2000. Т. 36, № 8. С. 1101 — 1105

УДК 517.956

О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ЛАВРЕНТЬЕВА — БИЦАДЗЕ, ДОПУСКАЮЩИХ НУЛИ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

А. П. Солдатов

1. Решения эллиптических уравнений на плоскости, допускающих нули бесконечного порядка внутри области своего задания, обращаются тождественно в нуль. Это свойство, впервые обнаруженное Т. Карлеманом [1, с. 170], распространяется и на случай нулей на границе при условии, что в их окрестности решение удовлетворяет однородному краевому условию некоторой правильно поставленной задачи. Проиллюстрируем этот факт на примере аналитических функций.

Пусть функция $\varphi = u + iv$ аналитична в области D, имеет в граничной точке τ нуль бесконечного порядка и в некоторой окрестности Γ этой точки границы ∂D удовлетворяет однородному краевому условию

$$(au + bv)(t) = 0, \quad t \in \Gamma, \tag{1}$$

где функции a, b кусочно-непрерывны и $a^2 + b^2 \neq 0$, всюду отличны от нуля, включая предельные значения в точках разрыва. Пусть, наконец, кривая Γ кусочно-гладкая и τ не является точкой возврата (точнее, внутренний угол D в этой точке не равен нулю). Тогда функция $\varphi \equiv 0$ в D.

В самом деле, при достаточно малых r пересечение окружности $|z - \tau| = r$ с D состоит из дуги Γ_0. Выберем r так, чтобы $\varphi(t) \neq 0$ всюду на Γ_0, и обозначим через D_0 подобласть D, ограниченную Γ и Γ_0. Тогда, полагая $a = -v$, $b = u$ на Γ_0, краевое условие (1) можем рассматривать на ∂D_0 для аналитической в D_0 функции φ.

Рассмотрим в D_0 аналитическую функцию $F(z) = e^{f(z)}$, мнимая часть $\operatorname{Im} f$ которой решает задачу Дирихле

$$\operatorname{Im} f|_{\partial D_0} = \chi, \tag{2}$$

где функция χ кусочно-постоянна и по отношению к обходу ∂D_0, оставляющую область D_0 слева, монотонно убывает на $\partial D_0 \setminus \tau$. Тогда $F(z)$ непрерывна в $\overline{D}_0 \setminus \tau$ и в точке τ допускает особенность конечного порядка. Поэтому к произведению $F\varphi^2$ можно применить теорему Коши:

$$\int\limits_{\partial D_0} F\varphi^2\, dt = 0. \tag{3}$$

Пусть кусочно-непрерывные функции $\nu(t)$ и $s(t)$ означают соответственно аргументы $a + ib$ и единичного касательного вектора на ∂D_0. В силу (1) имеем $\varphi(t) = \pm i e^{i\nu(t)}|\varphi(t)|$, $t \in \partial D_0$, так что с учетом (2)

$$\operatorname{Im} \int\limits_{\partial D_0} F\varphi^2\, dt = -\int\limits_{\partial D_0} e^{\operatorname{Re} f}|\varphi|^2 \sin(\chi + \nu + s)\, dt.$$

Следовательно, если выбор функции χ подчинить условию

$$\sin(\chi + 2\nu + s) \geq 0, \tag{4}$$

то система (3) приводит к равенству $\varphi = 0$ на ∂D_0, откуда $\varphi \equiv 0$ в D.

2. Возникает вопрос, в какой мере указанные свойства решений эллиптических уравнений переносятся на решения уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа. Этот вопрос изучим на примере простейшей модельной системы Лаврентьева — Бицадзе

$$(\operatorname{sgn} y)u_x = v_y, \quad -u_y = v_x \tag{5}$$

в смешанной области D, т.е. в области, для которой эллиптическая и гиперболические части $D^{\pm} = D \cap \{\pm y > 0\}$ не пусты. Складывая и вычитая уравнения этой системы в D^-, убеждаемся в том, что

$$u \pm v = \mathrm{const} \quad \text{вдоль характеристик} \quad x \mp y = \mathrm{const}\,. \tag{6}$$

По этой причине множество D^- естественно предполагать выпуклым относительно характеристик, т.е. вместе с парой своих точек, расположенных на характеристике, оно целиком содержит и отрезок, соединяющий эти точки.

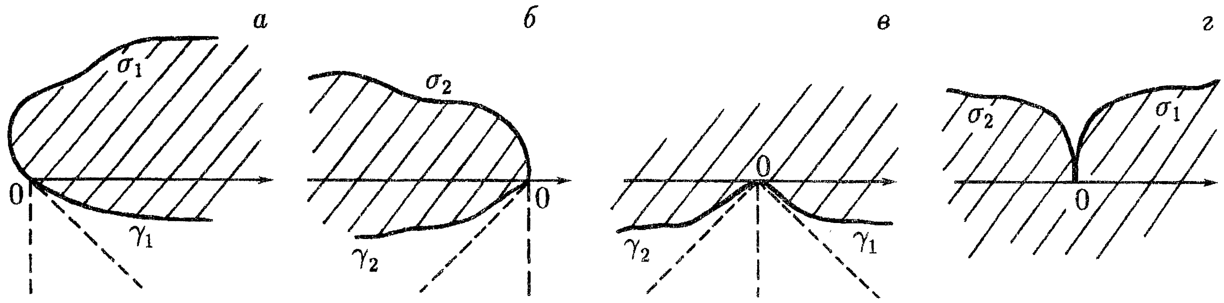
Предположим, что решение $u+iv$ системы (3) имеет нуль бесконечного порядка в некоторой точке τ, лежащей внутри D. Очевидно, τ не может принадлежать D^+. Пусть точка τ лежит на оси $y = 0$ изменения типа. Тогда получаем аналитическую в D^+ функцию $\varphi = u + iv$, имеющую в точке τ нуль бесконечного порядка. В отсутствие граничного условия (1) такая функция, очевидно, существует. Продолжая ее в D^- по правилу (6), построим и решение $u + iv$ смешанной системы (3) с требуемым свойством.

Аналогично убеждаемся в справедливости этого факта и для случая $\tau \in D^-$. Другими словами, свойство Карлемана для решения системы (5) не имеет места.

Обратимся к ситуации, когда точка τ является граничной и в ее окрестности выполнено краевое условие (1), где $a^2 + (\operatorname{sgn} y)b^2$ всюду отлично от нуля. Пусть точка τ лежит на оси $y{=}0$ изменения типа (можно положить $\tau = 0$) и D^- расположена вне характеристического угла $|x|+y < 0$. Тогда для окрестности этой точки смешанной области D может представиться один из четырех случаев, изображенных на рисунке. Граничные дуги σ_j (γ_j) эллиптической (гиперболической) части области D предполагаются гладкими, причем внутренние углы $D^{\pm}$ в этой точке считаем непрерывными. В силу принятых предположений относительно D дуги γ можно записать как графики непрерывно дифференцируемых функций

$$\gamma_1: \quad x + y = \alpha_1(x - y), \quad 0 < \alpha_1(t) < t, \qquad \gamma_2: \quad x - y = \alpha_2(x + y), \quad t < \alpha_2(t) < 0, \tag{7}$$

в характеристической системе координат, причем $\alpha_k'(0) < 1$.



3. В случае *г* существование ненулевых решений (u, v) системы Лаврентьева — Бицадзе, имеющих в точке $\tau = 0$ нуль бесконечного порядка и удовлетворяющих на $\sigma_1 \cup \sigma_2$ однородному краевому условию (1), не вызывает сомнений. Достаточно построить соответствующую аналитическую функцию $\varphi = u + iv$ в D^+ и продолжить ее в D^- по правилу (4).

Утверждается, что в случаях *а* — *в* эти решения могут быть только нулевыми.

Теорема 1. *Пусть пара $(u, v) \in C(\overline{D})$ является при $y \neq 0$ решением системы (5) в смешанной области D, в граничной точке $\tau = 0$ имеет нуль бесконечного порядка и в окрестности этой точки удовлетворяет краевому условию (1). Тогда в каждом из возможных случаев а — в это решение $(u, v) \equiv 0$ в D.*

Доказательство. Запишем (1) на гиперболическом участке γ в виде $(a+b)(u+v)+$ $+(a-b)(u-v)=0$. По предположению $a^2-b^2\neq 0$ на γ, так что, согласно (4), (5), краевые условия можно "снести" на окрестность нуля действительной прямой

$$(u+v)(t)=\rho_1(t)(v-u)[\alpha_1(t)], \quad t>0, \qquad (v-u)(t)=\rho_2(t)(v+u)[\alpha_2(t)], \quad t<0, \tag{8}$$

где положено $\rho_1(x-y)=((a+b)/(a-b))(x+iy)$, $(x+iy)\in\gamma_1$, $\rho_2(x+y)=((a-b)/(a+b))(x+iy)$, $(x+iy)\in\gamma_2$.

В результате приходим к краевым условиям (1), (8) для аналитической в D^+ функции $\varphi=u+iv$ в некоторой окрестности $\tau=0$ границы ∂D^+.

Выберем $r>0$ столь малым, чтобы пересечение D^+ с окружностью $|z|=r$ состояло из одной дуги σ_0, причем функция $\varphi(z)$ была бы всюду отличной от нуля на этой дуге. Часть D^+, лежащую внутри круга $|z|<r$, обозначим через D_0. Пусть еще для краткости $J_1=[0,r]$, $J_2=[-r,0]$.

Очевидно, что граница ∂D_0 составлена из $\sigma=\sigma_k\cup\sigma_0$ и J_k в случаях *а* и *б*, отвечающих соответственно $k=1$ и $k=2$, и из полуокружности $\sigma=\sigma_0$ и $J_1\cup J_2$ в случае *в*.

Как и в п. 1, не ограничивая общности, можем считать, что краевое условие (1) задано на σ, а соответствующие краевые условия (8) — на J_k, $k=1,2$. Очевидно, что подстановка $\varphi(z)=$ $=z^m\varphi_0(z)$ с натуральным m не меняет характера этих условий, при этом $\rho_k(t)$ заменяется на $[\alpha_k(t)/t]^m\rho_k(t)$. Поэтому, выбирая m достаточно большим и переходя к переобозначениям, функцию ρ_k всегда можем подчинить условию

$$\rho_k^2(t)\leq\alpha_k'(t), \quad t\in J_k. \tag{9}$$

Следуя рассуждениям п. 1, рассмотрим в D_0 аналитическую функцию $F=e^f$, где $\operatorname{Im} f$ решает задачу Дирихле (2) с кусочно-постоянной монотонно убывающей на $\partial D_0\setminus\{0\}$ функцией χ. Выбор последней на σ подчиняем условию (4) и предполагаем, что $\chi=0$ на J_1 и $\chi=-(2n+1)\pi$ на J_2 с некоторым натуральным n. Тогда F непрерывна в $\overline{D}_0\setminus\{0\}$, имеет в точке $z=0$ полюс, причем

$$\pm F(t)>0, \quad \pm t>0, \tag{10}$$

$$|F[\alpha_k(t)]|>|F(t)|. \tag{11}$$

В самом деле, в доказательстве нуждается только последнее неравенство. В силу принципа максимума гармоническая функция $\operatorname{Im} f(z)$, $z\in D_0$, заключена между 0 и $-(2n+1)\pi$, так что $\partial(\operatorname{Im} f)/\partial y|_{J_1}\leq 0$, $\partial(\operatorname{Im} f)/\partial y|_{J_2}\geq 0$. С учетом условия Коши — Римана отсюда следует (11).

Рассмотрим теперь мнимую часть интеграла в левой части (3). Как и в п. 1, в силу условия (4), выполненного на σ, имеем

$$\operatorname{Im}\int_\sigma F\varphi^2\,dt\leq 0. \tag{12}$$

С другой стороны, для интегралов по J_k с учетом (8), (10) можем записать:

$$2\operatorname{Im}\int_0^r F(u+iv)^2\,dt=\int_0^r F[(v+u)^2-(v-u)^2]\,dt=-\int_{\alpha(r)}^r F(v-u)^2\,dt+\int_0^r(\rho_1^2F-\alpha_1'(F\circ\alpha))(v-u)^2\circ\alpha_1\,dt,$$

$$2\operatorname{Im}\int_{-r}^0 F(u+iv)^2\,dt=\int_{-r}^0 F[(v+u)^2-(v-u)^2]\,dt=\int_{-r}^{\alpha_2(-r)} F(v+u)^2\,dt-\int_{-r}^0(\rho_2^2F-\alpha_2'F)(v+u)^2\circ\alpha_2\,dt.$$

На основании (9) — (11) все интегралы здесь отрицательно определенные, что с учетом (3), (12) возможно только при $\varphi\equiv 0$.

Замечание. В доказательстве теоремы в действительности существенна лишь ограниченность функций ρ_k в (8). Поэтому условие $a^2-b^2\neq 0$ на γ можно заменить более слабым требованием $a-b\neq 0$ всюду на γ_1 и $a+b\neq 0$ на γ_2.

4. Применим теорему 1 к выявлению точной асимптотики решений однородной задачи Римана — Гильберта для системы (5) в смешанной области D с краевым условием (1) на всей границе $\partial D = \sigma \cup \gamma$, которая подробно изучена в [2]. Область D ограничена гладкими дугами $\sigma \subseteq \{y \geq 0\}$ и $\gamma \subseteq \{y \leq 0\}$ с общими концами $x = 0$, $x = 1$ действительной оси, причем дуга γ некасательна к семейству характеристик и, следовательно, лежит внутри характеристического треугольника. Внутренние углы $\theta_k^\pm$ области $D^\pm$ в точках $x = k$, $y = 0$ считаем положительными, так что $0 < \theta_k^+ \leq \pi$, $0 < \theta_k^- < \pi/4$, $k = 0, 1$.

Коэффициенты a, b предполагаются непрерывными на каждой из дуг σ и γ, под $a^\pm(k)$ и $b^\pm(k)$ удобно понимать предельные значения этих функций в точках $x = k$, $y = 0$ со стороны полуплоскости $\pm y > 0$.

Решение $\Phi = u+iv$ задачи ищется в весовом классе Гёльдера $H_{\mu,\lambda}(\overline{D}^+; 0, 1)$, его поведение в D^-, согласно (6), целиком определяется сужением $\Phi(t)$, $0 < t < 1$. Следуя [2], задачу Римана — Гильберта отнесем к нормальному типу в классе $H_{\mu,\lambda}$, если $a^2 + b^2 \neq 0$ всюду на σ и выполнено одно из условий: $i)$ $a(t) - b(t) \neq 0$, $t \in \gamma$, $\lambda_0 > \lambda_0^*$, $\lambda_1 < \lambda_1^*$; $ii)$ $a(t) + b(t) \neq 0$, $t \in \gamma$, $\lambda_0 < \lambda_0^*$, $\lambda_1 > \lambda_1^*$, где $\lambda_k^* \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ определяются равенством

$$\lambda_k^* = (-1)^k \frac{1}{\ln \operatorname{tg}(\pi/4 + \theta_k^-)} \ln \frac{|a^-(k) + b^-(k)|}{|a^-(k) - b^-(k)|}, \quad k = 0, 1.$$

Для определенности ниже считаем выполненным $i)$. Требования на гладкость дуг σ и γ и коэффициентов a, b описаны в [2].

Согласно [2], нётеровость задачи в классе $H_{\mu,\lambda}$ равносильна условию

$$\lambda_k \notin \Delta_k \cup \Delta_k^*, \quad k = 0, 1, \tag{13}$$

где Δ_k и Δ_k^* означают некоторые замкнутые подмножества прямой $\mathbb{R}$ следующей структуры.

Множество Δ_k дискретно и имеет единственные предельные точки на $\pm\infty$, причем расстояние между соседними точками не превосходит θ_k^+ и стремится к этой величине при приближении к ∞. Множество Δ_k^* имеет λ_k^* своей единственной предельной точкой, лежит по одну сторону от λ_k^* и расположено между парой соседних точек из Δ_k. В случае $\lambda_k^* = \pm\infty$ множество Δ_k периодично, а Δ_k^* пусто. Если величина

$$x_k = \arg(a + ib)^+(k) + (-1)^k \theta_k^+ \lambda_k^* - \pi/4 \tag{14}$$

кратна π, то Δ_k^* состоит из единственной точки λ_k^*.

В каждом связном подмножестве параметра λ, удовлетворяющего условию (13), индекс задачи сохраняет постоянное значение, а при переходе λ через точки множества Δ_k (Δ_k^*) в направлении от $-\infty$ к $+\infty$ претерпевает скачок, равный -1 (-2).

Теорема 2. *Пусть $u + iv \in H_{\mu,\lambda}(\overline{D}^+; 0, 1)$ — решение однородной задачи Римана — Гильберта нормального типа. Тогда найдется такое $\delta_0 \in \Delta_0 \cup \Delta_0^*$, $\delta \geq \lambda_0$, что в области D_0 справедливо разложение*

$$(u + iv)(z) = \begin{cases} c(z) z^{\delta_0}, & \delta_0 \in \Delta_0 \setminus \Delta_0^*, \\ c_1(z) z^{\delta_0 + is_0} + c_2(z) z^{\delta_0 - is_0}, & \delta_0 \in \Delta_0^* \setminus \Delta_0, \\ c_1(z) z^{\delta_0} + c_2(z) z^{\delta_0} \ln z, & \delta_0 \in \Delta_0 \cap \Delta_0^*, \end{cases} \tag{15}$$

где коэффициенты $c, c_k \in H_{\mu,\varepsilon}(D_0; 0)$ с некоторым $\varepsilon > 0$ и в обозначениях (14) положено $2s_0 = \operatorname{arch}[(\cos 2x_0) \operatorname{cth}(|\delta_0 - \lambda_0^*| \ln(\pi/4 + \theta_0^-))]$. Это разложение точно в том смысле, что $|c(0)| \neq 0$, $|c_1(0)| + |c_2(0)| \neq 0$.

В окрестности D_1 точки $z = 1$ либо $u+iv \in H_{\mu,\nu}(D_1, 1)$ с любым $\nu < \lambda_1^*$, либо найдется такое $\delta_1 \in \Delta_1^* \cup \Delta_1^0$, $\delta_1 < \lambda_1^*$, что справедливо аналогичное разложение с тем же свойством точности.

Доказательство. Без требования точности справедливость теоремы обеспечивается теоремой 1 из [2], где $\delta_0 \in \Delta_0 \cup \Delta_0^*$ представляет собой правый конец того интервала дополнения $\Delta_0 \cup \Delta_0^*$, которому принадлежит λ_0. Нарушение требования точности означает переход к следующему интервалу справа. Таким образом, либо после конечного числа шагов получим точное представление (15), либо $u+iv \in H_{\mu,\nu}(\overline{D}_0, 0)$ с любым $\nu > 0$, т.е. (u, v) допускает нуль бесконечного порядка в точке $\tau = 0$. На основании теоремы 1 (и замечания к ней) последнюю возможность следует исключить.

Рассуждения для весового порядка λ_1 в окрестности D_1 аналогичны.

5. Заметим, что теорема 2 сохраняет свою силу и в случае, когда однородные краевые условия удовлетворяются в окрестности одной из точек $z = 0$ или $z = 1$. Поэтому данную теорему можно использовать для описания асимптотики решения (u, v) системы (5) с однородным краевым условием (1) в окрестности граничной точки $\tau = 0$ в случаях *а* или *б* (см. рисунок). Для этого необходимо кривые σ_k и γ_k замкнуть и получить область, к которой можно применить теорему 2.

Более точно, пусть σ и γ — дуги Ляпунова, функции a, b удовлетворяют условию Гёльдера и $a^2 + (\operatorname{sgn} y)b^2 \neq 0$ всюду, включая предельные значения при $y \to 0$, $\pm y > 0$. Пусть $\theta^{\pm}$ означают внутренние углы области $D \cap \{\pm y > 0\}$ в точке $\tau = 0$, так что $0 < \theta^+ \leq \pi$, $0 < \theta^- < \pi/4$. Пусть λ^* определяется аналогично λ_k^* п. 4, где $k = 0$ и $k = 1$ соответствуют случаям *а* и *б* соответственно (см. рисунок). Аналогичный смысл имеют и множества Δ, Δ^*, и величины x, s, фигурирующие в теореме 2.

Пусть пара (u, v) является при $y \neq 0$ решением системы (5) и удовлетворяет в окрестности точки τ (случай *а* и *б*) однородному краевому условию (1). Пусть для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ функция $|x + iy|^{-\lambda}[u(x, y) + iv(x, y)]$ непрерывна по Гёльдеру в $\overline{D}$ и δ означает верхнюю грань всех таких чисел λ. Тогда $\delta \in \Delta \cup \Delta^*$ и для $(u+iv)(x, y)$ справедливо соответствующее представление (15).

Литература

1. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М., 1966.
2. *Солдатов А. П.* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 12. С. 1649 — 1659.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик

Поступила в редакцию 20 мая 1999 г.