И. В. Чередник, Аналог формулы характеров для алгебр Гекке, *Функц. анализ и его прил.*, 1987, том 21, выпуск 2, 94–95

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 2, 94—95
УДК 519.46

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ХАРАКТЕРОВ ДЛЯ АЛГЕБР ГЕККЕ

И. В. Чередник

В заметке классическая формула характеров Фробениуса [1] для симметрической группы S_n обобщается на аффинные алгебры Гекке. В духе [2] сразу строятся реализующие эти формулы резольвенты. Конструкция стимулирована работой [3] и направляющими обсуждениями с А. В. Зелевинским, которому автор приносит глубокую благодарность. Автор признателен И. М. Гельфанду за внимание к работе.

1. Пусть C-алгебра H_n порождается элементами $T_1, \ldots, T_{n-1}$, для которых $[T_i, T_j] = 0$ при $i \neq j \pm 1$, $T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$, $(T_i - q)(T_i + 1) = 0$. Здесь и далее q — степень простого числа (как в [4; 5]) или q берется из некоторой выколотой окрестности 1 в $\mathbf{C}$ (как в [6]). Добавив перестановочные попарно $x_1, \ldots, x_n$ с соотношениями $[x_i, T_j] = 0$ для $i \neq j, j+1$, $x_i T_i - T_i x_{i+1} = (q-1) x_i = T_i x_i - x_{i+1} T_i$, получим аффинную алгебру Гекке $\mathscr{H}_n$. Для произвольного набора $u = (u_1, \ldots, u_n)$ продолжим левое действие H_n на себя до действия $\mathscr{H}_n$ на H_n, положив $x_k(1) = q^{u_k}$. Получившийся $\mathscr{H}_n$-модуль обозначим через I_u. Далее, $l(w)$ — длина приведенного разложения $w \in S_n$ по $s_i = (i, i+1)$, $w' \geqslant w \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} l(w') = l(w'w^{-1}) + l(w)$, $l(\mathrm{id}) = 0$, $l(w) \leqslant n(n-1)/2$. На функции $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ подстановки $w \in S_n$ действуют по формуле $({}^{w}f)(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = f(w^{-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))$, $\lambda_i \in \mathbf{C}$.

Для $a, b \in \mathbf{C}$ будем писать $a \succcurlyeq b \Leftrightarrow a \in b + \mathbf{Z}_+$, иначе $a \prec b$. С последовательностью пар $\mu = (\{l_i \succcurlyeq l_i'\})$, $1 \leqslant i \leqslant r$, свяжем набор $u^{\mu} = (u_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{r} (l_i - l_i')$ всех чисел $u(i, j)$ вида $l_i \succcurlyeq u(i, j) = l_i' + j \succcurlyeq l_i' + 1$, пронумерованных по правилу: $u_k = u(i_k, j_k)$, $k < m \Leftrightarrow i_k < i_m$ либо $j_k - j_m < 0 = i_k - i_m$. Обозначим через $w_{\mu} \in S_n$ подстановку индексов u_k, сохраняющую i_k и отвечающую преобразованию $l_i' + j \to l_i - j + 1$.

Лемма 1 [5]. 1) *Набор функций* $\varphi_{s_i} = 1 + (1 - q^{\lambda_2 - \lambda_1})(1 - q)^{-1} T_i$ *однозначно продолжается до набора* $\{\varphi_w(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),\ w \in S_n\}$ *соотношениями коцикленности* $\varphi_{xy} = y^{-1}\varphi_x \varphi_y$ *при* $xy \geqslant y$, $x, y \in S_n$. 2) *Подмодуль* $I_{\mu} = H_n \varphi_{w_{\mu}}(u^{\mu})$ *является* $\mathscr{H}_n$-*подмодулем* $I_{u^{\mu}}$ *и содержит для любого* $w \geqslant w_{\mu}$ *старший коэффициент* $\tilde{\varphi}_w(u^{\mu})$ *разложения по* $\lambda \to 0$ *функции* $\varphi_w(u^{\nu})$, $\nu = (\{l_i + i\lambda, l_i' + i\lambda\})$.

2. Допустим далее, что $l_j \prec l_i$, $l_j' \prec l_i'$ для всех $j < i$. С каждой подстановкой $\sigma \in S_r$ свяжем $\mu^{\sigma} = (\{l_i, l'_{\sigma(i)}\})$ и $\mathscr{H}_n$-модуль $I_{\sigma} = I_{\mu^{\sigma}}$. Если для некоторого i $l_i - l'_{\sigma(i)} \prec 0$, то $\mu^{\sigma} \overset{\text{def}}{=} \varnothing$, $I_{\sigma} \overset{\text{def}}{=} 0$. Положим $w_{\sigma} = w_{\mu^{\sigma}}$, $u^{\sigma} = u^{\mu^{\sigma}}$. Будем писать $\sigma \Rightarrow \tau$, если $l(\sigma) = l(\tau) + 1$ и τ получается выкидыванием некоторого σ_i из приведенного разложения σ по $\sigma_i = (i, i+1) \in S_r$.

Лемма 2. 1) *Если* $\sigma \Rightarrow \tau$, *то существует единственная подстановка* $S_n \ni w_{\sigma,\tau} \geqslant w_{\tau}$, *для которой* $w_{\sigma,\tau}(u^{\tau}) = w_{\sigma}(u^{\sigma})$. 2) *Условие* $\varphi_{w_{\sigma}}(u^{\sigma}) \to \tilde{\varphi}_{w_{\sigma,\tau}}(u^{\tau})$ *однозначно определяет вложение* $\mathscr{H}_n$-*модулей* $\rho_{\sigma,\tau}\colon I_{\sigma} \to I_{\tau}$; $\rho_{\sigma,\tau}(I_{\sigma}) \neq I_{\tau}$, *если* $I_{\tau} \neq 0$. 3) *Обратно, если* $l(\sigma) = l(\tau) + 1$ *и* $I_{\tau} \neq 0$, *то между* I_{σ} *и* I_{τ} *существует ненулевой* $\mathscr{H}_n$-*гомоморфизм* $\rho \Leftrightarrow \sigma \Rightarrow \tau$, $\rho = c\rho_{\sigma,\tau}$, $c \in \mathbf{C}^*$.

Будем называть набор $\sigma \Rightarrow \sigma' \Rightarrow \tau$, $\sigma \Rightarrow \tau' \Rightarrow \tau$, $\sigma' \neq \tau'$ квадратом. Любая тройка $\sigma' \Rightarrow \tau \Leftarrow \tau'$, $\sigma' \neq \tau'$ достраивается до квадрата.

Предложение 3. 1) *Для любого квадрата* $\rho_{\sigma',\tau}\rho_{\sigma,\sigma'}(I_{\sigma}) = \rho_{\tau',\tau}\rho_{\sigma,\tau'}(I_{\sigma})$.

2) *Образ* $\tilde{I}_{\sigma}$ *каждого* I_{σ} $(\sigma \in S_r)$ *в* I_{μ} *не зависит от выбора цепочки* $\sigma \Rightarrow \ldots \Rightarrow \sigma_0$ *и соответствующей последовательности вложений.*

Пусть $\sigma = \prod_{k=1}^{l} \sigma_{i_p} = \sigma_{i_l} \ldots \sigma_{i_1}$ — некоторое приведенное разложение, $\sigma^p = \prod_{k=1}^{p} \sigma_{i_k} \in S_r$. С каждым σ_{i_p} свяжем элемент $\check{\delta}_{i_p} \in S_n$, переставляющий поднаборы $(\tilde{l}'_{i+1}, \ldots, \tilde{l}_i' + 1)$ и $(\tilde{l}_{i+1}, \ldots, \tilde{l}'_{i+1} + 1)$ в $w_{\tau}(u^{\tau})$ для $\tau = \sigma^{p-1}$, $\tilde{\mu} = \mu^{\tau} = (\{\tilde{l}_i, \tilde{l}_i'\})$. Положим $\check{\delta} = \prod_{k=1}^{l} \check{\delta}_{i_k}$. Проверяется, что $\check{\delta}$ не зависит от выбора σ и $\tilde{\delta} \overset{\text{def}}{=} \check{\delta} w_{\mu} \geqslant w_{\mu}$.

Следствие 4. *Если положить* $\omega_\sigma = w_\sigma^{-1}\tilde\sigma$, *то* $\tilde\sigma \geqslant \omega_\sigma$, $\tilde I_\sigma = H_n \varphi_{\tilde\sigma}(u^\mu)$ *для любого* $\sigma \in S_r$. *Изоморфизм* I_σ *и* $\tilde I_\sigma$, *переводящий* $\varphi_{w_\sigma}(u^\sigma)$ *в* $\varphi_{\tilde\sigma}(u^\mu)$, *индуцируется умножением* H_n *справа на* $\varphi_{\omega_\sigma}(u^\mu)$. *Если* $I_\sigma \neq 0$, *то* $\tilde I_\sigma \subset \tilde I_\tau \Leftrightarrow \sigma \Rightarrow \ldots \Rightarrow \tau$ *для некоторой цепочки.*

Предложение 5 [2]. *На множестве пар* $\sigma \Rightarrow \tau$ *существует функция* $\varepsilon(\sigma, \tau) = \pm 1$, *для которой* $\varepsilon(\sigma', \tau)\varepsilon(\sigma, \sigma') = -\varepsilon(\tau', \tau)\,\varepsilon(\sigma, \tau')$ *на любом квадрате.*

Положим $V_p = \bigoplus_{l(\sigma)=p} \tilde I_\sigma$. Пусть $\nu_{\sigma,\tau}\colon V_p \to V_{p-1}$ — определенный для $\sigma \Rightarrow \tau$, $l(\sigma) = p$ гомоморфизм, индуцирующий естественное вложение $\tilde I_\sigma \subset \tilde I_\tau \subset I_\mu$ и переводящий в нуль каждое $\tilde I_{\sigma'} \subset V_p$ для $\sigma' \neq \sigma$. Положим $d_p = \sum_{\sigma\Rightarrow\tau} \varepsilon(\sigma, \tau)\nu_{\sigma,\tau}$, $l(\sigma) = p$. Обозначим через d_0 гомоморфизм $I_\mu = V_0$ на его единственный неприводимый фактор-модуль $V_{-1} \neq 0$ (см. [4]), обобщающий представление S_n, ассоциированное с отвечающей μ косой схемой Юнга [1; 6; 7]. Пусть $V_p = 0$ для $p > r(r-1)/2$, $p < -1$.

Теорема 6. *Последовательность* $\{V_p, d_p\}$ *точна.*

3. Замечания. 1) Приведем пример функции ε. Назовем приведенное разложение $\sigma \in S_r$ каноническим, если: а) для $1 \leqslant i < r$ после вычеркивания всех $\sigma_1, \ldots, \sigma_i$ разложение остается приведенным; б) для соседних $\sigma_i\sigma_j$ в разложении всегда $i > j$ при $j \neq i \pm 1$. На такие разложения внимание автора обратил А. Н. Кириллов. Положим $\varepsilon(\sigma, \tau) = (-1)^{k+\pi}$, где σ_{i_k} — транспозиция, выкидываемая из канонического разложения σ при переходе к τ (k — ее номер в разложении), π— число перестановок соседних пар $\sigma_i\sigma_j \to \sigma_j\sigma_i$ для $i \neq j \pm 1$ (замены $\sigma_i\sigma_{i\pm1}\sigma_i \to \sigma_{i\pm1}\sigma_i\sigma_{i\pm1}$ не считаются), использованных для преобразования получившегося приведенного разложения для τ к каноническому.

2) Для доказательства теоремы с использованием результатов [6; 7] о ветвлении специальных базисов в V_{-1} делается индукционное ограничение на $\mathcal{H}_{n-1} \subset \mathcal{H}_n$. При этом $\{V, d\}$ расщепляется в прямую сумму некоторых последовательностей $\{V^i, d^i\}$ для μ^i, в которых l_i заменены на $l_i - 1$. Для допустимой μ^i (удовлетворяющей тем же неравенствам, что и μ) после выкидывания всех $\tilde I_\sigma$, конструкция которых не совместима с переходом $l_i \to l_i - 1$, последовательность $\{V^t, d^i\}$ совпадает с последовательностью теоремы для $\mathcal{H}_{n-1}$ вместо $\mathcal{H}_n$ и μ^i вместо μ. Если μ^i не является допустимой, то оказывается, что точна последовательность $\{V^i, d^i, V_{-1}^i \overset{\text{def}}{=} 0\}$. При доказательстве этого факта проверяется, что для любого σ одно из вложений вида $\nu^i_{\sigma,\tau}$ или $\nu^i_{\tau,\sigma}$ является изоморфизмом для надлежащего τ.

3) Все конструкции заметки и теорема дословно переносятся на вырожденную алгебру $\mathcal{H}_n$ $(q \to 1)$ (см. [6; 7; 8]). Для последней T_i можно отождествить с s_i и $x_is_i - s_ix_{i+1} = 1 = s_ix_i - x_{i+1}s_i$. Соответственно требуется положить $x_k(1) = u_k$, $\varphi_{s_i} = 1 + (\lambda_2 - \lambda_1)s_i$. Как S_n-модуль I_μ тогда изоморфен представлению, индуцированному с единичного представления подгруппы $\prod_{i=1}^{r} S_{l_i - l'_i} \subset S_n$; V_{-1} для целых $\{l_i\}$ отвечает косой схеме Юнга [1], представляемой клетками с множеством центров $(i, j) \subset \mathbf{Z}^2$, $0 \leqslant i \leqslant r-1$, $l'_{r-i} + i < j \leqslant l_{r-i} + i$. Поэтому теорема действительно обобщает формулу характеров Фробениуса. После замены во всех конструкциях (u_k) на $(-u_k)$ получается аналогичная «антисимметричная» резольвента для $\mathcal{H}_n$-модуля, соответствующего схеме, получаемой из схемы μ отражением в диагонали $i = j$. Последнее верно и для $q \neq 1$. Формулировка и доказательство теоремы 6 переносятся на отвечающие μ представления квантовых R-алгебр серии A [7; 8] (см. [9]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *James G., Kerber A.* The representation theory of the symmetric group. Addison-Vesley P. G., 1981. **2.** *Bernstein I. N., Gelfand I. M., Gelfand S. I.* // Publ. of 1971 Summer School in Math.— Budapest, 1975.— P. 21—64. **3.** *Зелевинский А. В.* // Функцион. анализ и его прил.—1987.— Т. 21, вып. 2.— С. 74—75. **4.** *Zelevinsky A. V.* // Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. Ser. 4.—1980.— Т. 13. — P. 165—210. **5.** *Rogawski J. D.* // Inven. Math.—1985.— V. 79.— P. 443—465. **6.** *Чередник И. В.* // Теоретико-групповые методы в физике. Труды III международ. сем.— М.: Наука, 1986. **7.** *Чередник И. В.* // Функцион. анализ и его прил.—1986.— Т. 20, вып. 1.— С. 87—88. **8.** *Дринфельд В. Г.* // Функцион. анализ и его прил.—1986. — Т. 20, вып. 1.— С. 69—70. **9.** *Чередник И. В.* // ДАН СССР.—1986.— Т. 291, вып. 1.— С. 49—53.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
19 марта 1986 г.