Доклады Академии наук СССР
1965. Том 165, № 2

УДК 517.91 *МАТЕМАТИКА*

Е. А. ЛИФШИЦ

О ПРИНЦИПАХ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 6 IV 1965)

Как известно, вопрос о разрешимости ряда сложных задач сводится к отысканию неподвижных точек соответствующих преобразований A. При этом для одной и той же задачи могут оказаться удобными переходы к нескольким преобразованиям. Допустим, что некоторая задача сведена к вопросу о неподвижных точках двух операторов U и A, действующих, вообще говоря, в различных пространствах. Возникает естественный вопрос о формулах, связывающих соответствующие топологические характеристики операторов U и A. Такие формулы, следуя М. А. Красносельскому, будем называть теоремами двойственности. Ряд теорем двойственности для задачи о периодических решениях системы дифференциальных уравнений первого порядка установлен М. А. Красносельским и В. В. Стрыгиным ([5, 7]). Как показано М. А. Красносельским ([6]), такие теоремы двойственности приводят к существенно новым условиям существования периодических решений у уравнений с отклоняющимися аргументами и у более общих классов эволюционных задач.

В настоящей статье излагаются теоремы двойственности для задачи о периодических решениях систем дифференциальных уравнений высшего порядка. Предлагаемые теоремы и для случая систем уравнений первого порядка являются новыми; в них укладываются результаты статей ([5, 7]).

Отметим, что рассматриваемые в п. 3 примеры интегральных операторов рассматривались и в ([5]), а также, что один частный принцип двойственности для уравнений второго порядка был указан М. А. Красносельским.

Результаты настоящей работы могут быть применены к исследованию периодических решений уравнений высшего порядка с отклоняющимися аргументами. Здесь применима предложенная в ([6]) схема рассуждений.

1. Рассмотрим векторное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(t)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\,y = f(t,\ y,\ y',\ldots,y^{(n-1)}). \tag{1}$$

Предположим, что матрицы $a_i(t)$ и вектор-функция $f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ непрерывны и обладают свойством ω-периодичности по t:

$$\begin{gathered} a_i(t+\omega) \equiv a_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \\ f(t+\omega,\ y,\ y',\ldots,y^{(n-1)}) \equiv f(t,\ y,\ y',\ldots,y^{(n-1)}). \end{gathered} \tag{2}$$

Предположим также, что все решения уравнения (1) продолжимы на отрезок длины ω. Пусть $y(t)$ является k-мерной вектор-функцией. Под начальным условием $y(t)$ будем понимать kn-мерный вектор z_y, первые k координат которого совпадают с координатами вектора $y(0)$, следующие k — с координатами вектора $y'(0)$ и т. д.; последние k координат вектора z_y совпадают с координатами вектора $y^{(n-1)}(0)$. В дальнейшем мы будем считать, что каждому начальному условию z из kn-мерного пространства R отвечает одно и только одно решение $y(t)$ дифференциального уравнения (1).

Задача о существовании периодических решений у уравнения (1) может быть сведена к задаче о неподвижных точках различных операторов.

Выберем произвольный элемент $z \in R$. Через $q(t, z)$ обозначим решение уравнения (1) с начальным условием z. В силу (2) вектор-функция $q(t+\omega, z)$ также является решением уравнения (1), следовательно, $q(t+\omega, z) = q(t, z_1)$, $z_1 \in R$. Оператор $Uz = z_1$ назовем оператором сдвига по траекториям дифференциального уравнения (1).

Известно, что неподвижные точки оператора U, действующего в пространстве R, полностью описывают множество периодических решений уравнения (1), а именно, для того чтобы решение $q(t, z^*)$ уравнения (1) было ω-периодическим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $Uz^* = z^*$.

Введем в рассмотрение однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)\, y = 0. \tag{3}$$

Решение уравнения (3) с начальным условием z будем обозначать через $p(t, z)$. Оператор сдвига V по траекториям уравнения (3), определенный аналогично оператору U, является линейным оператором.

Решения уравнения (3) образуют подпространство E пространства C^{n-1} вектор-функций, $n-1$ раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, \omega]$. Между пространствами E и R существует естественный изоморфизм B, заданный равенством

$$Bp(t, z) = z \quad (z \in R). \tag{4}$$

Следующие утверждения позволяют строить операторы A, действующие в пространстве C^{n-1}, неподвижные точки которых описывают множество периодических решений уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть вполне непрерывный оператор A, действующий в пространстве C^{n-1}, удовлетворяет следующим условиям:*

1) *$Ax(t)$ является решением дифференциального уравнения*

$$y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)\, y = f[t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)]. \tag{5}$$

2) *Если $x(t) = q(t, z)$, то*

$$Ax(t) = x(t) - p[t, C(z - Uz)], \tag{6}$$

где C — невырожденная матрица.

Тогда множество неподвижных точек оператора A совпадает с множеством ω-периодических решений уравнения (1).

Теорема 2. *Пусть* 1 *не является собственным числом оператора V. Пусть вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условию* 1) *теоремы* 1 *и условию*

2′) *Если $x(t) = q(t, z)$, то*

$$Ax(t+\omega) = Ax(t). \tag{7}$$

Тогда множество неподвижных точек оператора A совпадает с множеством ω-периодических решений уравнения (1).

2. Пусть $G \subset R$ и $\Omega \subset C^{n-1}$ — такие ограниченные области, что множество неподвижных точек оператора U, лежащих в G, совпадает с множеством начальных значений ω-периодических решений уравнения (1), лежащих в Ω, причем на границе Γ области Ω нет ω-периодических решений уравнения (1), а на границе Π области G нет неподвижных точек оператора U.

Возникает вопрос о том, как связаны вращения векторных полей

$$\Phi z = z - Uz, \tag{8}$$

$$\Psi x = x - Ax \tag{9}$$

на границах П и Г соответственно. Оказывается, что эти вращения равны по абсолютной величине, точнее, имеют место следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условиям теоремы* 1.

Тогда вращение γ *непрерывного векторного поля* (8) *на границе* П *области* G *и вращение* γ_1 *вполне непрерывного векторного поля* (9) *на границе* Г *области* Ω *связаны равенством*

$$\gamma_1 = (-1)^{\alpha}\gamma,$$

где α — *сумма кратностей отрицательных собственных чисел матрицы* C.

Следствием теоремы 3 является

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.

Тогда вращения γ *и* γ_1 *связаны равенством*

$$\gamma_1 = (-1)^{\beta}\gamma,$$

где β — *сумма кратностей собственных чисел оператора* V, *бо́льших чем* 1.

Для доказательства теоремы 3 строится вспомогательная область $\Omega_1 \subset C^{n-1}$

$$\Omega_1 = \{x(t); x(t) \in C^{n-1}, z_x \in G, \| x(t) \| < r\},$$

где z_x — начальное значение функции $x(t)$, а $r > 0$ такое число, что функции $q(t, z)$ и $p(t, z)$ при $z \in R$, $\| z \| \leqslant \sup\limits_{z \in G} (\| C \| \| z - Uz \| + \| z \|)$ лежат в открытом шаре пространства C^{n-1} радиуса $r/2$. Показывается, что вращение поля Ψx на границе Γ_1 области Ω_1 равно γ_1. При помощи двух гомотопных переходов доказывается, что γ_1 равно вращению на Γ_1 векторного поля $x - \chi x$, где

$$\chi x(t) = p(t, z_x) - p[t, C(z_x - Uz_x)].$$

Вращение поля $x - \chi x$ равно вращению поля

$$Px(t) = p[t, C(z_x - Uz_x)]$$

на границе области $\Omega_1 \cap E$ пространства E. Для доказательства теоремы остается применить изоморфизм B пространств E и R, определенный в п. 1.

Для доказательства теоремы 4 показывается, что из ее условий следуют условия теоремы 3 при $C = (1 - V)^{-1}$.

3. Приведем несколько простейших примеров операторов, удовлетворяющих условиям теорем 1 и 2.

1) Пусть матрицы $U_i(t)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ являются решениями уравнения (3) и удовлетворяют условиям

$$U_i^{(j)}(0) = \delta_{ij} I \quad (0 \leqslant i, j \leqslant n-1).$$

Тогда решение уравнения (5) с начальными условиями

$$y^{(i)}(0) = x^{(i)}(0)$$

можно записать в виде

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} U_i(t)\, x^{(i)}(0) + \int_0^t J(t, s) f[s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(n-1)}(s)]\, ds,$$

где $J(t, s)$ — матрица Коши.

Оператор

$$Ax(t) = \sum_{i=0}^{n-1} U_i(t)\, x^{(i)}(\omega) + \int_0^t J(t, s) f[s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(n-1)}(s)]\, ds$$

удовлетворяет условиям теоремы 1 при $C = I$.

2) Пусть $n = 1$, $a_1(t) \equiv 0$. Тогда оператор

$$Ax(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\{x(s) + sf[s, x(s)]\}\,ds + \int_0^{t} f[s, x(s)]\,ds$$

удовлетворяет условиям теоремы 1 при $C = 1$.

3) Пусть 1 не является собственным числом оператора V. Тогда оператор

$$Ax(t) = \int_0^{\omega} G(t, s) f[s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(n-1)}(s)]\,ds,$$

где $G(t, s)$ — функция Грина краевой задачи

$$y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t) y = g(t),$$
$$y^{(i)}(0) - y^{(i)}(\omega) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

удовлетворяет условиям теоремы 2.

Автор выражает благодарность своему руководителю М. А. Красносельскому.

Воронежский государственный университет

Поступило 2 IV 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1964. [2] Э. Коддингтон, Н. Левинсон, Теория дифференциальных уравнений, ИЛ, 1959. [3] П. С. Александров, Комбинаторная топология, М., 1947. [4] М. А. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1959. [5] М. А. Красносельский, В. В. Стрыгин, ДАН, 152, № 3 (1963). [6] М. А. Красносельский, ДАН, 152, № 4 (1963). [7] В. В. Стрыгин, Докл. АН ТаджССР, 7, 7 (1964).