Доклады Академии наук СССР
1968. Том 182, № 5

УДК 519.217 *МАТЕМАТИКА*

М. И. ГОРДИН

О СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫМИ ЭНДОМОРФИЗМАМИ

(*Представлено академиком Ю. В. Линником 19 II 1968*)

1. А. Реньи ([1]) изучал преобразования отрезка $(0, 1)$, определенные формулой $\mathbf{T}x = \{\varphi(x)\}$, где $\{a\}$ означает дробную долю числа a, а $\varphi = f^{-1}$, причем функция f удовлетворяет одному из условий А, В и условию С. Эти условия таковы:

А. f определена и убывает на $[1, +\infty)$, $f(1) = 1$, f строго положительна, непрерывна и строго убывает на $[1, T)$ и $f = 0$ на $[T, +\infty)$, где T — либо натуральное число, либо $+\infty$ (в этом случае имеется в виду, что $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$). Кроме того, $|f(t_2) - f(t_1)| \leqslant |t_2 - t_1|$ и существует λ, $0 < \lambda < 1$, такое, что $|f(t_2) - f(t_1)| \leqslant \lambda |t_2 - t_1|$, если $1 + f(2) < t_1 < t_2$.

В. f определена и возрастает на $[0, +\infty)$, $f(0) = 0$, f непрерывна и строго возрастает на $[0, T]$ и $f = 1$ на $[T, +\infty)$, где T — либо натуральное число, либо $+\infty$ (в этом случае $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 1$). Кроме того, $f(t_2) - f(t_1) < t_2 - t_1$, если $0 \leqslant t_2 < t_1$.

С. $\operatorname{ess\,sup}\limits_{0<x<1} f'_{E_n}(x) \leqslant C \operatorname{ess\,inf} f'_{E_n}(x)$. Здесь $E_n = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, где ε_i — числа из области значений функции $[\varphi(x)]$, $0 < x < 1$ ($[a]$ — целая часть a), $f_{E_n}(x) = f(\varepsilon_1 + f(\varepsilon_2 + \ldots + f(\varepsilon_n + x)\ldots))$, а постоянная C не зависит ни от E_n, ни от n.

Из результатов Реньи следует, что если f удовлетворяет одному из условий А, В и условию С, то последовательность функций $a(\mathbf{T}^n x)$, $n \geqslant 0$, $a(x) = [\varphi(x)]$, порождает на $(0,1)$ всю борелевскую σ-алгебру, а для преобразования $\mathbf{T}$ на $(0, 1)$ есть инвариантная мера $\mathbf{P}$, имеющая относительно меры Лебега плотность $p(x)$, причем почти всюду на $(0, 1)$ $1/C \leqslant p(x) \leqslant C$.

В. А. Рохлин ([2]) доказал, что в этих условиях преобразование $\mathbf{T}$ пространства $X = (0, 1)$ с мерой $\mathbf{P}$ есть точный эндоморфизм, т. е. что $\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} M_k = N$. Здесь $M_0 = M$ — σ-алгебра лебеговских подмножеств $(0, 1)$; $M_k = \mathbf{T}^{-k}(M)$ — σ-алгебра множеств, отличающихся лишь на множество меры 0 от полного прообраза некоторого лебеговского множества относительно $\mathbf{T}^k$; N — σ-алгебра, содержащая лишь множества меры 0 или 1. Отсюда следует эргодичность $\mathbf{T}$, доказанная в ([1]).

Равенство

$$\int\limits_A V g(x)\, \mathbf{P}(dx) = \int\limits_{\mathbf{T}^{-1}(A)} g(x)\, \mathbf{P}(dx), \quad A \in M,$$

определяет линейных оператор V, действующий в каждом из пространств $L_p(\mathbf{P})$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ с нормой 1. Оператор V, который может быть определен для любого сохраняющего меру преобразования, обладает рядом интересных свойств. В частности, если $\mathbf{T}$ — точный эндоморфизм прост-

ранства X с мерой $\mathbf{P}$, то для $g \in L_p(\mathbf{P})$, $1 \leqslant p < \infty$,

$$V^n g \xrightarrow[L_p(P)]{} \int_X g(x)\,\mathbf{P}(dx).$$

Это соотношение в рассматриваемой нами ситуации может быть уточнено.

Сформулируем условия D и E:

D. Все функции f'_{E_n} имеют ограниченную вариацию и

$$\sum_{E_n} \operatorname{var}(f'_{E_n}) \leqslant K, \text{ где } K \text{ не зависит от } n.$$

E. $\operatorname{var}(f'_{E_n}) \leqslant K \int_0^1 |f'_{E_n}(x)|\,dx$, K не зависит от E_n и n.

Условие E сильнее условия D, поскольку $\sum_{E_n} \int_0^1 |f'_{E_n}(x)|\,dx = 1$.

В теоремах 1, 2, 3 (см. ниже) предполагается, что f удовлетворяет одному из условий A, B и условию C. Через $\alpha(n)$ обозначена функция вида $Ae^{-\lambda n}$, причем постоянные $A > 0$, $\lambda > 0$ зависят лишь от f.

Теорема 1. *Пусть g — функция ограниченной вариации. Если выполнено условие* D, *то*

$$\operatorname{ess\,sup}_{0<x<1} \left| V^n g(x) - \int_0^1 g(u)\,\mathbf{P}(du) \right| \leqslant \alpha(n) \operatorname{var}(g).$$

Положим теперь $X_k(x) = [\varphi(\mathbf{T}^k x)]$ и обозначим через M_a^b σ-алгебру, порожденную всеми функциями X_k, $0 \leqslant a \leqslant k \leqslant b \leqslant \infty$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* D. *Тогда*

$$|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leqslant \alpha(n)\mathbf{P}(B),$$

если $A \in M_0^k$, $B \in M_{k+n}^\infty$, $n \geqslant 1$.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* E. *Тогда*

$$|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leqslant \alpha(n)\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B),$$

если $A \in M_0^k$, $B \in M_{k+n}^\infty$, $n \geqslant 1$.

Замечание 1. Условие E выполнено, если, например, существует f'' и для некоторого $p > 1$

$$\sup_l \int_0^1 \left| \frac{f''(x+l)}{f'(x+l)} \right|^p dx < +\infty.$$

Числа l пробегают область значений функции $[\varphi(x)]$, $x \in (0, 1)$.

Замечание 2. Если $\theta > 1$, θ — нецелое, то $f(x) = x/\theta$ не удовлетворяет условию B. Однако, как показано в ([1]) и ([3]), последовательность X_k порождает борелевскую σ-алгебру, а преобразование $\mathbf{T}$ имеет инвариантную меру. Для случая $\theta > 2$ можно доказать аналоги теорем 1 и 2 с $\alpha(n) = A(2/\theta)^n$.

Замечание 3. Результаты теорем 1, 3 при $f(x) = 1/x$ дают известные в метрической теории цепных дробей оценки ([8]). При более жестких ограничениях на f оценка порядка $Ae^{-\lambda\sqrt{k}}$ была получена в ([4]).

2. Здесь будут использоваться вероятностные обозначения. Все математические ожидания берутся относительно инвариантной меры $\mathbf{P}$.

Пусть $g \in L_2(\mathbf{P})$, $\mathbf{E}g = 0$. Последовательность $g(\mathbf{T}^k x)$, $k \geqslant 0$, образует стационарный случайный процесс. Известен ряд результатов, дающих возможность применять к подобным процессам предельные теоремы

теории вероятностей, если только эти процессы в определенном смысле асимптотически независимы, как, например, процесс X_k в теореме 2 (относительно центральной предельной теоремы см., например, ([5]), гл. XVIII). Однако одним из условий применимости подобных теорем является соотношение

$$B_n(g) = \mathbf{E}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} g(\mathbf{T}^k x)\Big)^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

проверка которого не всегда проста.

Теорема 4. *Если f удовлетворяет условиям теоремы 1 и f' непрерывна, $g(x) = G([\varphi(x)])$, $\mathbf{E}g = 0$, $\mathbf{E}g^2 < \infty$, то*

$$B_n(g) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Теорема 5. *Если f удовлетворяет условиям теоремы 1, g — неограниченная функция, Vg имеет ограниченную вариацию, $\mathbf{E}g = 0$, $\mathbf{E}g^2 < \infty$, то*

$$B_n(g) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Пусть $q_n(x)$ — знаменатель n-й подходящей дроби разложения числа x в обыкновенную цепную дробь. С помощью теоремы 5 при $f(x) = 1/x$, $g(x) = \ln\frac{1}{x} - \int_0^1 \ln\frac{1}{x}\, p(x)\,dx$, где $p(x) = \frac{1}{(1+x)\ln 2}$, удается доказать, что

$$\int_0^1 \Big(\ln q_n(x) - \int_0^1 \ln q_n(u)\; p(u)\,du\Big)^2 p(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Опираясь на это соотношение, можно доказать центральную предельную теорему и закон повторного логарифма для $\ln q_n$ (см. ([7])).

Замечание 4. Результат теоремы 4 для $f(x) = 1/x$ и указанное выше соотношение для $\ln q_n$ без доказательства формулировал В. Дёблин ([6]).

В заключение автор выражает благодарность И. А. Ибрагимову за постановку задачи и внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
5 II 1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Renyi, Acta math. Acad. sci. Hung., 8, 477 (1957). [2] В. А. Рохлин, Изв. АН СССР, сер. матем., 25, 499 (1961). [3] А. О. Гельфонд, Изв. АН СССР, сер. матем., 23, 809 (1959). [4] Чан Винг Хьен, Вестн. Московск. унив., сер. 1, № 5, 28 (1963). [5] И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965. [6] W. Doeblin, Compositio Math., 3, 353 (1940). [7] И. А. Ибрагимов, Вестн. Ленингр. унив., сер. матем., мех. и астр., № 1, 13 (1961). [8] А. Я. Хинчин, Цепные дроби, 1949.