В. С. Пацко, Модельный пример игровой задачи преследования с неполной информацией. I, *Дифференц. уравнения*, 1971, том 7, номер 3, 424–435

МАРТ 1971 г., ТОМ VII, № 3

УДК 518.733.431

МОДЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ. I

В. С. ПАЦКО

Рассматривается модельный пример игровой задачи преследования движения y движением z при неполной информации преследователя о движении y.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Движение на прямой материальной точки z описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{z} = u. \tag{1.1}$$

Здесь u — управление преследователя, в любой момент времени t оно стеснено ограничением

$$|u(t)| \leqslant \mu. \tag{1.2}$$

Преследователь стремится за наименьшее время совместить точку z с управляемой точкой y, но сделать это он должен так, чтобы в момент совмещения скорость $\dot{z}$ точки z равнялась наперед заданному числу c.

Движение точки y описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{y} = v. \tag{1.3}$$

Управление v в любой момент t ограничено условием

$$0 \leqslant v(t) \leqslant \nu. \tag{1.4}$$

Преследователь обладает следующей информацией. Ему известны уравнения (1.1), (1.3), ограничения (1.2), (1.4) и число c. В любой момент t он точно знает положение $z(t)$ и скорость $\dot{z}(t)$ точки z. Положение $y(t)$ точки y ему известно неточно. А именно в момент t вместо истинного значения $y(t)$ преследователь получает замер $h(t)$:

$$h(t) = y(t) + \omega, \tag{1.5}$$

где ω — ошибка замера, удовлетворяющая ограничению

$$|\omega(t)| \leqslant \frac{1}{k}|y(t) - z(t)|, \quad k > 1. \tag{1.6}$$

Соотношения (1.5), (1.6) известны преследователю, и он использует их совместно с реализациями $h(\tau)$, $z(\tau)$, $\tau \in [0, t]$ ($t = 0$ — момент начала преследования) для вычисления отрезка $s(t)$, в котором в момент t находится точка y. При этом преследователь полностью использует имеющуюся у него информацию, т. е. оценка $s(t)$ положения точки y в момент t является наилучшей.

Совокупность, состоящую из $z(t)$, $\dot{z}(t)$ и отрезка $s(t)$, будем называть позицией в момент t и обозначим $I(t)$.

Будем предполагать, что преследователь формирует управление по принципу обратной связи с помощью функций $u[I]$, $\delta[I]$. Функция $\delta[I]$ задает дискретную схему управления; дискрет времени $\delta > 0$, в течение которого управление держится постоянным, зависит от позиции, где это управление выбирается в силу функции $u[I]$. Назовем допустимыми такие функции $u[I]$, $\delta[I]$, при которых дискретная схема не вырождается и возбуждаемые реализации $u(t)$ при любом t удовлетворяют условию $|u(t)| \leqslant \mu$. Считается, что дискретная схема не вырождается, если всегда при возникновении ситуации, когда моменты переключения управления u стремятся слева к пределу t^*, не совпадающему с моментом поимки, решение уравнения (1.1) может быть продолжено при $t \geqslant t^*$ и если число таких моментов t^* не может быть бесконечным на любом конечном отрезке времени.

Задав функции $u[I]$, $\delta[I]$ и зная в момент t_0 позицию $I(t_0) = I_0$, преследователь может определить множество $\{s_{u,\,\delta,\,I_0}\}$ (когда это не приводит к недоразумению—просто $\{s\}$) реализаций $s(t)$, $t > t_0$, с которыми он может столкнуться. Обозначим через $T_{u,\,\delta,\,s(\cdot)}[I_0]$ время до окончания преследования из позиции I_0 при функциях $u[I]$, $\delta[I]$ и реализации $s(t)$, $t > t_0$, $s(\cdot) \in \{s_{u,\,\delta,\,I_0}\}$. Пару, состоящую из функции $u[I]$ и последовательности $(\delta_n[I])$, назовем тактикой и обозначим $\{u, \delta\}$. Будем говорить, что тактика $\{u,\delta\}$ допустима, если при любом n допустимы функции $u[I]$, $\delta_n[I]$.

В работе решается следующая

Задача А. Найти допустимую тактику $\{u^0, \delta^0\}$, для которой при любой позиции I_0 и любых допустимых функциях $u[I]$, $\delta[I]$ выполняется неравенство

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s(\cdot)\in\{s\}} T_{u^0,\delta^0_n,s(\cdot)}[I_0] \leqslant \sup_{s(\cdot)\in\{s\}} T_{u,\delta,s(\cdot)}[I_0].$$

При решении задачи предполагается, что $c \geqslant 0$; при $c = 0$ $\nu = 0$, $k > 1$; при $c > 0$ $c > \nu > 0$, $k > 1 + \dfrac{2c}{\nu}$.

В рассматриваемой задаче в состав позиции $I(t)$ (по которой преследователь формирует свое управление) входит отрезок $s(t)$, и значит, по постановке задача не является конечномерной. Подобные задачи изучались, например, в работах [1—4]. Особенностью данной работы является переход от исходной задачи к обычной конечномерной дифференциальной игре и затем полное решение этой игры. Тем самым без каких-либо огрублений полностью решается первоначальная задача.

§ 2. ОПИСАНИЕ РЕАЛИЗАЦИЙ $s(t)$. ЗАДАЧА В.

Отрезок $s(t)$ строится так. При каждом $\tau \in [0, t]$ по известным значениям $z(\tau)$ и $h(\tau)$ определяется множество $s^*(\tau)$ точек y, удовлетворяющих неравенству

$$|h(\tau) - y| \leqslant \frac{1}{k}\,|y - z(\tau)|.$$

Множество $s^*(\tau)$—отрезок: $s^*(\tau) = [\overset{*}{s}_1(\tau), \overset{*}{s}_2(\tau)]$; концы его при $h(\tau) \geqslant z(\tau)$ определяются формулами

$$\overset{*}{s}_1(\tau) = z(\tau) + \frac{k}{k+1}\,(h(\tau) - z(\tau)), \tag{2.1}$$

$$\overset{*}{s_2}(\tau)=z(\tau)+\frac{k}{k-1}(h(\tau)-z(\tau)) \tag{2.2}$$

и при $h(\tau)<z(\tau)$ — формулами

$$\overset{*}{s_1}(\tau)=z(\tau)+\frac{k}{k-1}(h(\tau)-z(\tau)), \tag{2.3}$$

$$\overset{*}{s_2}(\tau)=z(\tau)+\frac{k}{k+1}(h(\tau)-z(\tau)). \tag{2.4}$$

Затем каждый из отрезков $s^*(\tau)$, $\tau\in[0,\ t]$, преобразуется в отрезок

$$s^*(\tau,\ t)=[\overset{*}{s_1}(\tau,\ t),\ \overset{*}{s_2}(\tau,\ t)]=[\overset{*}{s_1}(\tau),\ \overset{*}{s_2}(\tau)+\nu(t-\tau)]. \tag{2.5}$$

И, наконец,

$$s(t)=\bigcap_{\tau\in[0,t]} s^*(\tau,\ t). \tag{2.6}$$

Очевидно, что $y(t)\in s(t)$. Лемма 2.1 (доказательство ее опускается) показывает, что оценка $s(t)$ положения $y(t)$ не может быть улучшена.

Лемма 2. 1. *Пусть на отрезке* $[0,\ t]$ *заданы реализации* $z(\tau)$ *и* $h(\tau)$, *причем реализация* $h(\tau)$ *такова, что существует хотя бы одно движение* $y(\tau)$, $\tau\in[0,\ t]$ *точки* y, *принадлежащее при любом* $\tau\in[0,\ t]$ *отрезку* $s(\tau)$, *вычисляемому по формулам (2.1)—(2.6). Тогда для любого* $y\in s(t)$ *найдется движение* $y(\tau)$, *удовлетворяющее условиям* $y(\tau)\in s(\tau)$, $\tau\in[0,\ t]$, $y(t)=y$.

Обозначим через R множество позиций I, для которых существует хотя бы одно h, обеспечивающее для всех $y\in s=[s_1,\ s_2]$ выполнение неравенства

$$|y-h|\leqslant\frac{1}{k}|y-z|.$$

Через Q обозначим подмножество R, для каждой точки которого существует только одно h, обладающее подобным свойством. Дополнение Q до R обозначим L. Множество L открыто в R. При $t=0$ $I(0)\in Q$.

Пусть преследователь применяет некоторые функции $u[I]$, $\delta[I]$ и $I_0\in R$— позиция в момент t_0. Очевидно, реализации $s(t)=[s_1(t),\ s_2(t)]$, с которыми может столкнуться преследователь при $t>t_0$, таковы, что выполняются следующие условия.

1. При любом $t>t_0$ $s_1(t)\leqslant s_2(t)$.

2. Функции $s_1(t)$, $t\geqslant t_0$ неубывающие; функции $s_2(t)$ имеют при любом $t\geqslant t_0$ правое верхнее производное число не больше ν.

3. При любом $t>t_0$ $I(t)\in R$.

Множество реализаций $s(t)$, $t>t_0$, обеспечивающих выполнение условий 1—3, обозначим $\{\overset{\circ}{s}_{u,\delta,I_0}\}$. В этом множестве выделим подмножество $\{\hat{s}_{u,\delta,I_0}\}$ (когда это не приводит к недоразумению, будем обозначать $\{\overset{\circ}{s}\}$ и $\{\hat{s}\}$) реализаций, удовлетворяющих еще двум условиям.

4. Функции $s_1(t)$, $s_2(t)$ абсолютно непрерывны при $t\geqslant t_0$.

5. Если в момент $t\geqslant t_0$ $I(t)\in L$, то производные функций $s_1(t)$, $s_2(t)$ в этот момент существуют и $\dot{s}_1(t)=0$, а $\dot{s}_2(t)=\nu$.

Лемма 2. 2. *Множество* $\{\hat{s}_{u,\delta,I_0}\}$ *при любых* $u[I]$, $\delta[I]$, $I_0\in R$ *принадлежит множеству* $\{\overset{\circ}{s}_{u,\delta,I_0}\}$.

В дальнейшем поступим так. Вместо задачи А будем решать более легкую задачу, в которой предполагается, что при любых функциях $u[I]$, $\delta[I]$ и позиции I_0 преследователь может столкнуться с любой реализацией $s(t)$

из множества $\{\hat{s}_{u,\delta,I_0}\}$, а не из множества $\{s_{u,\delta,I_0}\}$.

Задача В. Найти допустимую тактику $\{u^0, \delta^0\}$, для которой при любой позиции $I_0 \in R$ и любых допустимых функциях $u[I]$, $\delta[I]$ выполняется неравенство

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s(\cdot)\in\{\hat{s}\}} T_{u^0,\delta^0_n,s(\cdot)}[I_0] \leqslant \sup_{s(\cdot)\in\{\hat{s}\}} T_{u,\delta,s(\cdot)}[I_0].$$

Тактика $\{u^0, \delta^0\}$, решающая задачу В, обладает свойствами: 1) при любой позиции I_0 в момент t_0 и любом n дискретная схема не вырождается при замене множества ожидаемых реализаций $\{\hat{s}_{u,\delta,I_0}\}$ множеством $\{\mathring{s}_{u,\delta,I_0}\}$; 2) если $s_0^{(1)} \subset s_0^{(2)}$, то при любых z_0, $\dot{z}_0$ (нижний индекс нуль означает значения в момент t_0) и любом n

$$\sup_{s(\cdot)\in\{\hat{s}\}} T_{u^0,\delta^0_n,s(\cdot)}[z_0, \dot{z}_0, s_0^{(1)}] \leqslant \sup_{s(\cdot)\in\{\hat{s}\}} T_{u^0,\delta^0_n,s(\cdot)}[z_0, \dot{z}_0, s_0^{(2)}].$$

На основании формулируемой ниже леммы отсюда следует, что решение задачи В совпадает с решением задачи А.

Лемма 2. 3. *Если функции* $u[I]$, $\delta[I]$ *допустимы при расчете на множество* $\{\mathring{s}_{u,\delta,I_0}\}$ *и для любых* z_0, $\dot{z}_0$, $s_0^{(1)}$, $s_0^{(2)}$ $(s_0^{(1)} \subset s_0^{(2)})$ *обеспечивают выполнение неравенства*

$$\sup_{s(\cdot)\in\{\hat{s}\}} T_{u,\delta,s(\cdot)}[z_0, \dot{z}_0, s_0^{(1)}] \leqslant \sup_{s(\cdot)\in\{\hat{s}\}} T_{u,\delta,s(\cdot)}[z_0, \dot{z}_0, s_0^{(2)}],$$

то при любом $I_0 \in R$

$$\sup_{s(\cdot)\in\{\mathring{s}\}} T_{u,\delta,s(\cdot)}[I_0] = \sup_{s(\cdot)\in\{\hat{s}\}} T_{u,\delta,s(\cdot)}[I_0].$$

§ 3. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ В К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

Введем игрока E, формирующего реализации $s_1(t)$, $s_2(t)$. Условия 1 — 5 § 2 будут играть роль ограничений, накладываемых на игрока E. Преследователя будем называть игроком P.

Позицию игры опишем координатами

$$x_1 = s_1 - z,\ x_2 = \dot{z},\ x_3 = s_2 - s_1\ (x_3 \geqslant 0).$$

Множества R, Q, L выразятся в них так:

$$R = \left\{x : x_1 \geqslant 0,\ x_3 \leqslant \frac{2x_1}{k-1}\right\} \cup \left\{x : x_1 < 0,\ x_3 \leqslant -\frac{2x_1}{k+1}\right\},$$

$$Q = \left\{x : x_1 \geqslant 0,\ x_3 = \frac{2x_1}{k-1}\right\} \cup \left\{x : x_1 < 0,\ x_3 = -\frac{2x_1}{k+1}\right\},$$

$$L = R \setminus Q.$$

Движение фазовой точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ опишется уравнениями

$$\dot{x}_1 = v_1 - x_2,\ \dot{x}_2 = u,\ \dot{x}_3 = v_2 - v_1. \tag{3.1}$$

Игрок P влияет на движение фазовой точки через управление u, игрок E распоряжается выбором своих управлений $v_1 = \dot{s}_1$ и $v_2 = \dot{s}_2$. Окончанием игры считается попадание фазовой точки в точку $m = (0, c, 0)$. Ограничения, накладываемые на управления игрока E, следующие.

1. При любом t $v_1(t) \geqslant 0$, $v_2(t) \leqslant \nu$.
2. Игрок E должен подбирать управления v_1, v_2 так, чтобы при любом t $x(t) \in R$.
3. Реализации $v_1(t)$, $v_2(t)$ — интегрируемые функции.
4. Если в момент t $x(t) \in L$, то $v_1(t) = 0$, $v_2(t) = \nu$.

Разобьем каждое из множеств R, Q, L на два (рис. 1):

$$R_1 = \{x : x \in R,\ x_1 \geqslant 0\},\ R_2 = R \setminus R_1,$$
$$Q_1 = \{x : x \in Q,\ x_1 \geqslant 0\},\ Q_2 = Q \setminus Q_1,$$
$$L_1 = R \setminus Q_1,\ L_2 = L \setminus L_1.$$

Движение фазовой точки в полуплоскости Q_1 в течение конечного интервала времени возможно тогда и только тогда, когда между управлениями $v_1(t)$ и $v_2(t)$ осуществляется связь

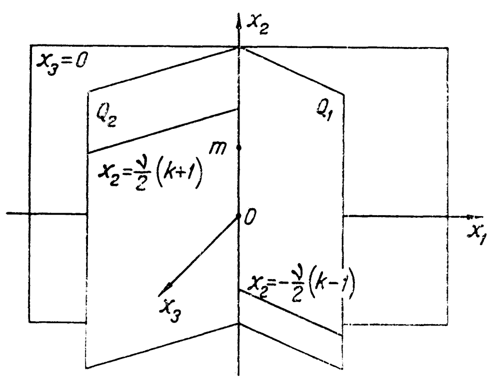

Рис. 1

$$v_1(t) = v_2(t) + \frac{2}{k+1}(x_2(t) - v_2(t)). \quad (3.2)$$

Учитывая ограничения $v_1(t) \geqslant 0$, $v_2(t) \leqslant \nu$, находим, что эта связь может быть реализована лишь при

$$x_2(t) \geqslant -\frac{\nu}{2}(k-1).$$

Предположим, что в момент t фазовая точка находится в L_1 вблизи Q_1. В множестве L_1 $v_1 = 0$, $v_2 = \nu$, следовательно, $\dot{x}_1(t) = -x_2(t)$, $\dot{x}_3(t) = \nu$. Если в рассматриваемый момент $x_2(t) > -\frac{\nu}{2}(k-1)$, то вектор скорости фазовой точки имеет составляющую, притягивающую фазовую точку к Q_1. При $x_2(t) = -\frac{\nu}{2}(k-1)$ вектор скорости фазовой точки параллелен полуплоскости Q_1, а при $x_2(t) < -\frac{\nu}{2}(k-1)$ у него есть составляющая, отталкивающая точку x от Q_1. Поэтому войти в Q_1 из L_1 фазовая точка может лишь при $x_2 > -\frac{\nu}{2}(k-1)$. Если в момент t^* $x(t^*) \in Q_1$, то движение фазовой точки будет происходить в Q_1 до тех пор, пока $x_2(t) \geqslant -\frac{\nu}{2}(k-1)$, $t \geqslant t^*$, если, конечно, при этом все время $x_1 \geqslant 0$. При $x_2(t^*) < -\frac{\nu}{2}(k-1)$ в момент $t^* + 0$ фазовая точка уже сойдет с Q_1. Для определенности в дальнейшем будем считать, что в Q_1 при $x_2 < -\frac{\nu}{2}(k-1)$ $v_1 = 0$ и $v_2 = \nu$.

Аналогично можно показать, что движение фазовой точки в полуплоскости Q_2 в течение конечного интервала времени возможно лишь при

$$x_2 \leqslant \frac{\nu}{2}(k+1)$$

и при этом должна реализовываться связь

$$v_1(t) = v_2(t) + \frac{2}{k-1}(v_2(t) - x_2(t)). \tag{3.3}$$

Если фазовая точка находится в L_2 вблизи полуплоскости Q_2, то при $x_2 < \frac{\nu}{2}(k+1)$ она притягивается к Q_2, а при $x_2 > \frac{\nu}{2}(k+1)$ отталкивается от Q_2. Если в момент t^* $x(t^*) \in Q_2$, то при $t \geqslant t^*$ движение фазовой точки будет происходить в Q_2 до тех пор, пока $x_2(t) \leqslant \frac{\nu}{2}(k+1)$, если, конечно, при этом все время $x_1 < 0$. При $x_2(t^*) > \frac{\nu}{2}(k+1)$ в момент $t^* + 0$ фазовая точка сходит с Q_2. В дальнейшем будем считать, что при $x_2 > \frac{\nu}{2}(k+1)$ в Q_2 $v_1 = 0$ и $v_2 = \nu$.

Итак, игрок E может распоряжаться своими управлениями v_1 и v_2 только в полуплоскости Q_1 при $x_2 \geqslant -\frac{\nu}{2}(k-1)$ и в полуплоскости Q_2 при $x_2 \leqslant \frac{\nu}{2}(k+1)$. При этом независимо он может выбирать только одно из двух управлений. Будем считать, что это v_1. Тогда из (3.2) с учетом ограничений $v_1(t) \geqslant 0$, $v_2(t) \leqslant \nu$ следует ограничение на управление v_1 в Q_1 при $x_2 \geqslant -\frac{\nu}{2}(k-1)$:

$$0 \leqslant v_1(t) \leqslant \nu + \frac{2}{k+1}(x_2(t) - \nu), \tag{3.4}$$

а из (3.3) аналогично в Q_2 при $x_2 \leqslant \frac{\nu}{2}(k+1)$

$$0 \leqslant v_1(t) \leqslant \nu + \frac{2}{k-1}(\nu - x_2(t)). \tag{3.5}$$

Выполнение ограничений 4, (3.4), (3.5) и связей (3.2), (3.3) эквивалентно выполнению ограничений 1, 2, 4.

Множество реализаций $v_1(t)$, $t \geqslant t_0$, с которыми может столкнуться игрок P при исходной позиции $x(t_0) = x_0 \in R$ и функциях $u[x]$, $\delta[x]$, обозначим $\{v_{1u,\delta,x_0}\}$ (когда это не приводит к недоразумению—просто $\{v_1\}$). Через $T_{u,\delta,v_1(\cdot)}[x_0]$ обозначим время перевода фазовой точки в точку m из позиции x_0 при функциях $u[x]$, $\delta[x]$ и реализации $v_1(\cdot) \in \{v_{1u,\delta,x_0}\}$.

По смыслу задачи В нужно решить сформулированную в этом параграфе дифференциальную игру лишь с точки зрения игрока P. Практически же ее приходится решать и с позиции игрока E, предполагая, что он старается оттянуть момент попадания фазовой точки в точку m. Будем считать, что игрок E может столкнуться с любой интегрируемой реализацией $u(t)$ управления u, удовлетворяющей при любом t условию $|u(t)| \leqslant \mu$; назовем такие реализации допустимыми. Будем говорить, что управление обратной связи $v_1[x]$ допустимо, если при использовании его при любой допустимой реализации $u(t)$ выполняются ограничения 1—4. Обозначим через $T_{v_1,u(\cdot)}[x_0]$ время до попадания фазовой точки в точку m при исходной позиции x_0, управлении $v_1[x]$ и допустимой реализации $u(t)$. Параллельно с решением задачи В будет найдено множество V_1^0 допустимых управлений $v_1^0[x]$, для каждого из которых при любой исходной позиции $x_0 \in R$ и любом допустимом управлении $v_1[x]$ выполняется неравенство

$$\inf_{u(\cdot)} T_{v_1^0,u(\cdot)}[x_0] \geqslant \inf_{u(\cdot)} T_{v,u(\cdot)}[x_0].$$

В рассматриваемой дифференциальной игре существует цена игры, т. е. для любого $x_0 \in R$

$$\inf_{u(\cdot)} T_{v_1^0,u(\cdot)}[x_0] = T^0[x_0] = \lim_{n\to\infty} \sup_{v_1(\cdot)\in\{v_1\}} T_{u^0,\delta_n^0,v_1(\cdot)}[x_0],\quad v_1^0[x]\in V_1^0.$$

Условимся через $T_{u,\delta,v_1}[x_0]$ обозначать время перевода фазовой точки из позиции x_0 в точку m, когда игрок P использует функции $u[x]$, $\delta[x]$, а игрок E—управление обратной связи $v_1[x]$.

§ 4. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ ПРИ $c = \nu = 0$

Рассмотрим случай, когда $c = \nu = 0$. Существенно здесь то, что с момента попадания в плоскость $x_3 = 0$ (обозначим его t^*) движение фазовой точки происходит в этой плоскости. Поэтому при $t \geqslant t^*$ дифференциальная игра вырождается в задачу управления по быстродействию в точку m; если $x_0 \in K_1 = R_1 \cup \{x : x_3 = 0\}$ ($x_0 \in K_2 = R_2 \cup \{x : x_3 = 0\}$), то при $t \geqslant t_0$ фазовая точка движется в множестве K_1 (K_2) и, значит, можно отдельно решать игру для множества K_1 и для множества K_2. Решения для множеств K_1 и K_2 подобны.

Опишем (без доказательства) решение для множества K_2.

Введем множества

$$A^{(1)} = \left\{x{:}x\in K_2,\ x_2 \geqslant 0,\ x_1 > \frac{x_2^2}{2\mu}\right\} \cup \left\{x{:}x\in K_2,\ x_2 < 0,\ x_1 \geqslant -\frac{x_2^2}{2\mu}\right\},$$

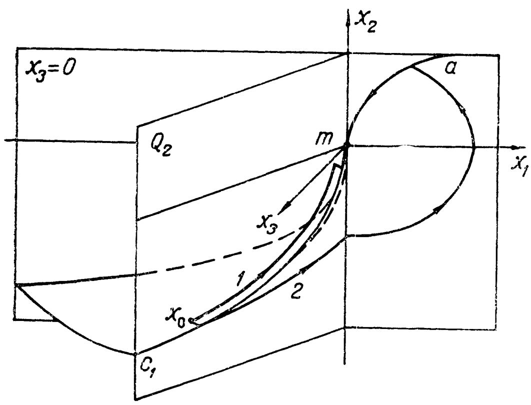

Рис.2

$$B^{(1)} = K_2 \diagdown A^{(1)},$$

$$\widetilde{A}^{(1)} = A^{(1)} \cap Q_2,$$

$$\widetilde{B}^{(1)} = B^{(1)} \cap Q_2.$$

Границу множеств $A^{(1)}$, $B^{(1)}$ при $x_2 \geqslant 0$ обозначим ma, границу множеств $\widetilde{A}^{(1)}$, $\widetilde{B}^{(1)}$ обозначим mc_1 (рис.2).

Определим следующим образом тактику $\{u^{(1)}, \delta^{(1)}\}$:

$$u^{(1)}[x] = \begin{cases} \mu, & \text{если } x\in A^{(1)}, \\ -\mu, & \text{если } x\in B^{(1)}, \end{cases} \quad (\delta_n^{(1)}[x]) = \delta^{(1)}[x];$$

функцию $\delta^{(1)}[x]$, $x\in K_2$, выберем так, чтобы фазовая точка, исходя в момент t^* из позиции $x(t^*) = x^* \in A^{(1)}$ ($B^{(1)}$), при управлении $u(t) = u[x^*]$ и любой реализации $v_1(t)$ на интервале $[t^*, t^* + \delta^{(1)}[x^*])$ не могла выйти на отрезке $[t^*, t^* + \delta^{(1)}[x^*]]$ за пределы множества $\bar{A}^{(1)}$ ($\bar{B}^{(1)}$) (черта сверху здесь и в дальнейшем означает замыкание множества). Тактика $\{u^{(1)}, \delta^{(1)}\}$ является оптимальной тактикой для задачи управления по быстродействию в точку m при $v_1 = 0$. Это наталкивает на мысль взять ее в качестве первого приближения к оптимальной тактике $\{u^0, \delta^0\}$.

Если игрок P использует тактику $\{u^{(1)}, \delta^{(1)}\}$, то из любой начальной позиции $x_0 \in K_2$ при любом допустимом поведении игрока E игра кончается за конечное время; при этом после попадания фазовой точки в множество $A^{(1)}$

движение ее уже до конца игры происходит в этом множестве (как бы ни вел себя игрок E). Наихудшей с точки зрения игрока P реакцией игрока E на тактику $\{u^{(1)}, \delta^{(1)}\}$ является управление обратной связи

$$v_1^{(1)}[x] = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \widetilde{B}^{(1)}, \\ -\dfrac{2x_2}{k-1}, & \text{если } x \in \widetilde{A}^{(1)}, \end{cases}$$

т. е. при любом $x_0 \in K_2$

$$\sup_{v_1(\cdot)\in\{v_1\}} T_{u^{(1)},\delta^{(1)},v_1(\cdot)}[x_0] = T_{u^{(1)},\delta^{(1)},v_1^{(1)}}[x_0].$$

Оказывается, что *в множестве* $A^{(1)}$ оптимальная тактика $\{u^0, \delta^0\}$ совпадает с тактикой $\{u^{(1)}, \delta^{(1)}\}$, а оптимальное управление $v_1^0[x]$ с управлением $v_1^{(1)}[x]$.

Однако для начальных позиций в множестве $B^{(1)}$ тактика $\{u^{(1)}, \delta^{(1)}\}$ и управление $v_1^{(1)}[x]$ уже не доставляют оптимального решения. Чтобы убедиться в этом, можно рассмотреть начальные позиции в $\widetilde{B}^{(1)}$, близкие к кривой mc_1. Предположим, что игрок E применяет управление $v_1^{(1)}[x]$. Игрок P вместо вывода фазовой точки на кривую mc_1 (траектория 2 на рис.2), как он должен делать при тактике $\{u^{(1)}, \delta^{(1)}\}$, может заставить ее двигаться в $\widetilde{B}^{(1)}$ рядом с кривой mc_1 и, только подведя к точке m, вывести на кривую mc_1 (траектория 1 на рис. 2). При таком поведении игрока P время перевода будет близко к времени оптимального быстродействия в точку m при $v_1 = 0$, а оно меньше времени $T_{u^{(1)},\delta^{(1)},v_1^{(1)}}[x_0]$.

В рассматриваемой ситуации полностью справедливы интуитивные соображения, описанные в [5, стр. 344—349], которые связаны с возникновением экивокальной кривой, т. е. кривой, на которой расщепляются оптимальные траектории (предельные траектории в силу $\{u^0, \delta^0\}$, $v_1^0[x]$): одна траектория идет по кривой, вторая сходит с нее (реализация той или другой траектории зависит от управления игрока E на кривой). Приведем построение такой кривой. Оно будет проводиться в множестве $\widetilde{B}^{(1)}$.

Пусть (Δ_l)—убывающая числовая последовательность, сходящаяся к нулю. В соответствие каждому номеру l поставим кривую с определенными свойствами. Она лежит в $\widetilde{\widetilde{B}}^{(1)}$, исходит из точки m; проекция ее на плоскость $x_3 = 0$ описывается уравнением $x_1 = f_l(x_2)$, $x_2 \leqslant 0$, где $f_l(x_2)$—возрастающая абсолютно непрерывная функция. Для каждой точки на кривой $x_1 = f_l(x_2)$ определим два числа: время $t^{(1)}[x_0]$ траверсирующего движения и время $t^{(2)}[x_0]$ проникающего движения. Траверсирующее (траектория 1 на рис. 3)—это движение от точки x_0 до точки m по кривой $x_1 = f_l(x_2)$ при $v_1 = 0$, $v_2(x) = -\dfrac{2x_2}{k+1}$; $u(x)$ находится из условия движения по кривой;

$$t^{(1)}[x_0] = \int_{x_{20}}^{0} \frac{1}{(-x_2)} \cdot \frac{df_l(x_2)}{dx_2}\, dx_2.$$

Проникающее (траектория 2 на рис. 3) — это движение в силу $\{u^{(1)}, \delta^{(1)}\}$, $v_1^{(1)}[x]$;

$$t^{(2)}[x_0] = \frac{1}{\mu}(2x_{2q} - x_{20}).$$

Точки пересечения кривой $x_1 = f_l(x_2)$ с плоскостями $x_1 = -i\Delta_l$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, обозначим d_i ($d_0 = m$). Потребуем, чтобы для любой точки d_i $t^{(1)}[d_i] = t^{(2)}[d_i]$. Эквивокальная кривая будет пределом последовательности кривых $x_1 = f_l(x_2)$, $l = 1, 2, \ldots$

Опишем построение кривой $x_1 = f_l(x_2)$ на $i+1$ шаге. Введем семейство

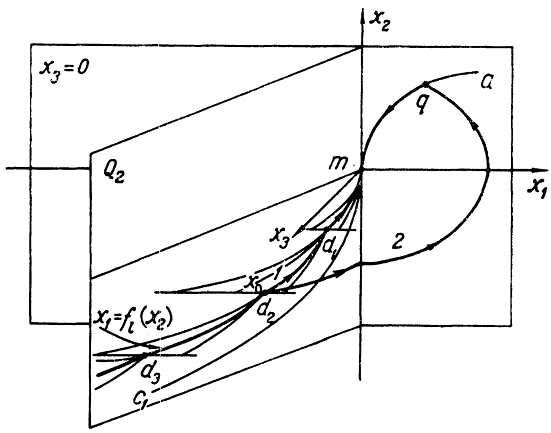

Рис.3

кривых γ, исходящих из точки d_i и описываемых в проекции на плоскость $x_3 = 0$ уравнениями (x_{10}, x_{20} — координаты точки d_i)

$$x_1 = \frac{x_{20}^2 - x_2^2}{2\mu}\left(1 + \frac{2\gamma}{k-1}\right) + x_{10},$$

$$-(i+1)\Delta \leqslant x_2 \leqslant x_{20} = -i\Delta, \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant 1.$$

Кривая семейства, соответствующая $\gamma = 0$ ($\gamma = 1$), является траекторией движения системы (3.1) в $\overline{\overline{B}}^{(1)}$ в обратном времени из точки d_i при $u = \mu$, $v_1 = 0$ $\left(v_1(x) = -\dfrac{2x_2}{k-1}\right)$, $v_2(x) = \dfrac{2x_2}{k+1}$ $(v_2 = 0)$.

Рассмотрим пересечение плоскости $x_2 = -(i+1)\Delta$ с кривыми семейства. Для каждой кривой найдем время $t^{(1)}$ траверсирующего движения и время $t^{(2)}$ проникающего движения (и то, и другое от точки пересечения с плоскостью $x_2 = -(i+1)\Delta$). При изменении γ от 0 до 1 время $t^{(1)}$ непрерывно возрастает, а время $t^{(2)}$ непрерывно убывает. При $\gamma = 0$ $t^{(1)} < t^{(2)}$, а при $\gamma = 1$ $t^{(1)} > t^{(2)}$. Поэтому найдется кривая, для которой $t^{(1)} = t^{(2)}$. Эту кривую и выберем за продолжение кривой $x_1 = f_l(x_2)$ на интервал $(-i\Delta, -(i+1)\Delta]$.

Лемма 4.1. *Последовательность функций $(f_l(x_2))$ поточечно сходится к возрастающей абсолютно непрерывной функции $f(x_2)$. Для каждой точки x_0 на кривой $x_1 = f(x_2)$ $t^{(1)}[x_0] = t^{(2)}[x_0]$. Кривая, исходящая из точки m и обладающая таким свойством, единственна.*

Выведем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $f(x_2)$.

На кривой $x_1 = f(x_2)$ возьмем произвольную точку x_0. Обозначим через q точку на кривой ma, в которую попадает проникающее движение, выпущенное из точки x_0. Распишем равенство $t^{(1)}[x_0] = t^{(2)}[x_0]$:

$$\int_{x_{20}}^{0} \frac{1}{(-x_2)} \cdot \frac{df(x_2)}{dx_2}\, dx_2 = \frac{1}{\mu}(2x_{2q} - x_{20}).$$

Подставив в это уравнение выражение для x_{2q} через x_{10} и x_{20} и продифференцировав по x_{20}, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_1}{dx_2}=\frac{x_2-\sqrt{\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_1\mu(k-1)}{k+1}}}{\mu\left\{\frac{1}{x_2}\sqrt{\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_1\mu(k-1)}{k+1}}-\frac{k-1}{k+1}\right\}}$$

с начальным условием $x_1=0$, $x_2=0$.

Построенную экивокальную кривую $x_1=f(x_2)$ обозначим mc. Из каждой точки кривой mc в обратном времени выпустим движение системы (3.1) при $u=\mu$, $v_1=0$, $v_2=0$. Траектории в целом образуют поверхность, которая вместе с кривой ma разбивает множество K_2 на два подмножества; то из них, что содержит $A^{(1)}$, обозначим A, в него включим построенную поверхность (кривая ma не включается в A). Обозначим

$$B=K_2\setminus A,\quad \widetilde{B}=B\cap Q_2,\quad \widetilde{A}=A\cap Q_2.$$

Определим оптимальную тактику $\{u^0,\ \delta^0\}$ игрока P. Первый элемент — функция $u^0[x]$, равен

$$u^0[x]=\begin{cases}\mu, & \text{если } x\in A,\\ -\mu, & \text{если } x\in B.\end{cases}$$

Зададим второй элемент тактики — последовательность $(\delta_n^0[x])$. Для этого выберем возрастающую последовательность $(\psi_n(x_2))$, $x_2\leqslant 0$; $\psi_n(0)=0$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, непрерывных возрастающих функций, сходящуюся к $\psi(x_2)$. В множестве $\widetilde{B}$ ей будет соответствовать последовательность кривых $(x_1=\psi_n(x_2))$, прижимающаяся при $n\to\infty$ к кривой mc. С помощью этой последовательности определим на кривой mc последовательность $(\delta_n^0[x])$. А именно, положим $\delta_n^0[x]$ равным времени движения системы (3.1) при $u=\mu$, $v_1=0$, $v_2(x)=\frac{2x_2}{k+1}$ от точки x до кривой $x_1=\psi_n(x_2)$. В остальных точках множества K_2 примем $(\delta_n^0[x])=\delta^0[x]$; функцию $\delta^0[x]$ выберем так, чтобы фазовая точка, исходя в момент t^* из позиции $x(t^*)=x^*\in A(B)$, при управлении $u(t)=u[x^*]$ и любой реализации $v_1(t)$ на интервале $[t^*,\ t^*+\delta^0[x^*])$ не могла выйти на отрезке $[t^*,\ t^*+\delta^0[x^*]]$ за пределы множества $\bar{A}(\bar{B})$.

Оптимальное управление игрока E не единственно; а именно, оптимально любое управление $v_1^0[x]$, входящее в множество V_1^0 управлений, отличающихся друг от друга только на кривой mc. На кривой mc каждое управление $v_1^0[x]$ кусочно непрерывно, на интервале непрерывности оно равно 0 либо $-\frac{2x_2}{k-1}$. В остальных точках множества $\widetilde{A}\cup\widetilde{B}$ каждое управление $v_1^0[x]$ равно

$$v_1^0[x]=\begin{cases}0, & \text{если } x\in\widetilde{B},\\ -\frac{2x_2}{k-1}, & \text{если } x\in\mathring{\widetilde{A}},\end{cases}$$

где $\mathring{\widetilde{A}}$ — внутренность плоского множества $\widetilde{A}$.

Опишем теперь несколько типичных ситуаций, которые могут складываться в рассматриваемой игре.

Пусть игрок P применяет тактику $\{u^0, \delta^0\}$, а игрок E — произвольное допустимое управление $v_1[x]$; пусть в момент t^* фазовая точка находится на кривой mc. В зависимости от того, каково управление $v_1[x]$ в окрестности точки $x^* = x[t^*]$, возможны два типа предельных движений: сброс в множество $\overset{\circ}{\widetilde{A}}$ и движение по кривой mc. Например, если $v_1[x] = -\dfrac{2x_2}{k-1}$ в окрестности точки x^*, возникает движение первого типа, а при $v_1[x] = 0$ — второго. Движение по кривой mc при $v_1[x(t)] = 0$ — это самое медленное из всех движений, которые возможны по этой кривой в направлении точки m.

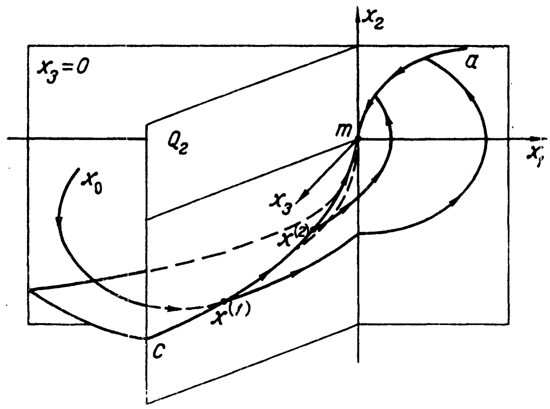

Рис.4

В дискретной схеме оно аппроксимируется (и в смысле времени и в смысле траектории) скольжением по кривой mc со стороны множества $\widetilde{B}$, если в $\widetilde{B}$ $v_1[x] = 0$.

Если игрок P применяет тактику $\{u^0, \delta^0\}$, то при различных управлениях $v_1^0[x] \in V_1^0$ при одной и той же начальной позиции $x_0 \in K_2$ могут получиться разные предельные движения, но все они будут заканчиваться в точке m в одно и то же время. Расщепление движений может происходить только на эквивокальной кривой mc. На рис. 4 показаны три предельные траектории, начинающиеся из одной точки $x_0 \in B \cap L_2$; точками расщепления являются точки $x^{(1)}$, $x^{(2)}$.

Таково решение дифференциальной игры при $c = \nu = 0$.

Скажем несколько слов о выполнении условий леммы 2.3. Описанная дискретная схема формирования управления игрока P с помощью тактики $\{u^0, \delta^0\}$ не вырождается при расчете на множество реализаций $\{v_{1u^0,\delta^0,x^0}\}$ игрока E. В первоначальной записи позиции: $I = [z, \dot{z}, s]$ это равносильно невырождению при расчете на множество реализаций $\{\hat{s}_{u^0,\delta^0,I_0}\}$. Для того чтобы не было вырождения при переходе к более широкому множеству реализаций $\{\overset{\circ}{s}_{u^0,\delta^0,I_0}\}$, нужно лишь точнее определить последовательность $(\delta_n^0[x])$ на поверхности, разделяющей множества A, B (в L_2). Например, можно положить $(\delta_n^0[x]) = (\delta_n^0[x^*])$, где x^* — точка на кривой mc с координатой $\overset{*}{x}_1 = x_1$. Так будет выполнено первое условие леммы 2. 3.

Из свойства функции $T^0[x_0]$:

$$T^0[x_0^{(1)}] \leqslant T^0[x_0^{(2)}] \quad \text{при} \quad x_0^{(1)} \in G(x_0^{(2)}) = \{x : x_{20} = x_{20}^{(2)},$$

$$x_{10}^{(2)} \leqslant x_{10} \leqslant x_{10}^{(2)} + x_{30}^{(2)} - x_{30}, \ 0 \leqslant x_{30} \leqslant x_{30}^{(2)}\}, \quad x_0^{(2)} \in R,$$

и построения последовательности $(\delta_n^0[x])$ вытекает, что для любого n

и любого $x_0^{(2)} \in R$

$$T_{u^0, \delta_n^0}[x_0^{(1)}] \leqslant T_{u^0, \delta_n^0}[x_0^{(2)}] \text{ при } x_0^{(1)} \in G(x_0^{(2)}).$$

Последнее неравенство при возвращении к первоначальной записи позиции: $I = [z, \dot{z}, s]$ перепишется так: для любых z_0, $\dot{z}_0$, $s_0^{(1)}$, $s_0^{(2)}$ $(s_0^{(1)} \subset s_0^{(2)})$, n

$$\sup_{s(\cdot) \in \{\hat{s}\}} T_{u^0, \delta_n^0, s(\cdot)}[z_0, \dot{z}_0, s_0^{(1)}] \leqslant \sup_{s(\cdot) \in \{\hat{s}\}} T_{u^0, \delta_n^0, s(\cdot)}[z_0, \dot{z}_0, s_0^{(2)}].$$

Это и означает выполнение второго условия леммы 2. 3.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за обсуждение работы и ценные замечания.

Литература

1. Шелементьев Г. С. ПММ, **32**, вып. 2, 185—193, 1968.
2. Шелементьев Г. С. ПММ, **33**, вып. 2, 251—260, 1969.
3. Черноусько Ф. Л. ПММ, **32**, вып. 4, 587—595, 1968.
4. Красовский Н. Н. ПММ, **33**, вып. 3, 386—396, 1969.
5. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.

Поступила в редакцию 19 декабря 1969 г.

Уральский государственный университет им. А. М. Горького