

НЕГЛАДКИЕ РЕШЕНИЯ 2-ПОДМОДЕЛЕЙ КЛАССА E УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ*)

Е. В. Мамонтов

Рассматриваются эволюционные инвариантные подмодели с двумя независимыми переменными уравнений газовой динамики. Обсуждается вопрос о структуре сильных и слабых разрывов решений соответствующих систем дифференциальных уравнений. Уравнения подмоделей переписываются в виде законов сохранения, что позволяет выписать условия на сильных разрывах. Выводятся и анализируются транспортные уравнения — обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию вдоль характеристик слабых разрывов.

Как известно [1], система уравнений газовой динамики с общим уравнением состояния

$$\rho D\mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad Dp + A \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

где $D = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$, $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, \mathbf{u} — вектор скорости, ρ — плотность, p — давление, $A(\rho, p) = \rho c^2$ — заданная функция ($c = c(\rho, p)$ — скорость звука), допускает 11-параметрическую группу Ли.

Инвариантные 2-подмодели (подмодели с двумя независимыми переменными) можно разделить на два класса: эволюционные (класса E) и стационарные (класса S). В настоящей работе анализируются решения с сильными и слабыми разрывами для подмоделей класса E . Системы уравнений класса E имеют вид

$$\begin{aligned} U_t + UU_\xi + b/RP_\xi &= a_1, & V_t + UV_\xi &= a_2, & W_t + UW_\xi &= a_3, \\ R_t + UR_\xi + RU_\xi &= Ra_4, & P_t + UP_\xi + A(R, P)U_\xi &= A(R, P)a_4, \end{aligned} \quad (1)$$

где $b = b(t) > 0$; функции $a_i = a_i(t, \xi, U, V, W)$ — линейные или квадратичные по переменным U, V, W ; $A(R, P) = Rc^2$ — заданная функция ($c = c(R, P)$ — скорость звука). В случае политропного газа $A = \gamma P$. Инвариантные переменные ξ, U, V, W, R, P для каждой подмодели описаны в [2].

Характеристики системы (1) определяются равенствами

$$\frac{d\xi}{dt} = U \equiv \lambda_1, \quad \frac{d\xi}{dt} = U - \sqrt{\frac{bA}{R}} \equiv \lambda_2, \quad \frac{d\xi}{dt} = U + \sqrt{\frac{bA}{R}} \equiv \lambda_3.$$

Назовем характеристики, определяемые равенством $\frac{d\xi}{dt} = \lambda_k$, *характеристиками k -го семейства*.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02-01-00550, 00-15-96163).

1. Решения с сильными разрывами. Запишем систему уравнений (1) в виде законов сохранения:

$$\begin{aligned} R_t + (RU)_\xi &= Ra_4, & (RU)_t + (RU^2 + bP)_\xi &= Ra_1 + RUa_4, \\ (RV)_t + (RUV)_\xi &= Ra_2 + RVa_4, & (RW)_t + (RUW)_\xi &= Ra_3 + RWa_4, \\ (Re)_t + (U(Re + bP))_\xi &= a_1RU + a_2RV + a_3RW + a_4(Re + bP) + b'Re, \end{aligned} \quad (2)$$

где $e = \frac{1}{2}(U^2 + V^2 + W^2) + b\varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon(R, P)$ — внутренняя энергия газа. В случае политропного газа $\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P}{R}$. Предположим, что решение системы (1) имеет сильный разрыв на линии $\xi = h(t)$. Пусть символ скачка $[f] = f_1 - f_2$ означает разность предельных значений какой-либо величины f с разных сторон линии разрыва. Из (2) стандартным образом выводятся условия на разрыве:

$$\begin{aligned} [R]h' - [RU] &= 0, & [RU]h' - [RU^2 + bP] &= 0, & [RV]h' - [RUV] &= 0, \\ [RW]h' - [RUW] &= 0, & [Re]h' - [U(Re + bP)] &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем относительную скорость $u = U - h'$, тогда

$$\begin{aligned} [Ru] &= 0, & Ru[U] + b[P] &= 0, \\ Ru[V] &= 0, & Ru[W] &= 0, & Ru[e] + b[PU] &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

т. е. величина Ru непрерывна.

В предположении $R \neq 0$ возможны два случая:

- а) $u = 0$ — контактный разрыв, $[P] = 0$, $[U] = 0$;
- б) $u \neq 0$ — ударная волна, $[V] = 0$, $[W] = 0$.

2. Решения со слабыми разрывами. Транспортные уравнения. Запишем систему (1) в каноническом виде, считая $A \neq 0$:

$$\begin{aligned} \partial_1 V &= a_2, & \partial_1 W &= a_3, & \partial_1 R - \frac{R}{A} \partial_1 P &= 0, \\ \partial_2 U - \sigma \partial_2 P &= a_1 - A\sigma a_4, & \partial_3 U + \sigma \partial_3 P &= a_1 + A\sigma a_4, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\partial_1 = \partial_t + \lambda_1 \partial_\xi$, $\partial_2 = \partial_t + \lambda_2 \partial_\xi$, $\partial_3 = \partial_t + \lambda_3 \partial_\xi$, $\sigma = \sqrt{b/(RA)}$. Заметим, что в каждом уравнении канонической системы присутствует дифференцирование только по одному направлению.

Допустим, что решение системы непрерывно и обладает непрерывными производными всюду, кроме некоторых кусочно-дифференцируемых линий, на которых первые производные имеют скачок. Пусть $\xi = \xi(t)$ — уравнение линии разрыва первых производных решения. Обозначим (знак * означает транспонирование)

$$\begin{aligned} p &= p(\xi, t) = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)^* = \frac{\partial}{\partial \xi}(U, V, W, R, P)^*(\xi, t), \\ q &= q(\xi, t) = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)^* = \frac{\partial}{\partial t}(U, V, W, R, P)^*(\xi, t), \\ p^\pm &= p^\pm(\xi(t), t) = p(\xi(t) \pm 0, t), & q^\pm &= q^\pm(\xi(t), t) = q(\xi(t) \pm 0, t), \\ \mathcal{P}_1 &= p_2, & \mathcal{P}_2 &= p_3, & \mathcal{P}_3 &= p_4 - \frac{R}{A} p_5, & \mathcal{P}_4 &= p_1 - \sigma p_5, & \mathcal{P}_5 &= p_1 + \sigma p_5, \\ [p] &= p^+ - p^-, & [q] &= q^+ - q^-, & \eta_k &= [\mathcal{P}_k] \equiv \mathcal{P}_k^+ - \mathcal{P}_k^-, & k &= 1, \dots, 5, \\ \partial_j &= \partial_t + \lambda_j \partial_\xi, & j &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$[q] = -\xi'(t)[p]. \quad (6)$$

Выведем транспортные уравнения — уравнения, описывающие эволюцию величин $\eta_k = [\mathcal{P}_k]$. Продифференцируем уравнения системы (5) по ξ :

$$\partial_1 \mathcal{P}_1 = \mathcal{F}_1, \quad \partial_1 \mathcal{P}_2 = \mathcal{F}_2, \quad \partial_1 \mathcal{P}_3 = \mathcal{F}_3, \quad \partial_2 \mathcal{P}_4 = \mathcal{F}_4, \quad \partial_3 \mathcal{P}_5 = \mathcal{F}_5. \quad (7)$$

При этом

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= a_{2\xi} + a_{2V}\mathcal{P}_1 + a_{2W}\mathcal{P}_2 + \frac{a_{2U}}{2}\mathcal{P}_4 + \frac{a_{2U}}{2}\mathcal{P}_5 - \frac{1}{2}\mathcal{P}_1\mathcal{P}_4 - \frac{1}{2}\mathcal{P}_1\mathcal{P}_5, \\ \mathcal{F}_2 &= a_{3\xi} + a_{3V}\mathcal{P}_1 + a_{3W}\mathcal{P}_2 + \frac{a_{3U}}{2}\mathcal{P}_4 + \frac{a_{3U}}{2}\mathcal{P}_5 - \frac{1}{2}\mathcal{P}_2\mathcal{P}_4 - \frac{1}{2}\mathcal{P}_2\mathcal{P}_5, \\ \mathcal{F}_3 &= \left(a_4 \left(1 - \frac{RA_R}{A} \right) + \left(\frac{RA_R}{2A} - 1 \right) (\mathcal{P}_4 + \mathcal{P}_5) \right) \mathcal{P}_3, \\ \mathcal{F}_4 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2A} - 1 - \frac{RA_R}{2A} - \frac{A_P}{2} \right) \mathcal{P}_4^2 \\ &\quad + \left(\frac{\sigma A}{4R} + \frac{3\sigma A_R}{4} - \frac{\sigma}{2R} \right) \mathcal{P}_3\mathcal{P}_4 + \left(\frac{A_P}{4} + \frac{RA_R}{4A} - \frac{1}{4A} - \frac{1}{2} \right) \mathcal{P}_4\mathcal{P}_5 \\ &\quad + \left(\frac{b'}{4b} + \frac{a_{1U}}{2} - \frac{A\sigma a_{4U}}{2} + \frac{a_4}{4} \left(A_P + \frac{RA_R}{A} - 1 \right) \right) \mathcal{P}_4 + \dots, \\ \mathcal{F}_5 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2A} - 1 - \frac{RA_R}{2A} - \frac{A_P}{2} \right) \mathcal{P}_5^2 \\ &\quad - \left(\frac{\sigma A}{4R} + \frac{3\sigma A_R}{4} - \frac{\sigma}{2R} \right) \mathcal{P}_3\mathcal{P}_5 + \left(\frac{A_P}{4} + \frac{RA_R}{4A} - \frac{1}{4A} - \frac{1}{2} \right) \mathcal{P}_4\mathcal{P}_5 \\ &\quad + \left(\frac{b'}{4b} + \frac{a_{1U}}{2} + \frac{A\sigma a_{4U}}{2} + \frac{a_4}{4} \left(A_P + \frac{RA_R}{A} - 1 \right) \right) \mathcal{P}_5 + \dots \end{aligned}$$

Многоточием обозначены выражения, не содержащие \mathcal{P}_4 в определении \mathcal{F}_4 , и выражения, не содержащие \mathcal{P}_5 в определении \mathcal{F}_5 .

Запишем систему (7) по разные стороны разрыва и вычтем полученные уравнения.

Для характеристик, задаваемых уравнением $\xi' = \lambda_1$, имеют место равенства $\eta_4 = \eta_5 = 0$, $\mathcal{P}_4^- = \mathcal{P}_4^+ = \mathcal{P}_4$, $\mathcal{P}_5^- = \mathcal{P}_5^+ = \mathcal{P}_5$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \partial_1 \eta_1 &= \left(a_{2V} - \frac{1}{2}\mathcal{P}_4 - \frac{1}{2}\mathcal{P}_5 \right) \eta_1 + a_{2W}\eta_2, \\ \partial_1 \eta_2 &= a_{3V}\eta_1 + \left(a_{3W} - \frac{1}{2}\mathcal{P}_4 - \frac{1}{2}\mathcal{P}_5 \right) \eta_2, \\ \partial_1 \eta_3 &= \left(a_4 \left(1 - \frac{RA_R}{A} \right) + \left(\frac{RA_R}{2A} - 1 \right) (\mathcal{P}_4 + \mathcal{P}_5) \right) \eta_3. \end{aligned}$$

Для характеристик, задаваемых уравнением $\xi' = \lambda_2$, получаем $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_5 = 0$, $\mathcal{P}_1^- = \mathcal{P}_1^+ = \mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2^- = \mathcal{P}_2^+ = \mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3^- = \mathcal{P}_3^+ = \mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_5^- = \mathcal{P}_5^+ = \mathcal{P}_5$, откуда

$$\begin{aligned} \partial_2 \eta_4 &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2A} - 1 - \frac{RA_R}{2A} - \frac{A_P}{2} \right) (\mathcal{P}_4^+ + \mathcal{P}_4^-) + \left(\frac{\sigma A}{4R} + \frac{3\sigma A_R}{4} - \frac{\sigma}{2R} \right) \mathcal{P}_3 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{A_P}{4} + \frac{RA_R}{4A} - \frac{1}{4A} - \frac{1}{2} \right) \mathcal{P}_5 + \frac{b'}{4b} + \frac{a_{1U}}{2} - \frac{A\sigma a_{4U}}{2} + \frac{a_4}{4} \left(A_P + \frac{RA_R}{A} - 1 \right) \right) \eta_4. \end{aligned}$$

Для характеристик, задаваемых уравнением $\xi' = \lambda_3$, получаем $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0$, $\mathcal{P}_1^- = \mathcal{P}_1^+ = \mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2^- = \mathcal{P}_2^+ = \mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3^- = \mathcal{P}_3^+ = \mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4^- = \mathcal{P}_4^+ = \mathcal{P}_4$, откуда

$$\begin{aligned} \partial_3 \eta_5 = & \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2A} - 1 - \frac{RA_R}{2A} - \frac{A_P}{2} \right) (\mathcal{P}_5^+ + \mathcal{P}_5^-) - \left(\frac{\sigma A}{4R} + \frac{3\sigma A_R}{4} - \frac{\sigma}{2R} \right) \mathcal{P}_3 \right. \\ & \left. + \left(\frac{A_P}{4} + \frac{RA_R}{4A} - \frac{1}{4A} - \frac{1}{2} \right) \mathcal{P}_4 + \frac{b'}{4b} + \frac{a_{1U}}{2} + \frac{A\sigma a_{4U}}{2} + \frac{a_4}{4} \left(A_P + \frac{RA_R}{A} - 1 \right) \right) \eta_5. \end{aligned}$$

Пусть решение с «отрицательной» стороны характеристики известно. Мы получаем тогда следующие соотношения.

Для характеристик первого семейства имеем

$$\partial_1 \eta_1 = \left(a_{2V} - \frac{1}{2} \mathcal{P}_4 - \frac{1}{2} \mathcal{P}_5 \right) \eta_1 + a_{2W} \eta_2, \quad (8)$$

$$\partial_1 \eta_2 = a_{3V} \eta_1 + \left(a_{3W} - \frac{1}{2} \mathcal{P}_4 - \frac{1}{2} \mathcal{P}_5 \right) \eta_2, \quad (9)$$

$$\partial_1 \eta_3 = \left(a_4 \left(1 - \frac{RA_R}{A} \right) + \left(\frac{RA_R}{2A} - 1 \right) (\mathcal{P}_4 + \mathcal{P}_5) \right) \eta_3, \quad (10)$$

$$\mathcal{P}_4^+ = \mathcal{P}_4^- = \mathcal{P}_4, \quad \mathcal{P}_5^+ = \mathcal{P}_5^- = \mathcal{P}_5. \quad (11)$$

Для характеристик второго семейства имеем

$$\begin{aligned} \partial_2 \eta_4 = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2A} - 1 - \frac{RA_R}{2A} - \frac{A_P}{2} \right) \eta_4^2 + \left(\left(\frac{1}{2A} - 1 - \frac{RA_R}{2A} - \frac{A_P}{2} \right) \mathcal{P}_4^- \right. \\ & \left. + \left(\frac{\sigma A}{4R} + \frac{3\sigma A_R}{4} - \frac{\sigma}{2R} \right) \mathcal{P}_3 + \left(\frac{A_P}{4} + \frac{RA_R}{4A} - \frac{1}{4A} - \frac{1}{2} \right) \mathcal{P}_5 \right. \\ & \left. + \frac{b'}{4b} + \frac{a_{1U}}{2} - \frac{A\sigma a_{4U}}{2} + \frac{a_4}{4} \left(A_P + \frac{RA_R}{A} - 1 \right) \right) \eta_4, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_1^+ = \mathcal{P}_1^- = \mathcal{P}_1, \quad \mathcal{P}_2^+ = \mathcal{P}_2^- = \mathcal{P}_2, \quad \mathcal{P}_3^+ = \mathcal{P}_3^- = \mathcal{P}_3, \quad \mathcal{P}_5^+ = \mathcal{P}_5^- = \mathcal{P}_5. \quad (13)$$

Для характеристик третьего семейства имеем

$$\begin{aligned} \partial_3 \eta_5 = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2A} - 1 - \frac{RA_R}{2A} - \frac{A_P}{2} \right) \eta_5^2 + \left(\left(\frac{1}{2A} - 1 - \frac{RA_R}{2A} - \frac{A_P}{2} \right) \mathcal{P}_5^- \right. \\ & \left. - \left(\frac{\sigma A}{4R} + \frac{3\sigma A_R}{4} - \frac{\sigma}{2R} \right) \mathcal{P}_3 + \left(\frac{A_P}{4} + \frac{RA_R}{4A} - \frac{1}{4A} - \frac{1}{2} \right) \mathcal{P}_4 \right. \\ & \left. + \frac{b'}{4b} + \frac{a_{1U}}{2} + \frac{A\sigma a_{4U}}{2} + \frac{a_4}{4} \left(A_P + \frac{RA_R}{A} - 1 \right) \right) \eta_5, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_1^+ = \mathcal{P}_1^- = \mathcal{P}_1, \quad \mathcal{P}_2^+ = \mathcal{P}_2^- = \mathcal{P}_2, \quad \mathcal{P}_3^+ = \mathcal{P}_3^- = \mathcal{P}_3, \quad \mathcal{P}_4^+ = \mathcal{P}_4^- = \mathcal{P}_4. \quad (15)$$

Уравнения (8)–(15) есть искомые транспортные уравнения.

Используя определение величин \mathcal{P}_k и равенства (6), (11), (13), (15), находим, что на слабых разрывах вдоль характеристик первого семейства инвариантны величины

$$U_\xi, \quad U_t, \quad P_\xi, \quad P_t;$$

на слабых разрывах вдоль характеристик второго семейства инвариантны величины

$$V_\xi, \quad V_t, \quad W_\xi, \quad W_t, \quad R_\xi - \frac{R}{A} P_\xi, \quad R_t - \frac{R}{A} P_t, \quad U_\xi + \sigma P_\xi, \quad U_t + \sigma P_t;$$

на слабых разрывах вдоль характеристик третьего семейства инвариантны величины

$$V_\xi, \quad V_t, \quad W_\xi, \quad W_t, \quad R_\xi - \frac{R}{A}P_\xi, \quad R_t - \frac{R}{A}P_t, \quad U_\xi - \sigma P_\xi, \quad U_t - \sigma P_t.$$

Уравнения (8), (9) образуют систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \alpha_{11}\eta_1 + \alpha_{12}\eta_2, \quad \frac{d\eta_2}{dt} = \alpha_{21}\eta_1 + \alpha_{22}\eta_2, \quad \frac{d}{dt} = \partial_t + \lambda_1\partial_\xi.$$

Задание величин $\eta_1(t_0)$, $\eta_2(t_0)$ при некотором t_0 однозначно определяет ее решение.

Уравнение (10) — линейное уравнение вида

$$\frac{d\eta_3}{dt} = a(t)\eta_3, \quad \frac{d}{dt} = \partial_t + \lambda_1\partial_\xi$$

и может быть проинтегрировано:

$$\eta_3(t) = \eta_3(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}.$$

Задание $\eta_3(t_0)$ при некотором t_0 однозначно определяет $\eta_3(t)$.

Уравнения (12), (14) представляют собой уравнения Бернулли вида

$$\frac{d\eta_k}{dt} = \alpha_k(t)\eta_k^2 + \beta(t)\eta_k, \quad k = 4, 5, \quad \frac{d}{dt} = \partial_t + \lambda_j\partial_\xi, \quad j = 1, 2,$$

и также могут быть проинтегрированы:

$$\eta_k(t) = \frac{\eta_k(t_0)e^{\int_{t_0}^t \beta_k(\mu) d\mu}}{1 - \eta_k(t_0) \int_{t_0}^t \alpha_k(\tau) e^{\int_{t_0}^{\tau} \beta_k(\nu) d\nu} d\tau}, \quad k = 4, 5.$$

Задание величин $\eta_4(t_0)$, $\eta_5(t_0)$ при некотором t_0 снова однозначно определяет ее решение.

Автор благодарит Л. В. Овсянникова и участников программы ПОДМОДЕЛИ С. В. Хабилова, А. П. Чупахина, С. В. Головина, А. С. Павленко за полезное обсуждение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
2. Мамонтов Е. В. Групповые свойства 2-подмоделей класса E уравнений газовой динамики // Прикл. механика и техн. физика. 2001. Т. 42, № 1. С. 33–39.
3. Овсянников Л. В. Инвариантные интегральные законы сохранения // Докл. РАН. 1996. Т. 351, № 5. С. 599–602.

г. Новосибирск
Институт гидродинамики
им. М. А. Лаврентьева СО РАН
E-mail: mamontov@hydro.nsc.ru

Статья поступила 8 октября 2002 г.