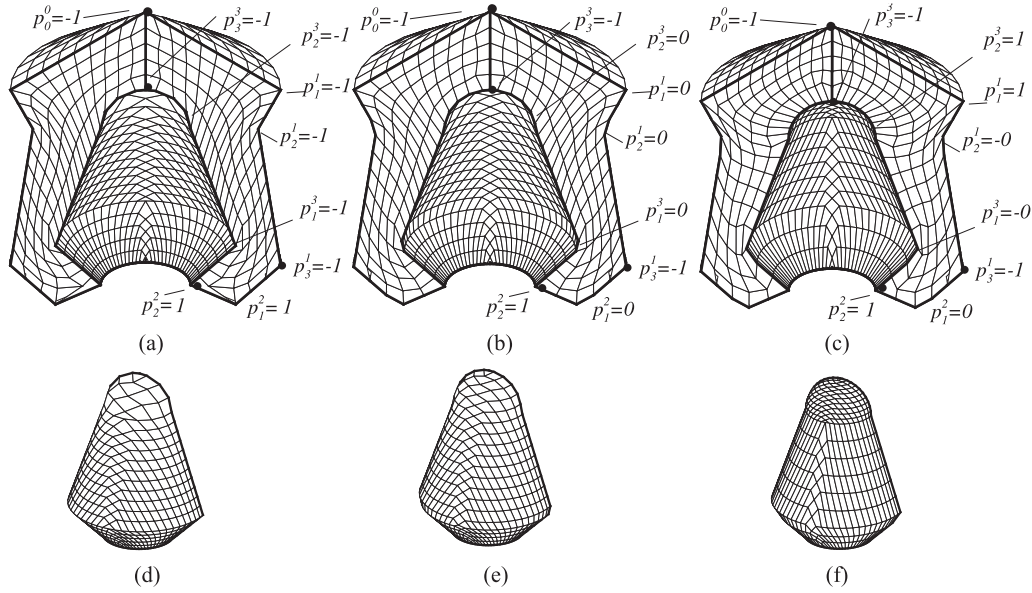


Рис. 5. Использование признаков p_i^j для управления качеством сетки.

образующей определяется как длина дуги элемента между соседними точками. Для вычисления координат точек на образующей, расположенных друг от друга на расстояниях, определенных параметром g_i^j из множества P , для каждого элемента рассчитывается описывающий его сплайн. Замена исходного представления элемента в данном случае возможна, так как в качестве элементов рассматриваются только гладкие кривые. Для расчетов использовались В-сплайны третьего порядка как наиболее удобные в вычислительном плане. Опыт применения таких сплайнов для представления границ областей описан, например, в [5,6]. Особенности применения и вычислительные алгоритмы подробно разобраны в [7]. Задание множества P значительно расширяет возможности построения невырожденных сеток в случае сложной, существенно негладкой образующей. На рис. 5 изображены сетки на границе области вращения, рассчитанные для конфигурации (G^1, G^Δ) с одной и той же образующей, но с различными множествами P . На рис. 5(a),(d) сетка рассчитана, когда $p_i^j = -1$ для последних точек всех элементов e_i^j образующей; на рис. 5(b),(e) — для всех последних точек элементов, кроме последних точек блоков, $p_i^j = 0$; на рис. 5(c),(f) для e_1^1 и e_3^3 задано $p_i^j = 1$ и $k_i^j = 10$.

3. Примеры

Приведем примеры сеток, рассчитанных по описанному алгоритму.

Пример 1. Расчет сетки в области, “склеенной” из трех областей. На рис. 6 изображена “склейка” трех областей, направляющие которых согласованы по соприкасающимся блокам B^j . Для всех областей выбрана конфигурация (G^2, S^Δ) .

Каждая из трех образующих состоит из шести блоков.

Направляющая задана множеством $\partial U = t_0^0 \cup \bigcup_{j=1}^5 \{B^j\}$, $B^j = \bigcup_{i=1}^{I_0^j} \{e_i^j, t_i^j\}$, где для первой области элементы $e_1^1, e_2^1, e_3^1, e_4^1, e_5^1, e_6^1$ — отрезки прямой, $e_1^2, e_2^2, e_3^2, e_4^2, e_5^2, e_6^2$ — дуги окружностей, $e_1^3, e_2^3, e_3^3, e_4^3, e_5^3, e_6^3$ — дуги окружностей; для второй области все элементы — дуги окружностей; для третьей области элементы $e_1^4, e_2^4, e_3^4, e_4^4, e_5^4, e_6^4$ — дуги эллипсов, $e_1^5, e_2^5, e_3^5, e_4^5, e_5^5, e_6^5$ — дуги эллипсов, $e_1^6, e_2^6, e_3^6, e_4^6, e_5^6, e_6^6$ — отрезки прямой. Для элементов e_i^j параметр g_i^j распределения длин между точками на элементе задан как $\{h/2, h, \dots, h\}$, для остальных элементов точки расставляются

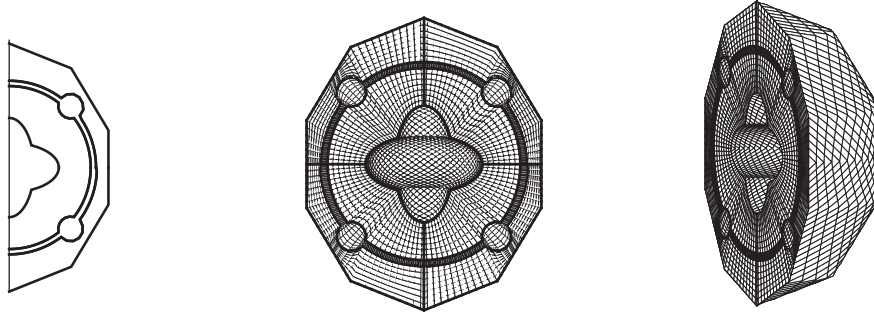


Рис. 6. “Склейка” трех областей вращения.

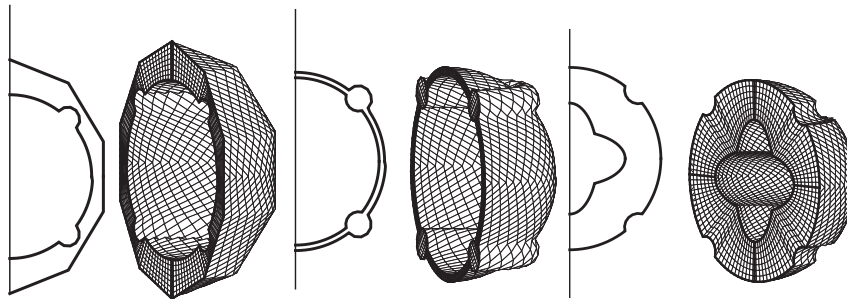


Рис. 7. Образующие и сетки на границах поверхностей вращения, составляющие “склейку”.

ся равномерно по длине дуги. На рис. 7 изображены направляющие и сетки, составляющие “склейку”.

Пример 2. Расчет сетки со вставками. Продемонстрируем возможность использования алгоритма для построения сеток с выделенными подблоками (вставками). Для каждой вставки G_w сетка должна иметь регулярную структуру, т.е. узлы во вставке G_w должны иметь нумерацию $T_{w_{ijk}} = \{x_{ijk}^1, x_{ijk}^2, x_{ijk}^3\}, i = 1, \dots, N; j = j_w, \dots, M_w; k = 1, \dots, L$. Учитывая требование сохранения регулярной нумерации в каждой вставке, для построения сетки выбираем конфигурацию (G^1, S^\square) .

Пример сетки со вставками изображен на рис. 8.

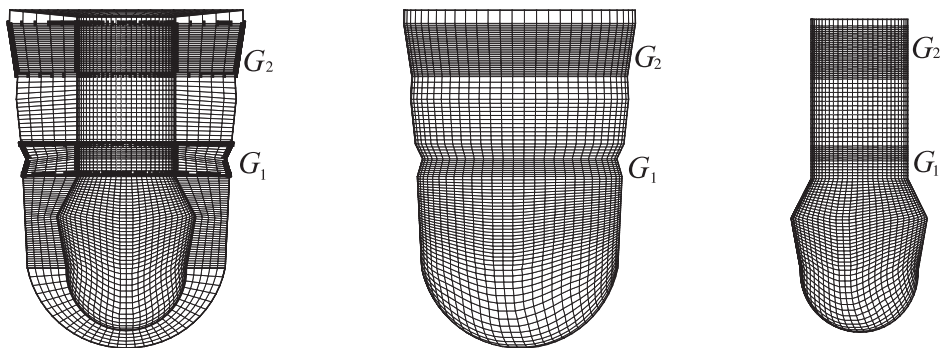


Рис. 8. Пример сетки со вставками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Годунов С.К.** Численные методы многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1978.
2. **Khairullina O.B., Sidorov A.F. and Ushakova O.V.** Variational methods of construction of optimal grids // Handbook of grid generation / Ed. by J.F. Thompson, B.K. Soni, and N.P. Weatherill. Boca Ration; London; New York; Washington: CRC Press, 1999. P.36-1–36-25.
3. **Serezhnikova T.I., Sidorov A.F. and Ushakova O.V.** On one method of construction of optimal curvilinear grids and its applications // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1989. Vol. 4, no. 2. P. 137–155.
4. **Глассер А.Г., Лисейкин В.Д., Шокин Ю.И.** Построение разностных сеток с помощью уравнений Бельтрами и диффузии. Новосибирск: Наука, 2006.
5. Handbook of grid generation / Ed. by J.F. Thompson, B.K. Soni, and N.P. Weatherill. Boca Ration; London; New York; Washington: CRC Press, 1999.
6. **Soni B.K., Yang S.** NURBS-based surface grid redistribution and remapping algorithms // Comp. Aided Geom. Design. 1995. No. 12. P. 676–692.
7. **Faux I.D., Pratt M.J.** Computational geometry for design and manufacture. Chichester: Horwood, 1979.
8. **Беликов В.В.** Об одном методе построения расчетных сеток // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. № 4. С. 1262–1266.

Поступила 11.12.2007