

$$|v_1(x)| \leq R|x|, \quad |x| \leq 1, \quad (18)$$

$$|v_2(x)| \leq R/|x|^{N-2}, \quad |x| \geq \delta^3. \quad (19)$$

В результате итерации из (15) и (16) получаем

$$u_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} v_1(\delta^m x), \quad (20)$$

$$u_2(x) = - \sum_{m=1}^{\infty} v_2(x/\delta^m). \quad (21)$$

В силу оценок (18), (19) ряды в правых частях (20), (21) сходятся абсолютно и равномерно и представляют собой гармонические соответственно в $|x| < 1$ и $|x| > \delta^3$ функции. Следовательно, в предположении (17) решение задачи (13), (14) существует и оно дается формулой

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} v_1(\delta^m x) - \sum_{m=1}^{\infty} v_2(x/\delta^m) + C,$$

где C — произвольная действительная постоянная.

Автор выражает благодарность А. В. Бицадзе за внимание к работе.

Литература

1. Бицадзе А. В., Самарский А. А. // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739—740.
2. Бицадзе А. В. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 1. С. 17—19.
3. Бицадзе А. В. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 3. С. 521—525.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
3 июля 1986 г.

УДК 517.5

Е. И. МОИСЕЕВ

О БАЗИСНОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ СИНУСОВ

Работа посвящена изучению базисности в $L_p(0, \pi)$ следующей системы функций:

$$\{\sin[(n + \beta/2)\theta + \gamma/2]\}_{n=1}^{\infty}, \quad (1)$$

т. е. изучению сходимости в $L_p(0, \pi)$ разложения функции $\psi \in L_p(0, \pi)$ в биортогональный ряд по системе (1)

$$\psi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\left[\left(n + \frac{\beta}{2}\right)\theta + \frac{\gamma}{2}\right], \quad (2)$$

где $\theta \in [0, \pi]$, β и γ — произвольные вещественные числа, а коэффициенты ψ_n вычисляются по формуле $\psi_n = \int_0^{\pi} \psi(\theta) h_n(\theta) d\theta$, где

$$h_n(\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos \theta/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} \theta/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^n (\sin k\theta) B_{n-k}, \quad (3)$$

$$B_l = \sum_{m=0}^l C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-l}^m (-1)^{l-m}, \quad C_l^n = \frac{l(l-1) \dots (l-n+1)}{n!}.$$

Функции системы (1) будем рассматривать, следуя В. А. Ильину [1], как собственные функции обыкновенного дифференциального оператора y'' . В работе найдены необходимые и достаточные условия на параметры β и γ , которые гарантируют базисность системы (1) в $L_p(0, \pi)$ при $p > 1$. Кроме того, в работе найдены условия на параметры

β и γ , при которых ряд (2) сходится равномерно, если разлагаемая функция $\psi \in C^\alpha[0, \pi]$. Отметим, что если $\beta = \gamma = 0$, то ряд (2) представляет ортогональный ряд по синусам на сегменте $[0, \pi]$, и базисность системы (1) и условия равномерной сходимости в этом случае хорошо известны [2]. Аналогично при $\gamma = \pi$, $\beta = -2$ ряд (2) является ортогональным рядом по косинусам, и базисность в $L_p(0, \pi)$ и условия равномерной сходимости его также известны [2].

А. В. Бицадзе [3] доказал, что при $\beta = -2$, $\gamma = \pi/2$ ряд (2) для любой функции $\psi \in C^\alpha[0, \pi]$ сходится к ней равномерно. С. М. Пономарев [4] при $\gamma = 0$, $\beta = -1/2$ доказал базисность системы (1) в L_p при $p > 2$ и доказал равномерную сходимость ряда (2), если $\psi \in C^\alpha[0, \pi]$ и $\psi(0) = 0$. Аналогичный вопрос им был исследован для системы (1) при $\beta = -2 - 1/2$, $\gamma = \pi$.

В работе автора [5] были указаны необходимые и достаточные условия на вещественный параметр β , гарантирующие базисность системы (1) при $\gamma = 0$ и при $\gamma = \pi$.

В этой работе были указаны условия на параметр β , при которых ряд (2) будет равномерно сходиться, если $\gamma = 0$ и $\gamma = \pi$.

Г. Г. Девдариани [6, 7] нашел необходимые и достаточные условия на комплексный параметр β для базисности системы (1) в $L_p(0, \pi)$ при $\gamma = 0$ и $\gamma = \pi$. Базисность Рисса в $L_2(0, \pi)$ системы (1) при $\gamma = 0$, $\beta = -1/2$ и при $\gamma = \pi$, $\beta = -2 - 1/2$ была установлена в работе [8]. Необходимые и достаточные условия полноты системы (1) были найдены А. Н. Барменковым в $L_p(0, \pi)$ [9].

Настоящая работа является развитием работы автора [5] и в ней рассматривается случай вещественных параметров β , γ . Основным результатом настоящей работы является

Теорема 1. 1) Предположим, что

$$-1/p < \gamma/\pi < 2 - 1/p^*, \quad (4)$$

пусть $p \in (1, \infty)$, тогда система (1) образует базис в $L_p(0, \pi)$ тогда и только тогда, когда (при $p=2$ базис Рисса)

$$1/p > \gamma/\pi + \beta > 1/p - 2; \quad (5)$$

если же $\gamma/\pi + \beta \leq 1/p - 2$, то система (1) полна в $L_p(0, \pi)$, но не минимальна; при $\gamma/\pi + \beta > 1/p$ система (1) минимальна, но не полна, а при $\gamma/\pi + \beta = 1/p$ система (1) полна и минимальна.

2) Пусть $\gamma/\pi = -1/p$ и $p \in (1, \infty)$, тогда система (1) базиса в $L_p(0, \pi)$ не образует; точнее, при $2/p \geq \beta > 2/p - 2$ система (1) полна и минимальна, но не базис, если $\beta > 2/p$, то система (1) минимальна, но не полна в $L_p(0, \pi)$, при $\beta \leq 2/p - 2$ система (1) полна, но не минимальна в $L_p(0, \pi)$.

Доказательство этой теоремы опирается на решение следующей задачи сопряжения теории аналитических функций: найти аналитическую в единичном круге функцию по ее значениям на границе

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [f(z) z^{\beta/2}] &= \psi(\arg z), \quad 0 \leq \arg z \leq \pi, \quad |z| = 1, \quad \cos \gamma \cdot \operatorname{Re} [f(z) z^{\beta/2}] + \\ &+ \sin \gamma \cdot \operatorname{Im} [f(z) z^{\beta/2}] = -\psi(-\arg z), \quad -\pi < \arg z < 0, \quad |z| = 1. \end{aligned}$$

Решение этой задачи записывается в виде интеграла

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{\gamma/\pi} \frac{1}{(z+1)^\beta} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \frac{2\psi(\theta) i \exp(i(\theta - \beta\theta/2))}{X_+(\exp(i\theta))(\exp(i\theta) - z)} \times \right. \\ &\left. \times d\theta - \exp(i\gamma) \int_{-\pi}^0 \frac{2\psi(-\theta) \exp(i\theta(1 - \beta/2)) i}{X_+(\exp(i\theta))(\exp(i\theta) - z)} d\theta \right\}, \end{aligned}$$

где $X(t) = (t-1)^{\gamma/\pi} / (t+1)^{\gamma/\pi + \beta}$.

Разлагая найденную функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням z и выделяя мнимую часть этого разложения, получим ряд (2) и при этом определим явный вид биортонормированной системы (3).

Лемма 1. Пусть $-1/p \leq \gamma/\pi < 2 - 1/p$ и $\gamma/\pi + \beta > 1/p - 2$, тогда системы (1) и (3) биортонормированные, т. е.

$$\int_0^\pi \sin \left[\left(n + \frac{\beta}{2} \right) \theta + \frac{\gamma}{2} \right] h_m(\theta) d\theta = \delta_{nm}.$$

* Эти значения γ не ограничивают общности рассмотрения, так как остальные значения γ (кроме $\gamma/\pi = -1/p$, которые будут рассмотрены в п. 2 этой теоремы) сводятся к этим значениям путем добавления к числу $\gamma/2$ в (1) значения $n\pi$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Кроме того, в работе получено интегральное представление для функций системы (3), которое позволяет получить равномерную по номеру оценку функции из системы (3).

Лемма 2. Для функций системы (3) справедливо следующее интегральное представление при $\gamma/\pi > -1$, $\beta + \gamma/\pi < 1$:

$$h_m(\theta) = \sin \left[\left(m + \frac{\beta}{2} \right) \theta + \frac{\gamma}{2} \right] - \frac{2}{\pi^2} \frac{(2 \cos \theta/2)^\beta \sin(\gamma + \pi\beta)}{(\operatorname{tg} \theta/2)^{\gamma/\pi}} \times \\ \times \int_{-1}^0 \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^{\gamma/\pi} \frac{(-1)^{m+1} |u|^{m+\beta} \sin \theta du}{(1+u)^\beta (u^2 + 1 - 2u \cos \theta)} - \frac{2(2 \cos \theta/2)^\beta}{\pi^2 (\operatorname{tg} \theta/2)^{\gamma/\pi}} \times \\ \times \sin \gamma \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^{\gamma/\pi} \frac{u^{\beta+m} \sin \theta du}{(1+u)^\beta (u^2 + 1 - 2u \cos \theta)}. \quad (6)$$

Из формулы (6) вытекает следующее

Следствие. Для функции системы (3) справедлива следующая оценка:

$$|h_m(\theta)| \leq a (\cos \theta/2)^{\beta+1-\gamma/\pi} (\sin \theta/2)^{1-\gamma/\pi} + b, \quad (7)$$

где a, b постоянные, не зависящие от номера m .

Оценка (7) позволяет на основании результатов В. А. Ильина [1] утверждать равномерность на $(0, \pi)$ разложения (2) функции $\psi \in L_p(0, \pi)$ с тригонометрическим рядом этой же функции в случае, когда система (1) полна и минимальна в $L_p(0, \pi)$, $p \in (1, \infty)$.

Кроме того, в работе изучен вопрос о равномерной сходимости ряда (2) в случае, если $\psi \in C^\alpha[0, \pi]$.

Теорема 2. Пусть $\psi \in C^\alpha[0, \pi]$; рассмотрим два случая:

1) пусть $0 < \gamma/\pi < 2$, тогда ряд (2) сходится равномерно на $[0, \pi]$ к функции ψ , если $-2 < \beta + \gamma/\pi \leq 0$; при $\beta + \gamma/\pi > 0$ система (1) минимальна, но не полна в $C[0, \pi]$, при $\gamma/\pi + \beta \leq -2$ система (1) полна, но не минимальна в $C[0, \pi]$;

2) пусть $\gamma = 0$, тогда ряд (2) равномерно сходится, если $-2 < \beta < 0$ с дополнительным условием, что $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$, если же $\beta = 0$, то требуется для равномерной сходимости, чтобы $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$; при $\beta \leq -2$ система (1) полна, но не минимальна в $C[0, \pi]$, а при $\beta > 0$ система (1) минимальна, но не полна в $C[0, \pi]$.

Автор выражает благодарность А. В. Бицадзе и В. А. Ильину за внимание к работе.

Литература

- Ильин В. А. // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 5. С. 771—794.
- Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., 1965. Т. 1.
- Бицадзе А. В. // Успехи мат. наук. 1950. Т. 5, вып. 4 (38). С. 150—151.
- Пономарев С. М. // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249, № 5. С. 1068—1070.
- Монсеев Е. И. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 4. С. 794—798.
- Девдариани Г. Г. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 1. С. 168—170.
- Девдариани Г. Г. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 1. С. 170—171.
- Шкалик А. А. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 5. С. 1100—1106.
- Барменков А. Н. Об аппроксимированных свойствах некоторых систем функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., МГУ. 1983.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
3 июля 1986 г.

Технический редактор В. И. Крученко

Сдано в набор 14.10.86. Подписано в печать 25.12.86. АТ 08074. Формат 70×108^{1/16}. Высокая печать. Усл. печ. л. 16,10. Усл. кр.-отт. 16,62. Уч.-изд. л. 16,0. Тираж 1307 экз. Зак. № 1336.

Издательство «Наука и техника» Академии наук БССР и Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220600. Минск, Ленинский проспект, 68. Типография им. Франциска (География) Скорины издательства «Наука и техника». 220600. Минск, Ленинский проспект, 68.