Ю. В. Осипов, p-адическое преобразование Фурье, *УМН*, 1979, том 34, выпуск 5, 227–228

p-АДИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Ю. В. Осипов

К настоящему времени имеется много работ по p-адическому гармоническому анализу (см., например, [1] и цитированную там литературу). Однако рассматриваемое в [1] p-адическое преобразование Фурье обладает следующими двумя свойствами, отсутствующими в классической ситуации: как отображение из некоторого p-адического аналога пространства суммируемых функций в пространство p-адически-значных непрерывных функций, оно не является инъективным, а после факторизации по ядру превращается в сюрьективное изометрическое отображение. В нашей статье предлагается другой вариант p-адического преобразования Фурье, для которого справедливы основные теоремы классического анализа. В определении преобразования Фурье вместо меры Хаара используется мера μ_ε, играющая важную роль при построении интегрального представления дзета-функции Куботы — Леопольдта.

Известно, что кольцо целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ содержит мультипликативную группу корней из единицы степени $p-1$. Фиксируем один такой корень $\varepsilon \neq 1$. Конечно-аддитивную меру μ_ε определим на элементарных множествах формулой

$$\mu_\varepsilon (a+p^n\mathbb{Z}_p)=\frac{\varepsilon^a}{1-\varepsilon} \qquad (0\leqslant a<p^n;\quad n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Пусть $C(\mathbb{Z}_p)$ обозначает $\mathbb{Q}_p$-линейное пространство непрерывных функций $f\colon \mathbb{Z}_p\to\mathbb{Q}_p$ с нормой $\|f\|=\max\{|f(x)|_p\colon x\in\mathbb{Z}_p\}$, где $|\cdot|_p$ — p-адическое нормирование поля $\mathbb{Q}_p$, $|p|_p=1/p$; $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ — p-адическая экспонента.

p-адическое преобразование Фурье функции $f\in C(\mathbb{Z}_p)$ определим формулой

$$Ff(x)=\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(t)\, e^{-pxt}\, d\mu_\varepsilon(t).$$

Теорема 1. 1) *Отображение* $F\colon C(\mathbb{Z}_p)\to C(\mathbb{Z}_p)$ *непрерывно и инъективно.*

2) *Образ* F *плотен в* $C(\mathbb{Z}_p)$ *и не совпадает с* $C(\mathbb{Z}_p)$. (*Он состоит из функций, раскладывающихся в специальные степенные ряды.*)

Сверткой двух функций $f, g\in C(\mathbb{Z}_p)$ будем называть функцию, заданную первоначально на плотном в $\mathbb{Z}_p$ множестве неотрицательных целых чисел формулой

$$f*g(n)=\sum_{k=0}^{n} f(k)\, g(n-k),$$

и затем продолженную по непрерывности на все $\mathbb{Z}_p$. Такая функция существует и единственна. Операция свертки непрерывна, коммутативна, ассоциативна и линейна по каждому множителю.

Пусть $M(\mathbb{Z}_p)$ — пространство всех p-адических мер на $\mathbb{Z}_p$, порождающих линейные непрерывные функционалы на $C(\mathbb{Z}_p)$. Для $\mu, \nu\in M(\mathbb{Z}_p)$, $f\in C(\mathbb{Z}_p)$ определим $\mu*\nu$, $f\mu$, как обычно, формулами

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p}\varphi(t)\,d(\mu*\nu)(t)=\int\limits_{\mathbb{Z}_p}\int\limits_{\mathbb{Z}_p}\varphi(x+y)\,d\mu(x)\,d\nu(y),$$

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p}\varphi(t)\,d(f\mu)(t)=\int\limits_{\mathbb{Z}_p}\varphi(x)f(x)\,d\mu(x).$$

Теорема 2. $(f\mu_\varepsilon)*(g\mu_\varepsilon)=(f*g)\mu_\varepsilon$ *для* $f, g\in C(\mathbb{Z}_p)$.

В доказательстве теоремы 2 используется специальное свойство свертки непрерывных p-адических функций.

Лемма 1. *$(f*g)(-1)=0$ для $f, g \in C(\mathbb{Z}_p)$.*

Из теоремы 2 и обычных свойств экспоненты следует мультипликативность p-адического преобразования Фурье.

Теорема 3 *$F(f*g) = Ff\cdot Fg$ для $f, g \in C(\mathbb{Z}_p)$.*

Пусть $F1$ — p-адическое преобразование Фурье функции, тождественно равной 1 на $\mathbb{Z}_p$, $\overline{F}f(x)=\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(t)\, e^{pxt}\, d\mu_\varepsilon(t)$ $(f\in C(\mathbb{Z}_p))$.

Теорема 4. *Для любой $f \in C(Z_p)$*

$$\overline{F}Ff(x)=\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(s)\, F1\,(s-x)\, d\mu_\varepsilon(s).$$

В классической ситуации преобразования Фурье на прямой $F1 = \delta$ — дельта-функция Дирака, поэтому $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)\delta(s-x)ds = f(x)$. Следовательно, формула теоремы 4 есть p-адический аналог формулы обращения классического преобразования Фурье.

Определим на $C(\mathbb{Z}_p)$ два скалярных произведения

$$(f, g)=\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)\, g(x)\, d\mu_\varepsilon(x), \quad [f, g]=\int\limits_{\mathbb{Z}_p} (f*g)(x)\, F1(x)\, d\mu_\varepsilon(x).$$

Теорема 5. *Для любых $f, g \in C(\mathbb{Z}_p)$ 1) $(Ff, g) = (f, Fg)$; 2) $(Ff, Fg) = [f, g]$ (p-адический аналог формулы Парсеваля).*

Лемма 2. *Пусть $P_k(x)=\frac{x(x-1)\ \dots\ (x-k+1)}{k!}$. Тогда*

$$FP_k(x)=\frac{\varepsilon^{-1}e^{px}}{(\varepsilon^{-1}e^{px}-1)^{k+1}}.$$

Хорошо известно, что любую функцию $f\in C(\mathbb{Z}_p)$ можно представить в виде ряда $f=\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_kP_k$, где $c_k\to 0$ при $k\to\infty$. Из непрерывности p-адического преобразования Фурье следует, что

$$Ff(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, \frac{\varepsilon^{-1}e^{px}}{(\varepsilon^{-1}e^{px}-1)^{k+1}}=\sum_{n=1}^{\infty} a_nz^n, \qquad z=\frac{1}{1-\varepsilon e^{-px}}.$$

(Последнее равенство нужно рассматривать как определение коэффициентов a_n.)

Теорема 6. *Банахова алгебра (относительно свертки) $C(\mathbb{Z}_p)$ изометрически изоморфна алгебре A степенных рядов вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nz^n, \quad \text{где} \quad a_n\in\mathbb{Q}_p, \quad |a_n|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_nz^n\right\|=\max_{(n)} |a_n|_p.$$

Теорема 7. *Если $f, g\in C(\mathbb{Z}_p)$, $f=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nP_n$, $g=\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_nP_n$, $f*g=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nP_n$, то*

$$c_0=a_0b_0, \quad c_n=\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}+\sum_{k=0}^{n-1} a_kb_{n-1-k} \quad (n\geqslant 1).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Fresnel, B. de Mathan, Transformation de Fourier p-adique, Astérisque 24—25 (1975), 139—155.

Поступило в Правление общества 12 ноября 1978 г.