ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 122, № 3
март, 2000

Д. П. Желобенко*

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МОДУЛИ ВЕРМА И W-РЕЗОЛЬВЕНТЫ НАД АЛГЕБРАМИ КАЦА–МУДИ

Изложены новые аспекты теории экстремальных уравнений над симметризуемыми алгебрами Каца–Муди. Особое внимание уделяется развитию новых методов, пригодных для обобщения известных конечномерных результатов на бесконечномерные (главным образом, аффинные) алгебры Ли. Основные результаты сводятся к описанию специальных расширений универсальных обертывающих алгебр, к изучению тонкой структуры W-резольвент, а также к применению этих методов в исследовании "экстремальных проекторов" над алгебрами Каца–Муди.

ВВЕДЕНИЕ

Цель этой статьи – дать систематическое изложение ряда вопросов, связанных с теорией экстремальных уравнений над алгебрами Каца–Муди, т.е. уравнений $\mathfrak{n}_+ x = 0$, где $\mathfrak{n}_+$ – положительная часть алгебры Каца–Муди $\mathfrak{g}$. А именно мы рассматриваем различные расширения (пополнения) универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$, их действие в универсальном модуле Верма $M(\mathfrak{g})$ над алгеброй $U(\mathfrak{g})$, резольвенты экстремальных уравнений в модуле $M(\mathfrak{g})$, их действие в стандартных модулях Верма и т.д. Основы этих методов были заложены в работах автора начиная с 1983 г. [1] в связи с теорией гиперсимметрий систем экстремальных уравнений. Значительная часть результатов систематизирована в монографии [2], причем наиболее детально для случая $\dim \mathfrak{g} < \infty$.

Исследование экстремальных уравнений существенно связано с рассмотрением универсального модуля Верма, определенного в [1] как естественная накрывающая стандартного семейства модулей Верма над алгеброй $U(\mathfrak{g})$. Подобное но более формальное определение предложено в статье Кашивары [3], где для случая $\dim \mathfrak{g} < \infty$ изложен иной подход к теории экстремальных уравнений, основанный на изучении когомологий специального семейства индуцированных $\mathfrak{g}$-модулей. В отличие от [3] наш подход конструктивен и основан на изучении некоторых W-резольвент, ассоциированных с группой Вейля алгебры $\mathfrak{g}$. Существенно, что этот метод пригоден и для бесконечномерных симметризуемых алгебр Каца–Муди. В действительности речь идет о двух дуальных методах, синтез которых приводит, в частности, к конструктивному описанию экстремальных проекторов над алгеброй $U(\mathfrak{g})$.

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Существенная часть статьи носит обзорный характер. Однако весь материал излагается в новой трактовке, с упрощением ряда доказательств и добавлением новых результатов. В разделах 1, 2 изложены предварительные конструкции, связанные с описанием расширений алгебры $U(\mathfrak{g})$ и их действий в модуле $M(\mathfrak{g})$. Основной результат этих конструкций сформулирован в теореме 2.4, где дается описание расширений алгебры $U(\mathfrak{g})$ в терминах эндоморфизмов рациональной оболочки модуля $M(\mathfrak{g})$. В разделах 3, 4 излагаются результаты об экстремальных проекторах над алгеброй $U(\mathfrak{g})$. В разделе 5 изложена конструкция W-резольвент в модуле $M(\mathfrak{g})$. Основной технический материал собран в разделе 6, где исследуется связь между левыми и правыми резольвентами в модуле $M(\mathfrak{g})$. Среди результатов этого раздела центральное место занимает теорема 6.8, описывающая "тонкую структуру" W-резольвент. Использование этой теоремы позволяет, в частности, получить новое доказательство факторизационной теоремы 4.5, пригодное для всех (не только конечномерных) симметризуемых алгебр Каца–Муди. В разделе 7 излагается ряд других результатов, имеющих отношение к теореме 6.8.

Интересно отметить, что использование W-резольвент позволяет существенно прояснить структуру экстремальных проекторов над алгеброй $U(\mathfrak{g})$, в том числе существование их "нормальных" факторизаций и правила "подкручивания" коэффициентов над группой Вейля W. В разделе 7 отмечены связи этого подхода с методом комплексных показателей, предложенным в [4], с работой [3] и т.д. Отмечены также возможности обобщений на алгебры картановского типа в смысле [5], в том числе на алгебры Дринфельда–Джимбо $U_q(\mathfrak{g})$.

В статью не вошли приложения изложенных результатов к теории гиперсимметрий экстремальных уравнений. Основная информация этого рода содержится в [2], где рассматриваются общие вопросы структурной теории и ряд приложений, в том числе к некоторым задачам математической физики (см. также [6, 7]). Среди дальнейших достижений этой теории хотелось бы отметить работу Молева [8], где получено решение старой задачи о построении специальных базисов конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей (аналоги базисов Гельфанда–Цетлина) для симплектических алгебр Ли. Интересны также связи экстремальных методов с конструкцией R-матриц над дуальными парами алгебр Хопфа [9].

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Всюду в этой статье $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(a)$ – симметризуемая алгебра Каца–Муди [10], определяемая обобщенной матрицей Картана $a = (a_{ij})$, с элементами

$$a_{ij} = \langle h_i, \alpha_j \rangle = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}, \tag{1.1}$$

где $i, j \in I$, I – конечное множество индексов, $h_i \in \mathfrak{h}$, $\alpha_j \in \mathfrak{h}^*$, $\mathfrak{h}$ – картановская подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, $(\cdot, \cdot)$ – каноническая билинейная форма в $\mathfrak{g}^*$.

Напомним, что $\mathfrak{g}$ есть алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$, порожденная элементами $h \in \mathfrak{h}$ и образующими Шевалле e_i, f_i $(i \in I)$. Структурные соотношения алгебры $\mathfrak{g}$, определяемые матрицей (1.1), сводятся к условию коммутативности подалгебры $\mathfrak{h}$, к весовым соотношениям, к соотношениям Серра для элементов e_i, f_i и к следующему тождеству:

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, \tag{1.2}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Использование тождества (1.2) приводит к "треугольному разложению" $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ (прямая сумма векторных пространств), где $\mathfrak{n}_+$ (соответственно $\mathfrak{n}_-$) – подалгебра Ли, порожденная элементами e_i (соответственно f_i). Более того, $\mathfrak{g}$ есть сумма весовых компонент $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h},\ \mathfrak{g}_\alpha\ (\alpha \in \Delta)$, где Δ – система корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$. Подалгебра $\mathfrak{n}_\pm$ есть сумма компонент $\mathfrak{g}_\alpha$ при $\alpha \in \Delta_\pm$, где Δ_+ (соответственно Δ_-) – подсистема положительных (соответственно отрицательных) корней.

Алгебра $\mathfrak{g}$ обладает инволютивным антиавтоморфизмом $x \mapsto x^*$ (инволюция Шевалле), определяемым на образующих по правилу $e_i^* = f_i,\ f_i^* = e_i,\ h^* = h\ (i \in I,\ h \in \mathfrak{h})$.

1.2. Пусть $G = U(\mathfrak{g})$ – универсальная обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{g}$. Напомним, что $\mathfrak{g}$ канонически вкладывается в G (как подалгебра Ли). Треугольное разложение алгебры $\mathfrak{g}$ влечет следующее разложение алгебры G (также называемое треугольным):

$$G = N_- \otimes H \otimes N_+, \tag{1.3}$$

где $H = U(\mathfrak{h}),\ N_\pm = U(\mathfrak{n}_\pm)$. Сомножители этого разложения допускают произвольную перестановку. В частности, G есть свободный левый (правый) H-модуль с базисом вида $B_- \times B_+$, где $B_\pm$ – фиксированный базис векторного пространства $N_\pm$. Например, элементы $g \in G$ допускают однозначную запись следующего вида:

$$g = \Sigma_{i,j} b_i^- b_j^+ g_{ij}, \tag{1.4}$$

где $b_i^\pm$ – элементы базиса $B_\pm$ с коэффициентами $g_{ij} \in H$. Здесь i, j пробегают счетное множество индексов (например, $\mathbb{Z}_+$).

Пусть $Q = \Sigma_i \mathbb{Z}\alpha_i$ – корневая решетка алгебры $\mathfrak{g}$. Алгебра G допускает весовую градуировку $G_\mu\ (\mu \in Q)$, определяемую на образующих по правилу $\deg e_i = -\deg f_i = \alpha_i$, $\deg h = 0\ (h \in \mathfrak{h})$. Алгебра G допускает также $\mathbb{Z}$-градуировку $G^n\ (n \in \mathbb{Z})$, определяемую на образующих по правилу $\deg e_i = -\deg f_i = 1,\ \deg h = 0\ (h \in \mathfrak{h})$. Заметим, что Q-градуировка тоньше $\mathbb{Z}$-градуировки. А именно $G_\mu \subset G^n$ при $\operatorname{ht}\mu = n$, где $\operatorname{ht}\mu$ – высота элемента $\mu = \Sigma_i n_i \alpha_i \in Q$, определяемая по правилу $\operatorname{ht}\mu = \Sigma_i n_i$. Заметим также, что в подалгебрах $N_\pm$ индуцированная $\mathbb{Z}$-градуировка определяется ассоциативными степенями $e^n, f^n\ (n \in \mathbb{Z}_+)$, где e (соответственно f) – линейная оболочка элементов e_i (соответственно f_i). Отсюда

$$G = \bigoplus_{m,n} f^m e^n H. \tag{1.5}$$

1.3. Условимся использовать символ $\operatorname{wht} x$ (вес элемента x) вместо Q-$\deg x$. Иначе говоря, соотношение $\operatorname{wht} x = \mu$ означает $x \in G_\mu$. Заметим, что это соотношение равносильно следующему весовому правилу:

$$hx = xh_\mu, \qquad h \in H, \tag{1.6}$$

где $h \mapsto h_\mu$ – автоморфизм алгебры H, определяемый на образующих по правилу $h_\mu = h + \mu(h)\ (h \in H)$. Условимся отождествлять элементы $h \in H$ с полиномами над $\mathfrak{h}^*$ (так

что образующие $h \in \mathfrak{h}$ суть линейные формы над $\mathfrak{h}^*$). В этих терминах автоморфизм $h \mapsto h_\mu$ принимает следующий вид:

$$h_\mu(\lambda) = h(\lambda + \mu), \tag{1.7}$$

для всех $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$.

Условимся считать, что $B_\pm$ – весовой базис в $N_\pm$. Весовые соотношения (1.6) позволяют в этом случае производить перестановку коэффициентов с базисными элементами в (1.4). Условимся, что в (1.4) $i, j \in \mathbb{Z}_+$ и $b_0^\pm = 1$. Соответствующий коэффициент g_{00} называется *свободным членом* элемента (1.4).

1.4. Определение. Положим $J_+ = G\mathfrak{n}_+$ (так что J_+ – левый идеал алгебры G). Соответствующий левый G-модуль

$$M(\mathfrak{g}) = G/J_+ \tag{1.8}$$

называется *универсальным модулем Верма* над алгеброй G [1, 2].

Заметим, что $M(\mathfrak{g})$ есть циклический G-модуль с единственной образующей $1_+ = 1 + J_+$ (1 – единица алгебры G). Очевидно, что $\mathfrak{n}_+ 1_+ = 0$ (1_+ – экстремальный вектор модуля $M(\mathfrak{g})$). Из равенства $G = N_- H \oplus J_+$ вытекает следующий изоморфизм векторных пространств:

$$M(\mathfrak{g}) = N_- H \cdot 1_+ \simeq N_- H = \bigoplus_m f^m H, \tag{1.9}$$

где $N_- H$ отождествляется с $N_- H \cdot 1_+$. Разложение (1.9) определяет $\mathbb{Z}$-градуировку модуля $M(\mathfrak{g})$ ($\deg x = -m$ при $x \in f^m H$). Соотношение (1.9) определяет также весовую градуировку модуля $M(\mathfrak{g})$:

$$M(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\varepsilon \in Q_+} M_{-\varepsilon}(\mathfrak{g}), \tag{1.10}$$

где $Q_+ = \Sigma_i \mathbb{Z}_+ \alpha_i$, $M_{-\varepsilon}(\mathfrak{g}) = (N_-)_{-\varepsilon} H$.

Заметим, что $\mathfrak{h}$ нормализует $\mathfrak{n}_+$. Поэтому модуль $M(\mathfrak{g})$ наследует структуру правого H-модуля G. Таким образом, $M(\mathfrak{g})$ наделяется структурой $G \times H$-бимодуля.

1.5. Согласно (1.3) имеем $G = H \oplus N$, где символ $\oplus$ означает прямую сумму векторных пространств, и $N = \mathfrak{n}_- G + G\mathfrak{n}_+$. Пусть π – проекция G на H в этом разложении. Билинейная H-значная форма

$$\varphi(x, y) = \pi(x' y), \tag{1.11}$$

где $x, y \in G$, называется *формой Шаповалова* в алгебре G [11, 12].

Очевидно, что эта форма симметрична и H-билинейна относительно структуры правого H-модуля G. Ясно также, что форма (1.11) вырождена на идеале J_+. Поэтому можно рассматривать (1.11) как симметрическую билинейную форму на правом H-модуле $M(\mathfrak{g})$. Нетрудно видеть, что Q-градуировка (аналогично $\mathbb{Z}$-градуировка) модуля $M(\mathfrak{g})$ ортогональна относительно этой формы. Поэтому форма (1.11) однозначно определяется своими конечномерными компонентами φ_ε ($\varepsilon \in Q_+$), где φ_ε – сужение формы φ на $(N_-)_{-\varepsilon}$.

Детерминанты $\det \varphi_\varepsilon$, вычисленные в [11] (см. также [12] при $\dim \mathfrak{g} < \infty$), отличны от нуля (как элементы алгебры H). Отсюда следует, что форма Шаповалова (1.11) невырождена в пространстве $M(\mathfrak{g})$.

1.6. Пусть $J(\lambda)$ – левый идеал алгебры G, порожденный элементами $\mathfrak{n}_+$ и элементами $h-\lambda(h)$ $(h\in\mathfrak{h})$, где $\lambda\in\mathfrak{h}^*$. Фактор-модуль $M(\lambda)=G/J(\lambda)$ называется *модулем Верма* над алгеброй G со старшим весом λ [13]. Очевидно, что универсальный модуль Верма накрывает семейство $M(\lambda)$ $(\lambda\in\mathfrak{h}^*)$.

Заметим также, что $M(\mathfrak{g})\simeq G\otimes_{N_+}\mathbb{C}$, $M(\lambda)\simeq G\otimes_{N_+H}\mathbb{C}_\lambda$, где $\mathbb{C}_+$ (соответственно $\mathbb{C}_\lambda$) – одномерный N_+-модуль (соответственно N_+H-модуль), определяемый по правилу $\mathfrak{n}_+\mathbb{C}_+=0$ (соответственно $n_+\mathbb{C}_\lambda=(h-\lambda(h))\mathbb{C}_\lambda=0$ для всех $h\in\mathfrak{h}$).

1.7. Пусть $H'=\operatorname{Fract}H$ – поле частных коммутативной алгебры H, так что H' отождествляется с полем рациональных функций над $\mathfrak{h}^*$ (см. (1.3)). Для каждого правого H-модуля V соответствующий правый H'-модуль $V'=V\otimes_H H'$ называется *рациональной оболочкой модуля* V [2].

Если V есть свободный правый H-модуль, то операция $V\mapsto V'$ сводится к расширению $(H\uparrow H')$ области определения коэффициентов для каждого базиса H-модуля V. В этом смысле определяются следующие рациональные оболочки:

$$G'=G\otimes_H H',\qquad M'(\mathfrak{g})=M(\mathfrak{g})\otimes_H H'. \tag{1.12}$$

Использование весовых соотношений (1.6) для элементов $h\in H'$ позволяет наделить G' структурой алгебры над полем $\mathbb{C}$ (расширение алгебры $G\simeq G\otimes 1$). Аналогично $M'(\mathfrak{g})\simeq G'/J'_+$, где $J'_+=G'\mathfrak{n}_+$, наделяется структурой $G'\otimes H'$-бимодуля.

Заметим, что $M'(\mathfrak{g})$ обладает $\mathbb{Z}$-градуировкой f^mH' $(m\in\mathbb{Z}_+)$ и Q-градуировкой $M'_{-\varepsilon}(\mathfrak{g})=(N_-)_{-\varepsilon}H'$, определяемыми по аналогии с (1.9), (1.10).

2. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

2.1. Разложение (1.5) позволяет естественно определять различные расширения (пополнения) векторного пространства G. Например, пространство

$$\{G\}=\bigwedge_{m,n}\bigoplus f^me^nH, \tag{2.1}$$

определяемое как формальная сумма (прямое произведение) компонент (2.1), можно отождествить с множеством формальных рядов вида (1.4). Его подпространство

$$|G\rangle=\bigwedge_{n}\bigoplus N_-He^n=\bigwedge_{n}\bigoplus_{m}\bigoplus f^me^nH \tag{2.2}$$

состоит из рядов (1.4), содержащих лишь конечное число компонент $g_{mn}\in f^me^nH$ для каждого фиксированного $n\in\mathbb{Z}_+$. Подпространство (2.2) естественно отождествляется (см., например, [14]) с проективным пределом фактор-модулей $\Pi_n=G/J_n$, где $J_n=Ge^{n+1}$ – убывающее семейство левых идеалов алгебры G. Мы будем рассматривать также следующую цепочку подпространств:

$$G\subset(G)\subset[G]\subset|G\rangle\subset\{G\}, \tag{2.3}$$

где $[G]$ (соответственно (G)) – подпространство $\mathbb{Z}$-градуированных (соответственно Q-градуированных) рядов (1.4).

Поясним, что фактор-модуль Π_N отождествляется с суммой компонент (2.2) при $0 \leqslant n \leqslant N$. Элементы $g \in G$ суть формальные ряды следующего вида:

$$g = \lim_n g_n = \sum_{n=0}^{\infty} \delta g_n, \tag{2.4}$$

с компонентами $\delta g_n \in N_- H e^n$ и частичными суммами $g_n = \delta g_0 + \cdots + \delta g_n$, возрастающими в том смысле, что $g_n = \pi_{nm} g_m$ при $n \leqslant m$, где π_{nm} – каноническая проекция Π_m на Π_n, определенная при $n \leqslant m$. Соответственно $g - g_n \in J_n^\star$, где $J_n^\star = |G\rangle e^n$ – расширение идеала J_n' ($n \in \mathbb{Z}_+$).

Подпространство $[G]$ (соответственно (G)) есть сумма однородных компонент $[G]^n$ (соответственно $(G)_\mu$). Принадлежность $g \in [G]^n$ (соответственно $g \in (G)_\mu$) означает, что все компоненты ряда (2.4) содержатся в G^n (соответственно в G_μ).

Иначе говоря, пространство $[G]$ есть множество рядов (2.4) с компонентами (2.2), удовлетворяющими условию $|m - n| \leqslant \mathrm{const}$, с константой, зависящей от ряда (2.4). Аналогично в терминах Q-градуировки можно определить пространство (G).

2.2. Предложение [14]. *Векторное пространство $|G\rangle$ есть алгебра относительно умножения формальных рядов* (2.4) (*или* (1.4)). *Подпространство $[G]$ (соответственно (G)) есть $\mathbb{Z}$-градуированная (соответственно Q-градуированная) алгебра с однородными компонентами $[G]^n$ (соответственно $(G)_\mu$).*

Действительно, умножение рядов $f, g \in |G\rangle$ сводится к рассмотрению следующих произведений:

$$f^k e^l f^m e^n, \tag{2.5}$$

где степени k, m принимают лишь конечное число значений для каждой фиксированной пары l, n. Преобразуя произведение $e^l f^m$ в сумму компонент $f^t e^s$ с коэффициентами из H, где $s - t = l - m$, заметим, что соответствующие слагаемые в (2.5) могут внести ненулевой вклад в компоненту $f^p e^q$ только при $k + t = p$ и $n + s = q$. Отсюда $n \leqslant q$ и также $l = s - t + m \leqslant s + m \leqslant q + m$. Поэтому лишь конечное число произведений (2.5) вносит ненулевой вклад в $f^p e^q$ ($p, q \in \mathbb{Z}_+$), т.е. ряд fg корректно определен. Ясно также, что $fg \in |G\rangle$.

Остается заметить, что стандартное правило градуировки весов, примененное к однородным компонентам f, g, определяет структуру градуированных алгебр $(G) \subset [G]$ как подалгебр алгебры $|G\rangle$.

2.3. Конструкция проективного предела (2.2) позволяет рассматривать каждый элемент $g \in |G\rangle$ как оператор модуля $M(\mathfrak{g})$. Действительно, из равенства $J_n^* f^m H = 0$ при $n \geqslant m$ вытекает корректность определения $gx = g_n x$ для элементов $x \in f^m H$ при $n \geqslant m$. Ясно также, что $M(\mathfrak{g})$ есть левый $|G\rangle$-модуль, действие которого перестановочно с правым действием алгебры H, т.е. содержится в алгебре $|E\rangle = \mathrm{End}_H\, M(\mathfrak{g})$.

Пусть $[E]$ (соответственно (E)) – наибольшая $\mathbb{Z}$-градуированная (Q-градуированная) подалгебра в $|E\rangle$ с однородными компонентами $[E]^n$ (соответственно $(E)_\mu$). Принадлежность $a \in [E]^n$ (соответственно $a \in (E)_\mu$) означает, что $aM^{-m}(\mathfrak{g}) \subset M^{-m+n}(\mathfrak{g})$ (соответственно $aM_{-\epsilon}(\mathfrak{g}) \subset M_{-\epsilon+\mu}(\mathfrak{g})$), где $M^{-m}(\mathfrak{g}) = f^m H$. Очевидно, что действие алгебры $|G\rangle$ в $M(\mathfrak{g})$ определяет гомоморфизм градуированных алгебр $[G] \mapsto [E]$, $(G) \mapsto (E)$.

Наконец, во всех изложенных выше построениях можно заменить алгебры $G, (G), \ldots$ их рациональными оболочками $G', (G)' = (G')$ и т.д. Аналогично для алгебр эндоморфизмов мы будем использовать обозначения $(E)' = (E')$ и т.д. В частности, $|E'\rangle = \mathrm{End}_{H'} M'(\mathfrak{g})$.

2.4. Теорема. *Действие алгебры $|G'\rangle$ в $M'(\mathfrak{g})$ определяет изоморфизм алгебр $|G'\rangle \simeq |E'\rangle$ и изоморфизмы градуированных алгебр $[G'] \simeq [E']$, $(G') \simeq (E')$.*

Доказательство. Проверим сюръективность отображения $|G'\rangle \mapsto |E'\rangle$. Фиксируем $a \in |E'\rangle$ и покажем, что существует формальный ряд $g \in |G'\rangle$, удовлетворяющий тождеству $(a-g)M'(\mathfrak{g}) = 0$. Для этого рассмотрим фильтрацию $F_n = F_{n-1} \oplus f^n H'$ в $M'(\mathfrak{g})$ и построим частичные суммы g_n таким образом, чтобы равенство $(a-g_n)F_n = 0$ выполнялось для всех $n \in \mathbb{Z}_+$.

Предположим, что частичная сумма g_{n-1} уже построена, так что $(a-g_{n-1})F_{n-1} = 0$. Заметим, что $\delta g_n F_{n-1} = 0$ для каждого ряда (2.4), поскольку $e^n F_{n-1} = 0$. Поэтому искомое равенство $(a-g_n)F_n = 0$ равносильно следующему:

$$\delta g_n = a - g_{n-1} \quad \text{на компоненте} \quad f^n H'. \tag{2.6}$$

Фиксируем базис ξ_k $(|\deg \xi_k| = n)$ пространства f^n и представим элементы $\delta g_n \in N_- H e^n$ в виде $\sum b_i^- g_{ij} \xi_j^*$ $(g_{ij} \in H')$. Заметим, что $\xi_j^* \xi_k = \omega_{jk}$ в пространстве $M'(\mathfrak{g})$, где $\omega_{jk} = \pi(\xi_j^* \xi_k)$ – матрица формы Шаповалова, суженной на f^n. Используя это равенство, находим

$$\delta g_n \xi_k = \sum_i b_i^- g_{ij} \omega_{jk}. \tag{2.7}$$

Запишем также действие оператора $\tilde{a} = a - g_{n-1}$ в матричной форме

$$\tilde{a}\xi_k = \sum_i b_i^- a_{ik} \tag{2.8}$$

с коэффициентами $a_{ik} \in H'$. Операторы (2.7) и (1.8) совпадают, если система уравнений

$$\sum_j g_{ij} \omega_{jk} = a_{ik} \tag{2.9}$$

имеет решение(относительно g_{ij}). Разрешимость системы (2.9) вытекает из невырожденности формы Шаповалова в f^n. Таким образом, (2.6) определяет рекуррентное правило построения искомого ряда $g \in |G'\rangle$.

Остается заметить, что решение каждой системы (2.9) единственно, откуда следует инъективность отображения $|G'\rangle \mapsto |E'\rangle$. Таким образом, $|G'\rangle \simeq |E'\rangle$. Ясно также, что рекуррентное правило (2.6) сохраняет степени $\mathbb{Z}$- или Q-однородности. Отсюда получаем изоморфизмы градуированных алгебр $[G'] \simeq [E']$, $(G') \simeq (E')$.

2.5. Следствие. *Подпространство $M(\mathfrak{g})$ (соответственно $M'(\mathfrak{g})$) есть точный $|G\rangle$-модуль (соответственно $|G'\rangle$-модуль). Иначе говоря, равенство $gM(\mathfrak{g}) = 0$ (соответственно $gM'(\mathfrak{g}) = 0$) влечет за собой $g = 0$.*

Действительно, равенство $gM(\mathfrak{g}) = 0$ для элементов $g \in |G\rangle$ равносильно $gM'(\mathfrak{g}) = 0$. Поэтому искомое утверждение сводится к инъективности действия $|G'\rangle$ в $M'(\mathfrak{g})$, что доказано в п. 2.4.

2.6. Инволюция Шевалле $x \mapsto x^*$ (см. п. 1.1) однозначно продолжается с алгебры $\mathfrak{g}$ на ассоциативные алгебры $G \subset (G) \subset [G]$ и их рациональные оболочки $G' \subset (G') \subset [G']$. В частности, $G^*_\mu = G_{-\mu}$ и т.д.

Мы будем использовать специальное обозначение $F(\mathfrak{g}) = (G')$ для алгебры, первоначально определенной в [1]. Алгебра $F(\mathfrak{g})$ обладает Q-градуировкой

$$F(\mathfrak{g}) = \bigoplus_\mu F_\mu(\mathfrak{g}), \tag{2.10}$$

где $F_\mu(\mathfrak{g}) = (G')_\mu$. В частности, $F_0(\mathfrak{g})$ есть подалгебра с инволюцией, и каждая компонента $F_\mu(\mathfrak{g})$ есть $F_0(\mathfrak{g})$-бимодуль.

2.7. Замечание. Теорема 2.4, по существу, доказана в [15] (см. также [2]), где основное внимание уделялось алгебре $F(\mathfrak{g})$. $\mathbb{Z}$-градуированные аналоги алгебры $F(\mathfrak{g})$ (т.е. алгебры $[G], [G']$) рассматривались в [5] в более общем контексте контрагредиентных алгебр картановского типа. Аналог алгебры $F(\mathfrak{g})$ был также независимо определен в [16].

Известно, что векторные пространства $\{G\}$, $\{G'\}$ не обладают структурой алгебры относительно умножения формальных рядов (1.4). Соответствующие контрпримеры для алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}l_2$ приведены в [2, 5].

3. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПРОЕКТОРЫ

3.1. Определение. Для каждого $\mathfrak{g}$-модуля V подпространство $V^e = \ker e$ (пересечение ядер $\ker e_i$) называется *экстремальным* (или вакуумным) пространством модуля V. Модуль V называется *примитивным*, если

$$V = \ker e \oplus \operatorname{im} f, \tag{3.1}$$

где $\operatorname{im} f = fV$ (сумма образов $\operatorname{im} f_i$).

Например, в конечномерном случае ($\dim g < \infty$) все конечномерные модули примитивны. Модуль Верма $M(\lambda)$ примитивен лишь тогда, когда он прост (в противном случае $\ker e \cap \operatorname{im} f \neq 0$).

3.2. Теорема [1, 15]. *Существует единственный элемент $p \in |G'\rangle$, удовлетворяющий системе уравнений*

$$ep = pf = 0, \qquad p_{00} = 1, \tag{3.2}$$

где p_{00} – свободный член ряда p (п. 1.3). Более того, $p^2 = p = p^*$, $p \in F_0(\mathfrak{g})$. Оператор p проецирует каждый $F(\mathfrak{g})$-модуль V на $\ker e$ параллельно $\operatorname{im} f$ (так что модуль V примитивен).

Действительно, образ p при изоморфизме $|G'\rangle \simeq |E'\rangle$ однозначно определяется как оператор проецирования p_0 на $M'_0(\mathfrak{g}) = H'$ параллельно сумме компонент $M'_{-\epsilon}(\mathfrak{g})$ при $\epsilon \neq 0$. Дальнейшие детали доказательства можно найти в [2], где вместо алгебры $|G'\rangle$ рассматривается $F(\mathfrak{g})$.

Элемент $p \in F_0(\mathfrak{g})$, определяемый уравнениями (3.2), называется *экстремальным проектором* алгебры $\mathfrak{g}$ или алгебры $U(\mathfrak{g})$.

Доказательство этой теоремы можно видоизменить таким образом, чтобы вычислить явный вид элемента $p \in F_0(\mathfrak{g})$ (см. п. 3.3–3.6).

3.3. Лемма. *Каждый центральный элемент $z \in |G\rangle$ удовлетворяет характеристическому уравнению*

$$\prod_{\epsilon \in Q_+} (z - z_\epsilon) = 0, \tag{3.3}$$

где $z_0 = \pi(z)$ (п. 1.5), $z_\epsilon = (z_0)_\epsilon$ (п. 1.3) и левая часть понимается как $\lim_n g_n$, где g_n – произведение элементов (3.3) *при $\operatorname{ht}\varepsilon \leqslant n$.*

Действительно, $z1_+ = z_0 1_+$. Отсюда, используя центральность элемента z и весовое правило (1.6) для элементов $x \in M'_{-\epsilon}(\mathfrak{g})$, находим

$$zx = xz1_+ = xz_0 = z_\epsilon x, \tag{3.4}$$

т.е. $(z - z_\epsilon)M'_{-\epsilon}(\mathfrak{g}) = 0$ для всех $\epsilon \in Q_+$. Поэтому $g_n F_n = 0$ (в обозначениях п. 2.4), откуда следует (3.3) для оператора z в модуле $M'(\mathfrak{g})$.

Нетрудно видеть, что условие $g_n F_n = 0$ равносильно $g_n \in J_n^*$ (для всех $n \in \mathbb{Z}_+$), откуда также следует (3.3) для элемента $z \in |G\rangle$. См. также [14], где включение $g_n \in J_n^*$ проверяется непосредственно.

3.4. Определение. Пусть z – центральный элемент Казимира в алгебре $F(\mathfrak{g})$ (первоначально определенный в [10] как оператор в "ограниченных" $\mathfrak{g}$-модулях). Согласно [10] $z = z_0 + z_+$, где

$$z_0(\lambda) = (\lambda, \lambda + 2\rho), \quad z_+ \in \bigoplus_{n \neq 0}^{\wedge} f^n e^n. \tag{3.5}$$

Здесь $\rho \in \mathfrak{h}^*$ определяется по правилу $\rho(h_i) = 1$ для всех $i \in I$. Если $\dim \mathfrak{g} < \infty$, то $z \in G$, ρ – полусумма положительных корней алгебры $\mathfrak{g}$. Заметим также, что $a_\epsilon = z_\epsilon - z_0$ есть аффинная функция над $\mathfrak{h}^*$:

$$a_\epsilon(\lambda) = 2(\lambda + \rho, \epsilon) + (\epsilon, \epsilon). \tag{3.6}$$

3.5. Теорема [17]. *Экстремальный проектор $p \in F_0(\mathfrak{g})$ имеет вид*

$$p = \prod_{\varepsilon \neq 0} (1 - a_\varepsilon^{-1} z_+), \tag{3.7}$$

где z – элемент Казимира алгебры $\mathfrak{g}$ и левая часть (3.7) *понимается как $\lim_n p_n$, где p_n – произведение элементов* (3.7) *при $\operatorname{ht}\varepsilon \leqslant n$.*

Доказательство можно получить непосредственно из леммы 3.3. А именно оператор $p_0 \in |E'\rangle$ (п. 3.2) совпадает на компонентах F_n (см. п. 2.4) с интерполяционным полиномом Лагранжа, принимающим значение 1 при $\varepsilon = 0$ и значение 0 при $\varepsilon \neq 0$. Иначе говоря, p_0 есть произведение сомножителей

$$(z_0 - z_\varepsilon)^{-1}(z - z_\varepsilon) = 1 - a_\varepsilon^{-1} z_+, \tag{3.8}$$

откуда следует (3.7). Детали доказательства, относящиеся к оценкам $p - p_n \in J_n^*$, можно найти в [14, 18].

3.6. Пример. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ – простая алгебра Ли с базисом e, f, h и соотношениями коммутации $[e,f] = h,\ [h,e] = 2e,\ [h,f] = -2f$. Элемент (3.7) имеет вид

$$p = \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{fe}{n(h+n+1)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} f^n e^n \varphi_n, \tag{3.9}$$

где

$$\varphi_n = \prod_{j=1}^{n} (h+j+1)^{-1}. \tag{3.10}$$

В этом случае легко проверить непосредственно, что частичные произведения совпадают с частичными суммами в (3.9).

3.7. Замечание. Элементы $g \in F(\mathfrak{g})$ можно рассматривать как локально-рациональные вектор-функции над $\mathfrak{h}^*$ (со значениями в $N_- \times N_+$). А именно значение элемента (1.4) в точке $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ определяется по правилу

$$g(\lambda) = \sum_{i,j} b_i^- b_j^+ g_{ij}(\lambda) \tag{3.11}$$

(напомним, что $g_{ij} \in H'$ – рациональные функции над $\mathfrak{h}^*$). Естественно рассматривать также более общие базисы в $N_- \times N_+$. В этом смысле можно говорить об особенностях вектор-функций (3.11).

Например, из теоремы 3.5 следует, что особенности экстремального проектора $p \in F_0(\mathfrak{g})$ сосредоточены в пересечении гиперплоскостей $a_\epsilon(\lambda) = 0\ \ (\epsilon \in Q_+)$.

Значительно более тонкий результат получен в [17], где показано, что существенные особенности элемента p сосредоточены в гиперплоскостях $a_\epsilon(\lambda) = 0$, где $\epsilon = n\alpha$ – квазикорень $(0 \neq n \in \mathbb{Z}_+,\ \alpha \in \Delta_+)$.

3.8. Определение. Модуль V над алгеброй G (или G') называется *локально-нильпотентным относительно* e, если $e^n x = 0\ \ (n \geqslant n_0(x))$, для каждого $x \in V$. Категория таких модулей обозначается $LN(e)$.

Категория $LN(e)$ замкнута относительно стандартных модульных операций (суммы, произведения, переход к подмодулям и фактор-модулям). Если $V \neq 0$ есть модуль категории $LN(e)$, то $V^e \neq 0$.

Очевидно, что каждый модуль V категории $LN(e)$ наделяется (естественным образом) структурой $|G\rangle$-модуля (или $|G'\rangle$-модуля). А именно равенство $gx = g_n x\ \ (n \geqslant n_0(x))$ корректно определяет элементы $g \in |G\rangle$ (или $g \in |G'\rangle$) как операторы модуля V.

3.9. Предложение. *Категория $LN(e)$ над алгеброй G' полупроста с единственным простым объектом $M'(\mathfrak{g})$. Иначе говоря, каждый модуль V категории $LN(e)$ кратен модулю $M'(\mathfrak{g})$.*

Несложное доказательство этого утверждения можно найти в [5, 14]. Ситуация сходна с известной теоремой единственности в квантовой механике (где роль модуля $M'(\mathfrak{g})$ играет модуль Фока).

Категория $LN(e)$ над алгеброй G устроена значительно более сложно. Обычно рассматривается подкатегория $\mathcal{O}(e) \subset LN(e)$, состоящая из H-градуированных модулей категории $LN(e)$.

Используя экстремальный проектор $p \in F_0(\mathfrak{g})$, нетрудно получить критерии полупростоты в категории $LN(e)$. Например, этот метод позволяет получить простое доказательство теоремы Вейля о полупростоте конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей (случай $\dim \mathfrak{g} < \infty$) [5, 14].

3.10. Замечание. Проектор (3.7) – не единственный объект, который можно построить на основе характеристического уравнения (3.3). Например, для каждого $\mu \in Q_+$ элемент

$$p_\mu = \prod_{\epsilon \neq \mu} (z_\mu - z_\epsilon)^{-1}(z - z_\epsilon) \tag{3.12}$$

корректно определен в $F(\mathfrak{g})$ и проецирует модуль $M'(\mathfrak{g})$ на его весовую компоненту $M'_{-\mu}(\mathfrak{g})$. Нетрудно проверить, что элементы (3.12) образуют счетное разложение единицы в алгебре $F(\mathfrak{g})$.

4. АСТ-ФАКТОРИЗАЦИЯ

4.1. Рассмотрим более детально классический случай $\dim \mathfrak{g} < \infty$. В этом случае корневые подпространства $\mathfrak{g}_\alpha$ одномерны: $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}e_\alpha$, где e_α $(\alpha \in \Delta)$ – корневые векторы алгебры $\mathfrak{g}$.

Напомним, что $h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}]$ есть элемент картановской подалгебры $\mathfrak{h}$. Корневые векторы e_α нормируются условием $\alpha(h_\alpha) = 2$ для всех $\alpha \in \Delta$. Положим

$$\lambda_\alpha = \langle h_\alpha, \lambda \rangle = \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \tag{4.1}$$

для всех $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ и всех $\alpha \in \Delta$. Условимся считать, что $e_i = e_{\alpha_i}$ $(i \in I)$, и положим $h_i = h_{\alpha_i}$, $\lambda_i = \lambda_{\alpha_i}$ (числа λ_i называются обычно *числовыми отметками* вектора λ).

Пусть $\rho \in \mathfrak{h}^*$ – полусумма положительных корней алгебры $\mathfrak{g}$, $\rho_i = 1$ для всех $i \in I$.

4.2. Напомним определение группы Вейля W, ассоциированной с парой $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Группа W порождается системой образующих r_i $(i \in I)$, где $r_i \in \operatorname{End} \mathfrak{h}^*$ – отражение по направлению корня α_i:

$$r_i \lambda = \lambda - \lambda_i \alpha_i. \tag{4.2}$$

Группа W сохраняет корневую систему Δ (откуда следует, что W – конечная группа) и каноническую билинейную форму в $\mathfrak{h}^*$: $(w\lambda, w\mu) = (\lambda, \mu)$ для всех $w \in W$ и всех $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$.

Разложение $w = r_{i_1} \dots r_{i_n}$ в группе W называется *приведенным*, если оно имеет минимально возможную длину $n = l(w)$. Положим

$$\Delta_w = \{\alpha \in \Delta_+ \,:\, w^{-1}\alpha < 0\}. \tag{4.3}$$

Как известно (см., например, [2]), $l(w) = \operatorname{card} \Delta_w$. В частности, $l(1) = 0$, $l(r_i) = 1$ для всех $i \in I$ (1 – единица группы W).

Существует единственный элемент $s_0 \in W$ максимально возможной длины $m = \operatorname{card} \Delta_+$ (а именно $\Delta_{s_0} = \Delta_+$). Напомним также, что группа W содержит каждое отражение r_α по направлению корня $\alpha \in \Delta$.

Другое определение группы Вейля дано ниже в п. 5.1. Известно также абстрактное определение группы Вейля в терминах образующих и соотношений между ними (см., например, [10]).

4.3. Порядок $\Delta_+ = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ называется *нормальным* [19], если для каждого разложения $\gamma_j = \gamma_i + \gamma_k$ суммарный корень γ_j расположен между своими составляющими γ_i, γ_k (т.е. $i < j < k$ либо $k < j < i$).

Нетрудно убедиться, что нормальные порядки существуют. Как показано в [20] (см. также [2]), существует биекция между множеством $NO(\Delta_+)$ всех нормальных порядков в системе Δ_+ и множеством приведенных разложений $s_0 = r_{i_1} \dots r_{i_m}$ (см. п. 4.2). А именно с каждым таким разложением связан нормальный порядок

$$\gamma_n = w_{n-1}\alpha_{i_n}, \tag{4.4}$$

где $w_n = r_{i_1} \dots r_{i_n}$ (так что $w_0 = 1$), и все нормальные порядки в Δ_+ исчерпываются цепочками (4.4). Более того, для каждого $w = w_n$ корни γ_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ определяют индуцированный нормальный порядок в Δ_w.

Соотношение (4.4) позволяет дать геометрическую интерпретацию нормальных порядков $\tau \in NO(\Delta_+)$ в терминах камер Вейля в $\mathfrak{h}^*$. А именно имеет место равенство

$$s_0 = r_{\gamma_m} \dots r_{\gamma_1}, \tag{4.5}$$

откуда следует, что порядок τ определяет "оптимальный путь" от доминантной камеры Вейля C_+ к антидоминантной камере $C_- = -C_+$ с пересечением ровно m стенок промежуточных камер Вейля [2].

4.4. Определение. Рассмотрим (по аналогии с п. 3.6) следующее семейство элементов алгебры $F(\mathfrak{g})$:

$$p_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} f_\alpha^n e_\alpha^n \varphi_{\alpha,n}(t), \tag{4.6}$$

где $\alpha \in \Delta_+$, $t \in \mathbb{C}$, $f_\alpha = e_{-\alpha}$ и коэффициенты $\varphi_{\alpha,n}(t) \in H'$ определяются следующим образом:

$$\varphi_{\alpha,n}(t) = \prod_{j=1}^{n} (h + j + t)^{-1}. \tag{4.7}$$

Заметим, что $p_\alpha(t) \in F(\mathfrak{g}_\alpha) \subset F(\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}_\alpha \simeq \mathfrak{s}l_2$ – простая алгебра Ли с образующими $e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha$. Заметим также, что $e_\alpha^* = \lambda_\alpha f_\alpha$ для всех $\alpha \in \Delta$, где $\lambda_\alpha \lambda_{-\alpha} = 1$. Отсюда $p_\alpha(t)^* = p_\alpha(t)$ для всех α, t. Согласно п. 3.6 элемент $p_\alpha = p_\alpha(1)$ есть экстремальный проектор алгебры $F(\mathfrak{g}_\alpha)$.

Положим $p_\alpha(\lambda) = p_\alpha(\lambda_\alpha)$ для всех $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Для каждого нормального порядка $\tau \in NO(\Delta_+)$, определенного равенством (4.4), положим

$$p^\tau = p_{\gamma_1} \dots p_{\gamma_m}, \tag{4.8}$$

где $p_\alpha = p_\alpha(\rho)$.

4.5. Теорема [1, 15]. *Элемент* (4.8) *не зависит от выбора нормального порядка* $\tau \in NO(\Delta_+)$ *и совпадает с экстремальным проектором* $p \in F(\mathfrak{g})$.

Таким образом, экстремальный проектор $p \in F(\mathfrak{g})$ допускает семейство факторизаций (4.8), связанных с нормальными порядками $\tau \in NO(\Delta_+)$.

4.6. Пример. Если $\mathfrak{g}$ – алгебра ранга 2 (т.е. алгебра одного из типов $A_1 \times A_1$, A_2, B_2, G_2), то система Δ_+ имеет ровно 2 нормальных порядка, определяемых с точностью до инверсии. В этом случае равенство $p = p^*$ равносильно независимости элемента (4.8) от порядка $\tau \in NO(\Delta_+)$.

Например, для алгебры типа A_2 с простыми корнями α и β соотношение $p = p^*$ сводится к равенству $p_\alpha\, p_{\alpha+\beta}\, p_\beta = p_\beta\, p_{\alpha+\beta}\, p_\alpha$. Остальные алгебры ранга 2 рассматриваются аналогично (см., например, [2]).

4.7. Замечание. Факторизационная теорема 4.5 имеет довольно длинную историю. Существование факторизации (4.8) было обнаружено в [21], где рассматривались операторы в конечномерных $\mathfrak{g}$-модулях и конкретные порядки в Δ_+ (определяемые от случая к случаю для каждой простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$). Определение нормального порядка, предложенное в [19], было использовано в [22] для доказательства нестрогой версии теоремы 4.5 без явного описания объемлющей алгебры $F(\mathfrak{g})$. Следует отметить, что коэффициенты (4.7) определяются в [21, 22] в виде отношений гамма-функций, что существенно для погашения особенностей этих коэффициентов в конечномерных $\mathfrak{g}$-модулях. Связь нормальных порядков с группой Вейля отмечена в [20]. Строгая формулировка теоремы 4.5 получена в [1], детальное доказательство изложено в [15] (см. также [2]).

Учитывая значение пионерских работ [21, 22], мы называем разложение (4.8) АСТ-*факторизацией* экстремального проектора $p \in F(\mathfrak{g})$. Другое доказательство теоремы 4.5 будет изложено ниже в п. 6.11.

4.8. Заметим, что $e_\alpha x \equiv (\mathrm{ad}\ e_\alpha)x \bmod J_+$ для элементов $\alpha \in \Delta_+$, $x \in G$. В этом смысле элементы (4.6) сводятся к операторам

$$p_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \varphi_{\alpha,n}(t) f_\alpha^n (\mathrm{ad}\ e_\alpha)^n x, \tag{4.9}$$

где $\mathrm{ad}\ e_\alpha = (\mathrm{ad}\ e_\alpha) \otimes 1$ в пространстве $M'(\mathfrak{g})$. Более того, операторы (4.9) поднимаются на пространство $G' = G \otimes_H H' \simeq H' \otimes_H G$.

Напомним, что последний изоморфизм определяется при помощи весовых соотношений (1.6). Например, для однородных элементов $x \in G_\mu$ имеем

$$p(hx) = p(xh_\mu) \equiv (px)h_\mu = h(px) \tag{4.10}$$

для всех $h \in H$, где $\equiv$ означает сравнение $\bmod J'_+$. В этом смысле оператор $p = p^\tau$ есть эндоморфизм левого (правого) H'-модуля $M'(\mathfrak{g})$.

5. W-РЕЗОЛЬВЕНТЫ

5.1. Как известно, группа W действует проективными автоморфизмами алгебры G (см., например, [10]). А именно каждому отражению r_i ($i \in I$) можно поставить в соответствие автоморфизм

$$r_i = e^{\tilde{f}_i} e^{-\tilde{e}_i} e^{\tilde{f}_i}, \tag{5.1}$$

где $\tilde{x} = \operatorname{ad} x$ (в пространстве $\mathfrak{g}$). Тогда имеем $W = \widetilde{W}/A$, где $\widetilde{W} \subset \operatorname{Aut}\,\mathfrak{g}$ – подгруппа, порожденная операторами (5.1), A – абелева подгруппа, порожденная операторами r_i^2 ($i \in I$).

Таким образом, группа $\widetilde{W}$ накрывает группу W. Легко проверить, что $w\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$, $w\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{w\,\alpha}$ для элементов $w \in \widetilde{W}$, причем действие $\widetilde{W}$ в подалгебре $\mathfrak{h}$ тривиально на подгруппе A и сопряжено исходному действию W в $\mathfrak{h}^*$:

$$\langle wh, w\lambda\rangle = \langle h, \lambda\rangle, \tag{5.2}$$

для всех $w \in W$, $h \in \mathfrak{h}$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Используя стандартное вложение $\operatorname{Aut}\,\mathfrak{g} \subset \operatorname{Aut}\,G$, мы можем рассматривать $\widetilde{W}$ как группу автоморфизмов алгебр G, G' и их проективных пределов, определенных в разделе 2.

Заметим, что $we_\alpha = \lambda_\alpha e_{w\alpha}$ для всех $w \in W$, $\alpha \in \Delta$, где $\lambda_\alpha\lambda_{-\alpha} = 1$. Отсюда следует, что операторы (4.6) связаны соотношениями $wp_\alpha(t) = p_{w\,\alpha}(t)$, где $\alpha \in \Delta_+$, $w\alpha \in \Delta_+$.

5.2. Определение. Положим $M = M'(\mathfrak{g})$. Заметим, что действие $J'_+ \mapsto r_\alpha J'_+$ зависит только от класса элемента r_α в группе W, поэтому действие $J'_+ \mapsto wJ'_+$ корректно определено для всех $w \in W$. Положим $M_w = G'/wJ'_+$.

Рассмотрим следующее семейство операторов $q_\alpha : G \mapsto G'$, где $\alpha \in \Delta_+$:

$$q_\alpha x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} [(\operatorname{ad}\, e_\alpha)^n x] f_\alpha^n \psi_{\alpha,n}, \tag{5.3}$$

с коэффициентами

$$\psi_{\alpha,n} = \prod_{j=1}^{n} (h_\alpha - j + 1)^{-1}. \tag{5.4}$$

Легко проверить [20] (см. также [2]), что $q_\alpha(r_\alpha J_+) = J_+$, поэтому q_α можно рассматривать как оператор $G/r_\alpha J_+ \mapsto M$. Соотношение линейности (4.10) заменяется следующим правилом “подкручивания”:

$$q_\alpha(x\varphi) = (q_\alpha x)\varphi_\alpha, \tag{5.5}$$

для всех $\varphi \in H$, где $\varphi_\alpha(\lambda) = \varphi(\lambda + \alpha)$. Применяя правило (5.5) к элементам $\varphi \in H'$, получаем корректное продолжение q_α до оператора $M_\alpha \mapsto M$, где $M_\alpha = G'/r_\alpha J'_+$. В этом смысле оператор q_α может быть записан следующим образом:

$$q_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \bar{f}_\alpha^n (\operatorname{ad}\, e_\alpha)^n \otimes \psi_{\alpha,n} r_\alpha^*, \tag{5.6}$$

где $\bar{a}x = xa$ – оператор правого умножения и $r_\alpha^*\varphi = \varphi_\alpha$ в обозначениях (5.5). Легко проверить, что оператор q_α удовлетворяет уравнениям

$$e_\alpha q_\alpha = q_\alpha e_\alpha = 0, \tag{5.7}$$

где e_α – оператор левого умножения в M_α или M.

Таким образом, операторы (5.6) могут быть использованы (наряду с (4.9)) для решения экстремальных уравнений в модуле M.

5.3. Применяя автоморфизм w к оператору $q_\alpha : M_\alpha \mapsto M$ при условии $\gamma = w\alpha \in \Delta_+$, получаем $q_\gamma : M_{wr_\alpha} \mapsto M_w$ с сохранением соотношений (5.5), (5.7) для оператора q_γ.

Применяя это правило к нормальному порядку (4.4), получаем следующее семейство операторов, определенных при $\alpha \leqslant \beta$ (относительно порядка τ):

$$q_{\alpha\beta} = q_{\gamma_a} \dots q_{\gamma_b}, \tag{5.8}$$

где $\alpha = \gamma_a$, $\beta = \gamma_b$ $(a \leqslant b)$. Здесь $q_{\gamma_j} : M_{w_j} \mapsto M_{w_{j-1}}$ $(a \leqslant j \leqslant b)$, так что $q_{\alpha\beta} : M_{w_b} \mapsto M_{w_{a-1}}$. В частности, для каждого $w = w_n \in W$ произведение

$$q_w = q_{\gamma_1} \dots q_{\gamma_n} \tag{5.9}$$

корректно определено как оператор $M_w \mapsto M$. Оператор q_w удовлетворяет следующему правилу "подкручивания":

$$q_w(xh) = (q_w x)h_w, \tag{5.10}$$

для всех $h \in H'$, где $h \mapsto h_w$ – автоморфизм поля H', определяемый по правилу $h_w(\lambda) = h(\lambda + \rho - w\rho)$, для всех $w \in W$. Оператор q_w удовлетворяет соотношениям

$$e_\alpha q_w = q_w e_\alpha = 0 \ \text{ при } \ \alpha \in \Delta_w, \ \ e_\beta q_w = q_w e_\beta, \tag{5.11}$$

где $\beta = \gamma_{n+1}$ в обозначениях (4.4).

5.4. Теорема [20]. *Оператор* (5.9) *не зависит от выбора нормального порядка* $\tau \in NO(\Delta_+)$ *и удовлетворяет следующим соотношениям*:

$$\ker q_w = N_w, \tag{5.12$'$}$$

$$\operatorname{im} q_w = T_w, \tag{5.12$''$}$$

где N_w *– сумма подпространств* $e_\alpha M_w$ $(\alpha \in \Delta_w)$, T_w *– подпространство всех решений системы уравнений* $e_\alpha x = 0$ $(\alpha \in \Delta_w)$ *в пространстве* M.

Таким образом, оператор q_w определяет общее решение системы уравнений $E_w : e_\alpha x = 0$ $(\alpha \in \Delta_w)$. В частности, оператор $q = q_{s_0}$ определяет общее решение системы уравнений $E_+ : e_\alpha x = 0$ $(\alpha \in \Delta_+)$.

Следуя [20], мы называем q_w (соответственно q) *правой резольвентой* системы E_w (соответственно E_+).

5.5. Следствие [20]. *Оператор q_w определяет "подкрученный" (по правилу* (5.10)) *изоморфизм правых H'-модулей $L_w \simeq T_w$, где L_w – H'-оболочка одночленов $f_{\gamma_m}^{k_m} \dots f_{\gamma_{n+1}}^{k_{n+1}}$ (содержащих f_α при $\alpha \notin \Delta_w$).*

Действительно, это следует из теоремы 5.4 и легко проверяемого равенства

$$w\Delta_+ = -\Delta_w \cup \Delta'_w, \tag{5.13}$$

где $\Delta'_w = \Delta_+ \setminus \Delta_w$, откуда $M_w = N_w \oplus L_w$.

5.6. Разложение $w = uv$ в группе W называется *приведенным*, если $l(w) = l(u) + l(v)$. Заметим, что в этом случае

$$\Delta_w = \Delta_u \cup \big(u\Delta_w\big), \tag{5.14}$$

откуда вытекает следующее правило кощикла для операторов q_w:

$$q_w = q_u(uq_v). \tag{5.15}$$

В частности, для каждого $w \in W$ имеет место приведенное разложение $s_0 = ww'$. Отсюда $q = q_w q'_w$, где

$$q'_w = wq_{w'} = q_{\gamma_{n+1}} \dots q_{\gamma_m} \tag{5.16}$$

в обозначениях (4.4). Заметим, что $q'_w : \overline{M} \mapsto M_w$, где $\overline{M} = M_{s_0}$.

Применяя автоморфизм w к соотношениям (5.5) для оператора $q_{w'}$, получаем аналогичные соотношения для оператора q'_w. В частности, имеем

$$e_\alpha q'_w = q'_w e_\alpha = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \in \Delta'_w. \tag{5.17}$$

5.7. Замечание. Резольвенты q_w исследовались в [20] (см. также [2]) в более общей ситуации, для модулей, ассоциированных с редуктивными вложениями $\mathfrak{g} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$, где $\tilde{\mathfrak{g}}$ – конечномерная алгебра Ли. В этом случае $T = T_{s_0}$ есть трансляторная алгебра (или алгебра Микельсона) для системы E_+, ассоциированной с подалгеброй $\mathfrak{g}$. Содержание данного раздела сводится к частному случаю результатов [20] при $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}$.

6. ПРАВИЛА РЕДУКЦИИ

6.1. В этом разделе устанавливается связь между левыми резольвентами p_α, p и правыми резольвентами q_α, q в модуле M. Основное правило редукции сформулировано в предложении 6.6. Использование этого правила выявляет общую связь между отрезками $p_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$ операторов p, q (теорема 6.8). Отсюда, в частности, вытекает доказательство теоремы 4.5 об экстремальных проекторах $p \in F(\mathfrak{g})$ (п. 6.11).

Предположим вначале, что V есть $\mathfrak{g}_\alpha$-бимодуль, локально-конечный относительно $\operatorname{ad}\mathfrak{g}_\alpha$, т.е. представимый в виде суммы простых конечномерных $\operatorname{ad}\mathfrak{g}_\alpha$-модулей. В этом случае операторы p_α, q_α определены в рациональной оболочке V' бимодуля V.

6.2. Предложение (первое правило редукции). *Пусть x – весовой элемент, принадлежащий простой компоненте* $\operatorname{ad}\mathfrak{g}_\alpha$*-модуля* V. *Положим* $n = \max\{k : (\operatorname{ad} e_\alpha)^k x \neq 0\}$. *Тогда имеем*

$$\pi_{\alpha,n}(p_\alpha x) \equiv (q_\alpha x)\bar{\pi}_{\alpha,n}, \tag{6.1}$$

где $p_\alpha = p_\alpha(1)$, $\equiv$ *означает сравнение* $\bmod Ve_\alpha$, $\pi_{\alpha,n}$ (*соответственно* $\bar{\pi}_{\alpha,n}$) – *произведение элементов* $h_\alpha + j + 1$ (*соответственно* $h_\alpha - j + 1$) *по* $j = 1, \dots, n$.

Действительно, используя теорию представлений алгебры $\mathfrak{g}_\alpha \simeq \mathfrak{sl}(2)$, легко проверить, что правая часть (6.1) имеет вид $y = x\lambda + z$, где $\lambda \in H$, $z \in \mathfrak{f}_\alpha V$. А именно для каждого слагаемого в (5.3) имеем

$$[(\operatorname{ad} e_\alpha)^k] f_\alpha^k \approx (-1)^k (\operatorname{ad} f_\alpha)^k (\operatorname{ad} e_\alpha)^k x = (-1)^k \lambda_k x, \tag{6.2}$$

где $\lambda_k \in \mathbb{Z}_+$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$, $\lambda_0 = 1$, $\approx$ означает сравнение $\bmod f_\alpha V$. Отсюда вытекает искомое представление с коэффициентом

$$\lambda = \left(\sum_{k=0}^{n} (k!)^{-1} \lambda_k \psi_{\alpha,k} \right) \bar{\pi}_{\alpha,n}, \tag{6.3}$$

так что λ – полином степени n от h_α со старшим коэффициентом 1. Напомним также, что y есть экстремальный вектор модуля V $(\bmod Ve_\alpha)$. Поэтому $y \equiv p_\alpha y \equiv p_\alpha(x\lambda) \equiv (p_\alpha x)\lambda$.

Вместо явного вычисления полинома λ достаточно заметить, что существуют бимодули V, для которых слагаемые (4.9) линейно независимы при $0 \leqslant k \leqslant n$. Отсюда ясно, что λ делится на $\mu = (\pi_{\alpha,n})_\varepsilon$, где ε – вес элемента x (относительно $\operatorname{ad}\mathfrak{h}_\alpha$). Из сравнения старших степеней полиномов λ и μ получаем $\lambda = \mu$.

Ясно также, что равенство (6.1) сохраняется для фактор-модулей модуля V и их рациональных оболочек при условии, что обе части (6.1) корректно определены.

В дальнейшем полагаем $V = G$. Условимся использовать обозначение $\operatorname{ad} e_\alpha = \operatorname{ad} e_\alpha \otimes 1$ для операторов, определенных в $G'/G'e_\alpha$ (с заменой e_α на f_α при $\alpha < 0$).

6.3. Лемма. *Предположим, что* $\alpha < \beta$ (*относительно* $\tau \in NO(\Delta_+)$). *Тогда имеем*

$$[f_\alpha, q_\beta] = \sum_{\gamma \neq \alpha,\beta} q_{\alpha\beta\gamma}, \tag{6.4}$$

где $q_{\alpha\beta\gamma} = q'_{\alpha\beta\gamma} \cdot \operatorname{ad} f_\gamma$ *при* $\gamma < \alpha$, $q_{\alpha\beta\gamma} = \bar{f}_\gamma \cdot q'_{\alpha\beta\gamma}$ *при* $\alpha < \gamma < \beta$, $q_{\alpha\beta\gamma} = q'_{\alpha\beta\gamma} \operatorname{ad} e_\gamma$ *при* $\beta < \gamma$ (*с операторными коэффициентами* $q'_{\alpha\beta\gamma}$).

Действительно, почленное применение $\operatorname{ad} f_\alpha$ к элементам ряда (5.6) (с заменой α на β) сводится к вычислению коммутаторов $[f_\alpha, z^n]$ при $z = \bar{f}_\beta$, $\operatorname{ad} e_\beta$. Например, при $z = \operatorname{ad} e_\beta$ имеем

$$[f_\alpha, z^n] = \lambda n z^{n-1} \operatorname{ad} e_\gamma + \mu n(n-1) z^{n-2} \operatorname{ad} e_{\gamma'} + \cdots, \tag{6.5}$$

где λ, μ – структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$, $\gamma = -\alpha + \beta$, $\gamma' = \gamma + \beta$ и т.д. Очевидно, что $-\gamma < \alpha$ либо $\beta < \gamma$ (относительно τ). Полагая в первом случае $\alpha' = -\gamma$, применяем

то же рассуждение к корню $\gamma' = -\alpha' + \beta$ и т.д. В результате получаем слагаемые (6.4) при $\gamma < \alpha$ либо $\beta < \gamma$. Аналогично при $z = \bar{f}_\gamma$ получаем слагаемые (6.4) при $\alpha < \gamma < \beta$.

Заметим также, что операторы $q_{\alpha\beta\gamma}$ при $\gamma < \alpha$ или $\beta < \gamma$ получаются из q_β формальным дифференцированием по параметру $z = \operatorname{ad} e_\beta$. Отсюда следует при $\beta = \gamma_k$, что эти операторы удовлетворяют соотношениям $q_{\alpha\beta\gamma}(wJ'_+) \in \overline{w}J'_+$ $(w = w_k,\ \overline{w} = w_{k-1})$, т.е. могут рассматриваться как операторы $q_{\alpha\beta\gamma}\colon M_w \mapsto M_{\overline{w}}$ [20].

6.4. Лемма. *Предположим, что $x_0 \in G'$ удовлетворяет соотношениям*

$$(\operatorname{ad} f_\gamma)x_0 \in s_0 J'_+$$

для всех $\gamma \in \Delta_+$. Тогда при $\alpha \leqslant \gamma_k$ (относительно τ) и $w = w_k$ имеем

$$(\operatorname{ad} f_\alpha)^t q'_w x_0 \in wJ'_+ \tag{6.6}$$

для всех $0 \neq t \in \mathbb{Z}_+$.

Предположим вначале, что $t = 1$, и пусть (6.6) уже доказано при $w = w_k$. Заменяя w на $\overline{w} = w_{k-1}$, заметим, что $q'_{\overline{w}} = q_\beta q'_w$, где $\beta = \gamma_k$. Отсюда

$$[f_\alpha, q'_{\overline{w}}x_0] = [f_\alpha, q_\beta]q'_w x_0 + q_\beta[f_\alpha, q'_w x_0]. \tag{6.7}$$

Напомним, что $q_\beta(wJ'_+) \in \overline{w}J'_+$, поэтому второе слагаемое в (6.7) содержится в $\overline{w}J'_+$. Аналогично, используя (6.4), находим (см. также замечание в конце п. 6.3), что слагаемые (6.7) с компонентами $q_{\alpha\beta\gamma}(\gamma < \alpha)$ содержатся в $\overline{w}J'_+$. Компоненты $q_{\alpha\beta\gamma}$ $(\alpha < \gamma < \beta)$ непосредственно вносят вклад в wJ'_+. Наконец, используя (5.11), находим, что компоненты $q_{\alpha\beta\gamma}$ $(\beta < \gamma)$ аннулируют $q'_w x_0$ в пространстве $M_{\overline{w}}$, т.е. также вносят вклад в $\overline{w}J'_+$.

Остается заметить, что повторное применение оператора $\operatorname{ad} f_\alpha$ сохраняет структуру компонент (6.4). Повторяя приведенные выше рассуждения, получаем (6.6) в общем случае $0 \neq t \in \mathbb{Z}_+$.

6.5. Лемма. *Положим $\alpha = \gamma_n$, $w = w_n$, и пусть $x \in wJ'_+$ – весовой элемент относительно h_α, принадлежащий простой компоненте $\operatorname{ad}\mathfrak{g}_\alpha$-модуля G'. Тогда имеем*

$$(\operatorname{ad} e_\alpha)^s x \in \overline{w}J'_+ \tag{6.8}$$

для всех $s \in \mathbb{Z}_+$, где $\overline{w} = w_{n-1}$ при $w = w_n$.

Действительно, $q_\alpha x = 0$ в $M_{\overline{w}}$, т.е. $q_\alpha x \in \overline{w}J'_+$. Заметим, что $e_\alpha \in \overline{w}J'_+$ и элементы $p_\alpha x, q_\alpha x$ коллинеарны $(\operatorname{mod} G'e_\alpha)$ над H' (см. п. 6.1). Поэтому $p_\alpha x \in \overline{w}J'_+$. Аналогично $p_\alpha e_\alpha^k x \in \overline{w}J'_+$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Используя (4.9), рекуррентно находим, что x есть линейная комбинация (над H') элементов $f_\alpha^k p_\alpha e_\alpha^k x \in \overline{w}J'_+$. В результате $x \in \overline{w}J'_+$. Остается заметить, что идеал $\overline{w}J'_+$ инвариантен относительно $\operatorname{ad} e_\alpha$, откуда следует (6.8).

6.6. Предложение (второе правило редукции). *Предположим, что* $x_0 \in G'_{-\mu}$ *удовлетворяет условиям леммы* 6.4. *Тогда элемент* $x = q'_w x_0$ *удовлетворяет соотношению* (6.1) *при* $\alpha = \gamma_k$, $n = \mu_\alpha$.

Действительно, пусть x_n – примитивная компонента элемента x со старшим весом $n \in \mathbb{Z}_+$ относительно $\operatorname{ad}\mathfrak{g}_\alpha$-модуля G'. Поскольку $x \in G'_{-\mu}$, компонента x_n может быть отличной от нуля только при $n \geqslant \mu_\alpha$. Пусть n – максимальный старший вес, для которого $x_n \neq 0$ в $M_{\overline{w}}$. Предположим, что $n \neq \mu_\alpha$. Тогда имеем

$$x_n = \lambda_n (\operatorname{ad} e_\alpha)^t \cdot (\operatorname{ad} f_\alpha)^t x, \tag{6.9}$$

где $\lambda_n \in \mathbb{Z}_+$, $t = n - \mu_\alpha$. Заметим, что $y = (\operatorname{ad} f_\alpha)^t x$ – младший вектор простого $\operatorname{ad}\mathfrak{g}_\alpha$-модуля V со старшим весом n. Применяя лемму 6.5 к элементу y, получаем $V \subset \overline{w} J'_+$. В частности, $x_n \in \overline{w} J'_+$. Полученное противоречие означает, что компонента x_n может быть отлична от нуля (в $M_{\overline{w}}$) только при $n = \mu_\alpha$. Более того, $p_\alpha x_n = q_\alpha x_n = 0$ при $n \neq \mu_\alpha$. В результате находим

$$p_\alpha x = p_\alpha x_{\mu_\alpha}, \qquad q_\alpha x = q_\alpha x_{\mu_\alpha}, \tag{6.10}$$

и правило редукции (6.1), примененное к x_{μ_α}, сводится к тому же правилу для элемента x.

Заметим, что $x_{\mu_\alpha} = 0$ при $\mu_\alpha < 0$. Соотношение (6.10) в этом случае означает, что $p_\alpha x = q_\alpha x = 0$.

6.7. Перейдем к рассмотрению отрезков $q_{\alpha\beta}$ ($\alpha \leqslant \beta$), определенных в п. 5.3, где $\alpha = \gamma_a$, $\beta = \gamma_b$ ($a \leqslant b$). Положим

$$p_{\alpha\beta} = \tilde{p}_{\gamma_a} \dots \tilde{p}_{\gamma_b}, \tag{6.11}$$

где $\tilde{p}_\gamma$ получается из p_γ по правилу "подкручивания" коэффициентов $h_\gamma \mapsto h_\gamma + (\rho - s\rho)_\gamma$ при $s = r_{i_a} \dots r_{i_{k-1}}$. Для каждого $x \in G'_{-\mu}$ положим

$$P_{\alpha\beta} x = \tilde{\pi}_{\alpha\beta}(p_{\alpha\beta} x), \qquad Q_{\alpha\beta} x = (q_{\alpha\beta} x)\bar{\pi}_{\alpha\beta}, \tag{6.12}$$

где $\tilde{\pi}_{\alpha\beta}$ (соответственно $\bar{\pi}_{\alpha\beta}$) – произведение сомножителей $\tilde{\pi}_{\gamma,\mu_\gamma}$ (соответственно $\bar{\pi}_{\gamma,\mu_\gamma}$) по $\gamma = \gamma_k$ ($a \leqslant k \leqslant b$) и $\tilde{\pi}_{\gamma,n}$ получается из $\pi_{\gamma,n}$ подстановкой $h_\gamma \mapsto h_\gamma + (\rho - s\rho)_\gamma$.

6.8. Теорема. *Предположим, что* $x_0 \in G'_{-\mu}$ *удовлетворяет соотношениям* $(\operatorname{ad} e_\gamma) x_0 \in s J'_+$ *для всех* $\gamma \in s\Delta_+$ *при* $s = w_b$. *Тогда имеем*

$$P_{\alpha\beta} x_0 = Q_{\alpha\beta} x_0 \tag{6.13}$$

при $\alpha \leqslant \beta$ (*относительно* τ). *В частности, пусть* $x_0 \in G'_{-\mu}$ *удовлетворяет условиям леммы* 6.4. *Тогда имеем*

$$P'_w x_0 = Q'_w x_0, \tag{6.14}$$

где P'_w (*соответственно* Q'_w) – *частный случай* $P_{\alpha\beta}$ (*соответственно* $Q_{\alpha\beta}$) *при* $w = w_n$, $\alpha = \gamma_{n+1}$, $\beta = \gamma_m$ (*см. п.* 5.3).

Достаточно заметить, что (6.13) получается из (6.14) применением автомофизма группы W. В то же время (6.14) получается последовательным применением второго правила редукции (предложение 6.6) к корням γ_k ($n+1 \leqslant k \leqslant m$). При этом правило "подкручивания" коэффициентов определяется операторами r^*_α, входящими в (5.6).

6.9. Следствие. *Пусть $x_0 \in G'_{-\mu}$ удовлетворяет условиям леммы* 6.4. *Тогда имеем*

$$\pi_\mu(p^\tau x_0) = (qx_0)\bar{\pi}_\mu, \tag{6.15}$$

где π_μ (соответственно $\bar{\pi}_\mu$) – произведение элементов $h_\alpha + \rho(h_\alpha) + j$ (соответственно $h_\alpha - j + 1$) по $\alpha \in \Delta_+$, $j = 1, \dots, \mu_\alpha$.

Действительно, положим в (6.14) $a = 1$, $b = m$ и заметим, что в этом случае $s = w_{n-1}$ в позиции $\gamma = \gamma_n = s\alpha$, где α – простой корень. Отсюда $(s\rho)_\gamma = \rho_\alpha = 1$ и правило "подкручивания" из п. 6.7 сводится к замене h_γ на $h_\gamma + \rho_\gamma - 1$, т.е. $p_{1m} = p^\tau$ в обозначениях (4.8). Таким образом, (6.15) есть частный случай (6.14) при $w = 1$.

6.10. Следствие. *Обе части* (6.15) *сводятся к $\pi_\mu(px_0)$, где p – экстремальный проектор алгебры $F(\mathfrak{g})$.*

Действительно, p сохраняет соотношение (6.15) и аннулирует $\operatorname{im} f$, откуда следует, что левая часть (6.10) сводится к $\pi_\mu(px_0)$.

6.11. Доказательство теоремы 4.5. Достаточно заметить, что элементы $x_0 \in N_- H' \simeq M$ удовлетворяют условиям леммы 6.4. Отсюда, используя следствие 6.10, находим $px_0 = p^\tau x_0$ для всех $x_0 \in M$, т.е. $p = p^\tau$ для всех $\tau \in NO(\Delta_+)$.

6.12. Замечание. Другое доказательство (6.15) можно вывести из [3] (случай $\dim \mathfrak{g} < \infty$) либо из [17] (общий случай). Используя (6.15) и единственность экстремального проектора $p \in F(\mathfrak{g})$, получаем также новое доказательство независимости оператора q от выбора нормального порядка $\tau \in NO(\Delta_+)$.

7. ДРУГИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

7.1. Предложение. *Пусть $x_0 \in G$ удовлетворяет уравнениям* $\operatorname{ad} e_\alpha x_0 = 0$, $\operatorname{ad} f_\alpha x_0 = nx_0$, *где $\alpha \in \Delta_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда имеем в обозначениях п.* 6.1

$$[\pi_{\alpha,n}\, p_\alpha r_\alpha x_0]_{t-1} = f_\alpha^{n-t} x_0 f_\alpha^t, \tag{7.1}$$

где $[x]_t$ – класс элемента x в $G/G(h_\alpha - t)$ и правая часть (7.1) *есть полином от комплексного параметра t, принимающий при $t \in \mathbb{Z}_+$ указанные значения в алгебре G.*

Достаточно рассматривать случай $x_0 \neq 0$. В этом случае x_0 есть старший вектор (веса n) $\operatorname{ad}\mathfrak{g}_\alpha$-модуля G. Заметим, что $\bar{f}_\alpha = f_\alpha - \operatorname{ad} f_\alpha$ и операторы в правой части взаимно перестановочны. Отсюда при $0 \leqslant n \leqslant t$ получаем

$$x_0 f_\alpha^t = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_t^k f_\alpha^{t-k} x_k, \tag{7.2}$$

где $x_k = (\operatorname{ad} f_\alpha)^k x_0$ – базисные векторы простого $\operatorname{ad}\mathfrak{g}_\alpha$-модуля $U(\mathfrak{g}_\alpha)x_0$. Из теории представлений алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ следует

$$x_{n-k} = \frac{(n-k)!}{n!k!} x_n = \frac{(n-k)!}{k!} (-1)^k r_\alpha x_0, \tag{7.3}$$

где $x_n = (-1)^n n! r_\alpha x_0$ – младший вектор модуля $U(\mathfrak{g})_\alpha x_0$. Заменяя в (7.2) k на $n-k$, получаем

$$x_0 f_\alpha^t = f_\alpha^{t-n}\left[\frac{t!}{(t-n)!}\right]\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\left[\frac{(t-n)!}{(t-n+k)!}\right] f_\alpha^k\,(\operatorname{ad} e_\alpha)^k(r_\alpha x_0) = \\ = f_\alpha^{t-n}[\pi_{\alpha,n} p_\alpha(r_\alpha x_0)]_{t-1},$$

что совпадает с (7.1) при умножении на f_α^{n-t}.

Полученное равенство (7.1) можно рассматривать как явное представление правой части (7.1) в виде полинома (степени n) от параметра t.

7.2. Введем обозначение $R_\alpha(t)x_0$ для правой части (7.1). Покажем, что преобразование (7.1) обладает единственным продолжением до оператора $R_\alpha(t) \in \operatorname{End} G$, сохраняющего примитивные компоненты $\operatorname{ad}\mathfrak{g}_\alpha$-модуля G и перестановочного с оператором $\operatorname{ad} f_\alpha$. А именно равенство

$$R_\alpha(t)x_k = (\operatorname{ad} f_\alpha)^k\,[R_\alpha(t)x_0] \tag{7.4}$$

определяет оператор $R_\alpha(t)$ на базисных элементах $\operatorname{ad}\mathfrak{g}_\alpha$-модуля $U(\mathfrak{g}_\alpha)x_0$ (п. 7.1). Оператор $R_\alpha(t)$ удовлетворяет следующему правилу "подкручивания":

$$R_\alpha(t)(x\varphi) = (R_\alpha(t)x)\varphi_{-t\alpha}, \tag{7.5}$$

для всех $\varphi \in H$. Соответственно (7.5) позволяет продолжить $R_\alpha(t)$ до оператора $R_\alpha(t) \in \operatorname{End} G'$. При этом $R_\alpha(t)x$ есть полином от t для всех $x \in G$. Соответственно $R_\alpha(t)x$ есть рациональная функция от t для элементов $x \in G'$.

Используя (6.1), запишем (7.1) следующим образом:

$$R_\alpha(t)x_0 = [\pi_{\alpha,n}\,(p_\alpha r_\alpha x_0)]_{t-1} = [(q_\alpha r_\alpha x_0)\bar{\pi}_{\alpha,n}]_{t-1}. \tag{7.6}$$

Положим также $R_i(\lambda) = R_{\alpha_i}(\lambda_i)$ для всех $i \in I,\ \lambda \in \mathfrak{h}^*$. Для каждой пары $\alpha \leqslant \beta$ (относительно τ) положим

$$R_{\alpha\beta}(\lambda) = R_{i_a}(\lambda^{(a)}) \ldots R_{i_b}(\lambda^{(b)}), \tag{7.7}$$

где $\lambda^{(k)} = r_{i_1} \ldots r_{i_{k-1}}\lambda\ \ (a \leqslant k \leqslant b)$ в обозначениях п. 6.7.

7.3. Теорема. *Пусть $x_0 \in G_{-\mu}$ удовлетворяет условиям теоремы* 6.8 *и пусть $x_0 = sy_0$, где $s = r_{i_a} \ldots r_{i_b}$. Тогда имеем*

$$P_{\alpha\beta}x_0 \equiv Q_{\alpha\beta}x_0 \equiv R_{\alpha\beta}(\lambda)y_0, \tag{7.8}$$

где $\equiv$ означает сравнение $\bmod J(\lambda-\rho)$.

Доказательство сводится к последовательному вычислению правой части (7.7), по аналогии с тождеством (6.14), с использованием правил редукции (7.6). Заметим, что известное тождество

$$[e_i, f_j^t] = t\delta_{ij} f_j^{t-1}(h_j - t + 1) \tag{7.9}$$

сохраняет силу для комплексных показателей, входящих в (7.1). Отсюда следует

$$R_\alpha(\lambda)(J_+) \subset J(\lambda-\rho) \tag{7.10}$$

для всех $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Используя (7.9), получаем аналог правила (6.10)

$$R_\alpha(\lambda)x = R_\alpha(\lambda)x_{\mu_\alpha}. \tag{7.11}$$

Дальнейшее доказательство аналогично изложенному в п. 6.8.

Ясно также, что аналоги (7.7) выполняются для всех отрезков $p_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$ $(\alpha \leqslant \beta)$. Более того, следствие 6.9 может быть выведено из правил редукции (7.6).

7.4. Пример. Пусть $\gamma = w\alpha_i \in \Delta_+$, где α_i – простой корень. Тогда для любого нормального порядка $\tau \in NO(\Delta_+)$ имеем при $\gamma = \gamma_k,\ i = i_k,\ n \in \mathbb{Z}_+$

$$P_w(f_\gamma^n) \equiv Q_w(f_\gamma^n) \equiv R_w(\lambda)f_i^n, \tag{7.12}$$

где символы $P_w, Q_w, R_w(\lambda)$ заменяют (соответственно) $P_{\alpha,\beta}, Q_{\alpha,\beta}, R_{\alpha,\beta}(\lambda)$ при $\alpha = \gamma_1$, $\beta = \gamma_k, w = w_k$.

Используя правило (7.9), легко проверить, что элемент (7.10) переводит циклический вектор $1_{\lambda-\rho} \in M(\lambda-\rho)$ в особый (экстремальный) вектор веса $\lambda - n\gamma - \rho$ при $\lambda_\gamma = n$. Иначе говоря, элемент (7.10) определяет вложение $M(\lambda - n\gamma - \rho) \mapsto M(\lambda-\rho)$.

7.5. Замечание. Описание особых векторов модулей Верма посредством резольвент P_w, Q_w получено в [1] (см. также [2]). Резольвенты $R_w(\lambda)$ введены с той же целью в [4] (для алгебр конечного или аффинного типов). Соотношение (7.12) отмечено (без детального доказательства) в [2].

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

8.1. Результаты этой статьи допускают естественную интерпретацию в терминах индуцированных G-модулей вида $V_F = \operatorname{Ind}_{N_+} F$, где F – H-градуированный N_+-модуль. Например, соотношение (6.15) позволяет описать все особые векторы модулей V_F, т.е. все вложения $M \mapsto V_F$ [1–3]. Отсюда также нетрудно вывести результаты работы [3].

Интересно отметить, что знаменатели π_μ, $\bar{\pi}_\mu$ вычисляются в [3] когомологическими методами без использования резольвент p, q. Интересно также, что структурная теория алгебр Микельсона сводится к теории модулей V_F, порожденных редуктивными парами $\mathfrak{g} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$ (см., например, [2]).

8.2. Конструкция W-резольвент переносится без особых сложностей на случай $\dim \mathfrak{g} = \infty$. Отсюда нетрудно вывести (по крайней мере, для аффинных алгебр Ли) аналоги теорем 4.5, 6.8 и 7.3. Аналог теоремы 4.5 для аффинных алгебр Ли анонсирован в [23]. Следует отметить, что формулировка этого результата, приведенная в [23] для "контрагредиентных (супер)алгебр Ли конечного роста", требует коррекции, связанной с условием невырожденности формы Шаповалова (в модуле M). Например, это условие выполняется для алгебр $\mathfrak{g}(a)$, но не выполняется для $\mathfrak{g}(a)/\mathbb{C}\varkappa$, где $\varkappa$ – канонический центральный элемент алгебры $\mathfrak{g}(a)$ [10]. Аффинные алгебры Ли предполагается рассмотреть в отдельной статье.

8.3. Конструкция проективных пределов, изложенная в разделе 2, переносится без существенных изменений на все невырожденные (ассоциативные) алгебры картановского типа [5] (см. также [2]). Конструкция W-резольвент автоматически переносится на квантовые оболочки алгебры $\mathfrak{g}$, т.е. на алгебры Дринфельда–Джимбо $U_q(\mathfrak{g})$. Аналогично рассматриваются супералгебры Ли с той разницей, что в этом случае вместо аппарата группы Вейля приходится непосредственно использовать комбинаторику, связанную с нормальными порядками в системе Δ_+. В частности, аналоги теорем 3.5, 4.5, 6.8 и 7.3 выполняются для (супер)алгебр $U_q(\mathfrak{g})$.

Благодарности. Работа поддержана грантами РФФИ № 98-01-00281 и Научной школы № 96-15-96249.

Список литературы

[1] *Д. П. Желобенко.* Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 4. С. 785–788.
[2] *Д. П. Желобенко.* Представления редуктивных алгебр Ли. М.: Наука, 1994.
[3] *M. Kashiwara.* Adv. Stud. Pure Math. Alg. Groups and Related Topics. 1985. V. 6. P. 67–81.
[4] *Ф. Г. Маликов, Б. Д. Фейгин, Д. Б. Фукс.* Функц. анализ и его прилож. 1986. Т. 2. С. 25–37.
[5] *D. P. Zhelobenko.* Adv. Math. Sci. 1996. V. 175. P. 207–226.
[6] *Д. П. Желобенко.* Трансляторные алгебры в теории представлений редуктивных алгебр Ли и динамические симметрии. Теоретико-групповые методы в физике. Т. 2. М.: Наука, 1986.
[7] *D. P. Zhelobenko, I. T. Todorov.* Invariance algebra of relativistic massless equations (preprint). Intern. report SISSA ICTP. Triest: ICTP, 1986.
[8] *A. Molev.* A basis for representations of symplectic Lie algebras. Preprint Austr. Nat. Univ. MRR-012-98, 1998.
[9] *Д. П. Желобенко.* ТМФ. 1999. Т. 118. № 2. С. 190–204.
[10] *В. Г. Кац.* Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.
[11] *V. G. Kač, D. A. Kazhdan.* Adv. in Math. 1979. V. 34. P. 97–108.
[12] *Н. Н. Шаповалов.* Функц. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. № 4. С. 65–70.
[13] *Ж. Диксмье.* Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир, 1997.
[14] *Д. П. Желобенко.* Вестн. РУДН. 1999. Т. 6. № 1. С. 82–94.
[15] *Д. П. Желобенко.* Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 4. С. 758–773.
[16] *V. G. Kač.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1984. V. 81. № 6. P. 645–647.
[17] *Д. П. Желобенко.* Функц. анализ и его прилож. 1993. V. 27. № 3. P. 5–14.
[18] *D. P. Zhelobenko.* Lobatchevski Journ. Math, Russian Acad. Sci. Electronic Journ. http://www.cn.ru/tat en/science/ljm.
[19] *А. Н. Лезнов, М. В. Савельев.* Функц. анализ и его прилож. 1974. Т. 8. № 4. С. 87–88.
[20] *Д. П. Желобенко.* Функц. анализ и его прилож. 1987. Т. 21. № 3. С. 11–21.
[21] *Р. С. Ашерова, Ю. Ф. Смирнов, В. Н. Толстой.* ТМФ. 1971. Т. 8. № 2. С. 255–271.
[22] *Р. С. Ашерова, Ю. Ф. Смирнов, В. Н. Толстой.* Мат. заметки. 1979. Т. 26. № 1. С. 15–26.
[23] *В. Н. Толстой.* УМН. 1989. Т. 44. № 1. С. 211–212.

Поступила в редакцию 10.VI.1999 г.