В. В. Белов, А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов, Квазиклассическое траекторно-когерентное приближение для уравнения типа Хартри,
ТМФ, 2002, том 130, номер 3, 460–492

https://www.mathnet.ru/tmf313

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 130, № 3
март, 2002

 В. В. Белов*, А. Ю. Трифонов†, А. В. Шаповалов‡

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ТРАЕКТОРНО-КОГЕРЕНТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ХАРТРИ

На основе комплексного метода ВКБ–Маслова построены квазиклассически сосредоточенные решения для уравнения типа Хартри. Формальные асимптотические по малому параметру $\hbar$, $\hbar \to 0$, решения задачи Коши для этого уравнения построены со степенной точностью $O(\hbar^{N/2})$, где $N \geqslant 3$ – любое натуральное число. Существенную роль при построении квазиклассически сосредоточенных решений играет выведенная в работе система уравнений Гамильтона–Эренфеста (система уравнений для средних и центрированных моментов). В классе квазиклассически сосредоточенных решений уравнения типа Хартри построена приближенная функция Грина и сформулирован нелинейный принцип суперпозиции.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе под уравнением типа Хартри понимается уравнение вида

$$(-i\hbar\partial_t + \widehat{\mathcal{H}}_\varkappa)\Psi = 0, \qquad \Psi \in L_2(\mathbb{R}^n_x), \tag{1.1}$$

где оператор типа Хартри $\widehat{\mathcal{H}}_\varkappa$ действует по формуле

$$\widehat{\mathcal{H}}_\varkappa \Psi = (\widehat{\mathcal{H}}(t) + \varkappa \widehat{V}(t,\Psi))\Psi. \tag{1.2}$$

Здесь

$$\widehat{\mathcal{H}}(t) = \mathcal{H}(\hat{z},t), \qquad \widehat{V}(t,\Psi) = \int_{\mathbb{R}^n} dy\, \Psi^*(y,t) V(\hat{z},\widehat{w},t)\Psi(y,t), \tag{1.3}$$

самосопряженные в L_2 операторы $\mathcal{H}(\hat{z},t)$, $V(\hat{z},\widehat{w},t)$ являются функциями от некоммутирующих операторов $\hat{z} = (-i\hbar\partial/\partial x, x)$, $\widehat{w} = (-i\hbar\partial/\partial y, y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ и упорядочены

---

*Московский институт электроники и математики, Москва, Россия.
E-mail: belov@amath.msk.ru

†Томский политехнический университет, Томск, Россия. E-mail: trifonov@phtd.tpu.edu.ru

‡Томский государственный университет, Томск, Россия. E-mail: shpv@phys.tsu.ru

по Вейлю [1], [2], функция Ψ^* – комплексно-сопряженная к функции Ψ, $\varkappa$ – вещественный параметр, $\hbar$ – "малый" параметр, $\hbar \in [0,1)$. Для операторов $\hat{z}$ и $\widehat{w}$ справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$[\hat{z}_k, \hat{z}_j] = [\widehat{w}_k, \widehat{w}_j] = i\hbar J_{kj}, \qquad [\hat{z}_k, \widehat{w}_j] = 0, \quad k, j = 1, \dots, 2n,$$

где $J = \|J_{kj}\|$ – стандартная симплектическая матрица размерности $2n \times 2n$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь E_n – единичная $(n \times n)$-матрица, 0 – нулевая матрица порядка n.

В частном случае, когда вейлевские символы операторов в (1.3) имеют вид

$$\mathcal{H}(z,t) = \frac{p^2}{2} + U(x,t), \quad p \in \mathbb{R}^n, \qquad V(z,w,t) = V(x,y,t),$$

уравнение (1.1) записывается как

$$\hat{\mathcal{L}}\Psi = -i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2}\Delta\Psi + \left(U(x,t) + \varkappa\int_{\mathbb{R}^n} V(x,y,t)|\Psi(y,t)|^2\,dy\right)\Psi = 0 \tag{1.4}$$

и называется в квантовой механике нестационарным уравнением типа Хартри во внешнем поле с потенциалом $U(x,t)$ ($V(x,y,t)$ – потенциал самосогласованного поля).

Это дифференциальное уравнение с интегральной нелинейностью играет фундаментальную роль в квантовой теории и нелинейной оптике. В задачах квантовой механики и ядерной физики при исследовании взаимодействия систем многих частиц в приближении Хартри (см., например, [3]–[9]) потенциал $V(x,y,t)$ имеет, как правило, сингулярности, в частности, в обычном уравнении Хартри [10] – сингулярности кулоновского типа. Уравнение (1.4) с гладким интегральным ядром возникает при описании взаимодействия бозонов с формфактором в потенциале взаимодействия [11], фермионов в модели Тирринга [12], коллективных возбуждений в молекулярных цепочках [13], в сверхтекучих квантовых жидкостях и в неидеальном бозе-газе [14]. Это же уравнение появляется и в задачах квантовой теории нелинейных оптических явлений, например, при изучении "сжатого" [15] или "остановленного" [16] света, при описании распространения коротких и мощных импульсов в нелинейной среде с учетом вклада молекулярных колебаний в нелинейную поляризацию этой среды [17].

Математическая теория уравнения (1.4) (задача Коши) развита в работах [18]–[28]. Важные результаты получены также в спектральной теории этого уравнения [29]–[44]. Теория квазиклассического приближения при $\hbar \to 0$ для нелинейных уравнений типа уравнения (1.4) начала систематически разрабатываться в работах [45]–[47]. При этом предполагалось, что интегральное ядро в потенциале взаимодействия в (1.4) достаточно гладкое. Для этого случая в статье [46] построена формальная квазиклассическая асимптотика задачи Коши с быстроосциллирующими начальными условиями. Для соответствующих спектральных задач квазимоды, сосредоточенные вблизи точки, были впервые найдены в работах [46], [48], [49]. Асимптотические решения, локализованные в окрестности незамкнутых кривых, для стационарного уравнения (1.4) были построены в [50], [51]. Случай сингулярного ядра взаимодействия в квазиклассической асимптотике спектра этого уравнения активно исследовался в [47] и затем в [52]–[54]. Интересные результаты о квазимодах уравнения вида (1.4), сосредоточенных при $\hbar \to 0$ вблизи маломерных подмногообразий, были получены в [55], [56] на основе "сингулярного" варианта ВКБ-метода, разработанного в [54]. Наконец, отметим, что уравнения вида (1.1) (с симметричным символом интегрального "операторного" ядра в (1.3): $V(z, w, t) = V(w, z, t)$) играют важную роль при построении асимптотических решений для N-частичного уравнения Шредингера при $N \to \infty$ [57], [58].

В данной работе для уравнения (1.1) (с гладкими вейлевскими символами в операторе (1.2)) мы строим локализованные асимптотические при $\hbar \to 0$ решения – "квазисолитоны", обладающие рядом свойств, присущих уединенным волнам.

В линейном случае – для уравнения типа Шредингера (уравнение (1.1) при $\varkappa = 0$) – подобные локализованные асимптотические решения были построены в [59]– [62] и получили название "квазиклассически сосредоточенных" решений (или состояний). В работах [61]–[65] такие состояния были построены для уравнений Клейна–Гордона и Дирака в произвольном электромагнитном поле и для уравнений Шредингера и Дирака во внешнем неабелевом поле с калибровочной группой $SU(2)$. Квазиклассически сосредоточенные состояния являются обобщением хорошо известных (сжатых) когерентных состояний [66]–[72] на случай (линейных) уравнений квантовой механики в произвольных внешних полях. На их основе в работах [61], [62], [73]–[75] был развит новый ковариантный подход в квазиклассическом приближении для нерелятивистских уравнений квантовой механики. Суть этого подхода состоит в том, что в классе квазиклассически сосредоточенных состояний средние значения наблюдаемых приближенно (с любой степенью точности $O(\hbar^{(N+1)/2})$, $\hbar \to 0$, $N \geqslant 0$) определяются по решению конечномерной аппроксимации порядка N системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно квантовых средних базисного набора наблюдаемых теории (в случае, например, уравнения типа Шредингера этот базисный набор является универсальной обертывающей алгебры Гейзенберга–Вейля). Такая система для уравнения Шредингера была впервые получена в статье [73] (для более общих случаев – в работах [64], [65], [74]–[77]) и названа системой Гамильтона–Эренфеста. В работах [76], [77] было доказано, что она является пуассоновой системой относительно (вырожденной) нелинейной скобки Дирака.

Оказывается, что при построении локализованных асимптотических решений для уравнения типа Хартри (по аналогии с линейным случаем мы их будем называть *квазиклассически сосредоточенными* решениями или состояниями, имея в виду квантово-механическую версию уравнения (1.1)) на основе ковариантного подхода удается линеаризовать это уравнение с любой степенной точностью по параметру $\hbar$, $\hbar \to 0$, и применить затем квазиклассические методы, развитые для линейных уравнений, в частности, комплексный метод ВКБ (метод комплексного ростка Маслова) [48], [78].

Для уединенных волн ("квазисолитонов") характерно проявление свойств, присущих частицам. Для "квазисолитонов" – квазиклассически сосредоточенных состояний уравнения типа Хартри – эти свойства представлены ниже динамической системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно "квантовых" средних $X(t,\hbar)$, $P(t,\hbar)$ операторов координат $\hat{x}$ и импульсов $\hat{p}$ и центрированных моментов высших порядков. Такая система ранее в литературе не рассматривалась. В пределе $\hbar\to 0$ "центр тяжести" такого "квазисолитона" движется в фазовом пространстве по траектории этой динамической системы: в каждый момент времени квазиклассически сосредоточенное состояние эффективно сосредоточено в окрестности точки $X(t,0)$ (в x-представлении) и в окрестности точки $P(t,0)$ (в p-представлении). Эту систему[1)] относительно квантовых средних для уравнения типа Хартри мы, так же как и в линейном случае, называем *системой Гамильтона–Эренфеста.*

Отметим, наконец, следующий важный факт. В отличие от (линейного) уравнения типа Шредингера в самой конструкции квазиклассически сосредоточенных состояний уравнения типа Хартри существенно используются решения системы Гамильтона–Эренфеста. Проиллюстрируем этот факт на примере эволюции многомерного (сжатого) когерентного состояния. В этом случае в уравнении (1.4) внешний потенциал $U(x,t)$ и потенциал самосогласованного поля $V(x,y,t)$ – гладкие (бесконечно дифференцируемые) функции по всем своим аргументам, растущие на бесконечности (при $|x|\to\infty$, $|y|\to\infty$) не быстрее некоторой степени относительно $|x|$, $|y|$ равномерно по $t\in\mathbb{R}$. Здесь и далее $|.|$ обозначает евклидову норму векторов соответствующей размерности.

Для уравнения (1.4) рассмотрим задачу Коши с начальным условием в виде гауссова пакета,

$$\Psi|_{t=0}=\Psi_0(x,\hbar)=N_0 e^{\frac{i}{\hbar}\langle p_0,x-x_0\rangle}e^{\frac{i}{\hbar}\langle (x-x_0),B_0(x-x_0)\rangle}, \tag{1.5}$$

где (p_0,x_0) – произвольная точка фазового пространства $\mathbb{R}^{2n}_{p,x}$, B_0 – комплексная симметричная матрица размерности $n\times n$ с положительной мнимой частью,

$$B_0^t=B_0,\qquad \operatorname{Im}B_0=\frac{B_0-B_0^+}{2i}>0, \tag{1.6}$$

нормировочная постоянная $N_0=(\pi\hbar)^{-n/4}(\det\operatorname{Im}B_0)^{1/4}$. Здесь и далее индексы t и $+$ означают транспонирование и эрмитово сопряжение, соответственно, а скобки $\langle,\rangle$ – евклидово скалярное произведение векторов.

Уравнению (1.4) сопоставим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (систему Гамильтона–Эренфеста порядка $N=2$) относительно фазовых переменных $(p,x)\in\mathbb{R}^{2n}_{p,x}$ и вещественной $(2n\times 2n)$-матрицы дисперсий Δ_2, составленной из блоков – $(n\times n)$-матриц $\sigma_{pp}=\sigma_{pp}^t$, $\sigma_{xx}=\sigma_{xx}^t$, $\sigma_{px}=\sigma_{xp}^t$,

$$\Delta_2=\begin{pmatrix}\sigma_{pp} & \sigma_{px}\\ \sigma_{xp} & \sigma_{xx}\end{pmatrix}.$$

[1)] Свойство гамильтоновости этой системы является предметом отдельного исследования.

Эта система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = p, \\ \dot{p} = -\nabla_x \varphi^{\varkappa}(x,y,t)|_{y=x} - \dfrac{1}{2}\nabla_x \operatorname{Sp}(\sigma_{xx}(\varphi^{\varkappa}_{xx}(x,y,t) + \varphi^{\varkappa}_{yy}(x,y,t)))|_{y=x}, \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\dot{\Delta}_2 = JM\Delta_2 - \Delta_2 MJ, \tag{1.8}$$

где

$$\varphi^{\varkappa}(x,y,t) = U(x,t) + \varkappa V(x,y,t)$$

и $(2n \times 2n)$-матрица

$$M = M^{\varkappa}(x,t) = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & \varphi^{\varkappa}_{xx}(x,y,t)|_{y=x} \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Здесь $\varphi^{\varkappa}_{xx}, \varphi^{\varkappa}_{yy}$ – $(n \times n)$-матрицы вторых производных,

$$\varphi^{\varkappa}_{yy}(x,y,t) = \left(\frac{\partial^2 \varphi^{\varkappa}}{\partial y_i \partial y_j}\right) = \varkappa\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_j}\right)(x,y,t).$$

Начальное условие $\Psi_0(x,\hbar)$ (1.5) индуцирует начальные данные для системы (1.7), (1.8)

$$x|_{t=0} = x_0, \quad p|_{t=0} = p_0 \tag{1.7a}$$

и

$$\Delta|_{t=0} = \Delta_2^{\Psi_0}(\hbar), \tag{1.8a}$$

где $\Delta_2^{\Psi_0}(\hbar)$ – матрица квантовых центрированных моментов второго порядка для операторов $(-i\hbar\partial/\partial x, x) = \hat{z}$ в состоянии $\Psi_0(x,\hbar)$. Таким образом, имеем

$$\sigma_{xx}(0) = \sigma_{xx}(\Psi_0), \qquad \sigma_{pp}(0) = \sigma_{pp}(\Psi_0), \qquad \sigma_{px}(0) = \sigma_{px}(\Psi_0), \qquad \sigma_{xp}(0) = \sigma^t_{px}(0),$$

где

$$\sigma_{AB}(\Psi_0) = \frac{1}{2}(\langle(\hat{A}\widehat{B} + \widehat{B}\hat{A})\rangle - \langle\hat{A}\rangle\langle\widehat{B}\rangle)$$

и через $\langle\hat{A}\rangle$ обозначено среднее значение оператора $\hat{A}$ с символом A в состоянии Ψ_0: $\langle\hat{A}\rangle = \langle\Psi_0|\hat{A}|\Psi_0\rangle$, где $\langle|\rangle$ – скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Нетрудно вычислить квантовые средние в состоянии $\Psi_0(x,\hbar)$ (1.5),

$$\sigma_{xx}(0) = \frac{\hbar}{2}D_0^{-1}, \qquad \sigma_{pp}(0) = \frac{\hbar}{4}(B_0 D_0^{-1} B_0^* + B_0^* D_0^{-1} B_0), \qquad \sigma_{px}(0) = \frac{\hbar}{4}(B_0 + B_0^*)D_0^{-1},$$

где $D_0 = \operatorname{Im} B_0$ и знак $*$ означает комплексное сопряжение.

Обозначим через $y(t,\hbar) = (P(t,\hbar), X(t,\hbar), \Delta_2(t,\hbar))$ решение задачи Коши (1.7), (1.8) и (1.7a), (1.8a) на интервале $[0,T]$, $T > 0$, гладко зависящее от малого параметра $\hbar$,

$\hbar \to 0$, входящего в начальное условие (1.8a): $\Delta_2^{\Psi_0}(\hbar) = O(\hbar)$. Оказывается, что для построения *главного члена квазиклассической асимптотики* ($\hbar \to 0$) исходной квантовой задачи (1.4), (1.5) достаточно найти *главный член разложения в ряд регулярной теории возмущений* по $\hbar \to 0$ решения соответствующей задачи Коши для системы Гамильтона–Эренфеста (1.7), (1.8),

$$y(t,\hbar) = y^0(t,\hbar) + \hbar y^1(t,\hbar) + \cdots ,$$

где $y^0(t,\hbar) = (P^0(t), X^0(t), \Delta^0(t,\hbar,\Psi_0))$, причем $\Delta^0(t,\hbar) = O(\hbar)$, $\hbar \to 0$ и $P^0(0) = p_0$, $X^0(0) = x_0$, $\Delta^0(0,\hbar) = \Delta_2^{\Psi_0}(\hbar)$. Очевидно, что с точностью до членов порядка $O(\hbar)$, $\hbar \to 0$, система (1.7), (1.8) расцепляется в том смысле, что матрица "дисперсий" $\Delta^0(t,\hbar)$ не влияет на фазовую траекторию $(P^0_\varkappa(t), X^0_\varkappa(t))$, $t \in [0,T]$, которая определяется решением системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = p, \\ \dot{p} = -\nabla_x \varphi^\varkappa(x,y,t)|_{y=x} \end{cases} \tag{1.10}$$

с начальными данными (1.7a), а $\Delta^0(t,\hbar)$ – решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt}\Delta^0 = JM^\varkappa(t)\Delta^0 - \Delta^0 M^\varkappa(t)J, \tag{1.11}$$

$$\Delta^0|_{t=0} = \Delta_2^{\Psi_0}(\hbar), \tag{1.11a}$$

где с учетом (1.9)

$$M^\varkappa(t) = M^\varkappa(X^0_\varkappa(t),t) = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & \varphi^\varkappa_{xx}(X^0_\varkappa(t), X^0_\varkappa(t), t) \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Решение последней задачи Коши для нелинейного уравнения (1.11) заменой

$$\Delta^0(t,\hbar,\Psi_0) = \Phi(t)\Delta_2^{\Psi_0}(\hbar)\Phi(t) \tag{1.13}$$

сводится к построению матрицы Коши $\Phi(t)$, $\Phi(0) = E_{2n}$, для линейной гамильтоновой системы

$$\dot{a} = JM^\varkappa(t)a, \quad a \in \mathbb{C}^{2n}, \quad a = (w,z), \quad w,z \in \mathbb{C}^n. \tag{1.14}$$

Очевидно, что при $\varkappa = 0$ система (1.10) является стандартной гамильтоновой системой с функцией Гамильтона $\mathcal{H}(p,x,t) = p^2/2 + U(x,t)$, а система (1.14) – системой в вариациях [48], линеаризацией этой системы на ньютоновской классической траектории $(P^0(t) = \dot{X}^0(t), X^0(t))$. При $\varkappa \neq 0$ будем называть (допуская некоторую некорректность в терминологии) систему (1.10) и (1.14) системой Гамильтона и системой в вариациях *с самодействием*, соответственно.

Так же как и в линейной теории ($\varkappa = 0$) (см., например, [48], [62]), существенную роль в конструкции локализованных асимптотических решений задачи (1.4), (1.5) играют комплексные решения системы в вариациях с самодействием. Обозначим через $B(t)$ и $C(t)$ комплексные $(n \times n)$-матрицы – "импульсные" и "координатные" составляющие матричного решения системы (1.14),

$$\begin{pmatrix} \dot{B} \\ \dot{C} \end{pmatrix} = JM^{\varkappa}(t) \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \dot{C} = B, \\ \dot{B} = -\varphi^{\varkappa}_{xx}(X^0_{\varkappa}(t), X^0_{\varkappa}(t), t)C, \end{array} \tag{1.15}$$

удовлетворяющие начальным данным

$$B|_{t=0} = B_0, \qquad C|_{t=0} = E_n. \tag{1.16}$$

В силу свойства гамильтоновости системы уравнений (1.15) и свойств матрицы B_0 (1.6) матрица $C(t)$, $t \in [0,T]$, невырожденна, так что определена симметричная матрица $BC^{-1}(t)$ с положительной мнимой частью, $\operatorname{Im} BC^{-1}(t) > 0$ (детали доказательства см., например, в [48]).

Определим функцию

$$\Psi(x,t,\hbar) = N_0 e^{\frac{i}{\hbar} S^{\varkappa}(x,t,\hbar)} (\det C(t))^{-1/2}, \tag{1.17}$$

где комплексная фаза $S^{\varkappa}(x,t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} S^{\varkappa}(x,t,\hbar) = \int_0^t \big\{ &\langle P^0_{\varkappa}(\tau), \dot{X}^0_{\varkappa}(\tau)\rangle - \mathcal{H}(P^0_{\varkappa}(\tau), X^0_{\varkappa}(\tau), \tau) + \varkappa V_y(X^0_{\varkappa}(\tau), X^0_{\varkappa}(\tau), \tau) + \\ &+ \varkappa \frac{1}{2} \operatorname{Sp}(\sigma_{xx}(\tau,\hbar,\psi_0) V''_{yy}(X^0_{\varkappa}(\tau), X^0_{\varkappa}(\tau), \tau))\big\}\, d\tau + \\ &+ \langle P^0_{\varkappa}(t), x - X^0_{\varkappa}(t)\rangle + \langle x - X^0_{\varkappa}(t), BC^{-1}(t)(x - X^0_{\varkappa}(t))\rangle. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Здесь $\mathcal{H}(p,x,t) = p^2/2 + U(x,t)$, $\sigma_{xx}(t,\hbar,\psi_0)$ – нижний правый блок матрицы "дисперсий" $\Delta^0(t,\hbar,\psi_0)$.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены сформулированные выше условия на потенциалы* $U(x,t)$, $V(x,y,t)$ *и пусть на интервале* $[0,T]$ *существует гладкое решение задачи* (1.10), (1.7а). *Тогда при* $t \in [0,T]$ *функция* $\Psi(x,t,\hbar)$ (1.17) *является формальным асимптотическим* $(\operatorname{mod} \hbar^{3/2},\ \hbar \to 0)$ *решением задачи* (1.4), (1.5),

$$\hat{\mathcal{L}}(\Psi(x,t,\hbar)) = O(\hbar^{3/2}), \qquad \Psi(x,t,\hbar)|_{t=0} = \Psi_0(x,\hbar),$$

где через $O(\hbar^{3/2})$ *обозначена гладкая функция* $g(x,t,\hbar)$ – *"невязка" уравнения* (1.2) *в* L_2*-норме,* $\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|g(x,t,\hbar)\|_{L_2} = O(\hbar^{3/2})$ *при* $\hbar \to 0$.

Доказательство теоремы следует из общих конструкций (см. ниже раздел 5).

Замечание 1.1. В рассмотренном выше примере $(n\times n)$-блок $\sigma_{xx}(t,\hbar,\Psi_0)$ матрицы "дисперсий" $\Delta^0(t,\hbar,\Psi_0)$, определяющий в фазе $S^{\varkappa}(x,t,\hbar)$ (1.18) поправку порядка $\hbar$, $\hbar\to 0$, несложно вычислить через матрицу $C(t)$, если матрицу Коши системы (1.14) записать в виде

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix} B(t) & B^*(t)\\ C(t) & C^*(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_0 & B_0^*\\ E_n & E_n\end{pmatrix}^{-1},$$

воспользоваться формулой (1.13) и явным видом матрицы дисперсий $\Delta_2^{\Psi_0}(\hbar)$. В результате несложных, но громоздких вычислений получим

$$\sigma_{xx}(t,\hbar,\Psi_0)=\frac{\hbar}{4}\big(C(t)D_0^{-1}C^+(t)+C^*(t)D_0^{-1}C^t(t)\big), \tag{1.19}$$

где $D_0=\operatorname{Im}B_0$.

Таким образом, квазиклассически сосредоточенное состояние $\Psi(x,t,\hbar)$ (1.17), приближенно (mod $\hbar^{3/2}$ при $\hbar\to 0$) описывающее эволюцию начального сжатого когерентного состояния для уравнения вида (1.4), определяется в силу теоремы 1.1 решениями двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений: нелинейной системы Гамильтона с самодействием (1.10) и соответствующей ей линейной гамильтоновой системы в вариациях (1.14).

Специфика уравнения типа Хартри, в котором нелинейность присутствует только под знаком интеграла, проявляется в том, что оно обладает рядом свойств, присущих линейным уравнениям. Так, в частности, удалось показать, что в классе квазиклассически сосредоточенных решений для этого уравнения (с заданной степенью точности по $\hbar$, $\hbar\to 0$) справедлив *нелинейный принцип суперпозиции.*

В рамках рассматриваемого подхода построены асимптотические решения задачи Коши для этого уравнения, а также найден оператор эволюции в классе траекторно-сосредоточенных функций со степенной точностью до любого конечного порядка по малому параметру $\sqrt{\hbar}$ при $\hbar\to 0$.

Подчеркнем, что всюду в данной работе речь идет о построении формальных асимптотических решений уравнения типа Хартри с невязкой, норма которой имеет сколь угодно малую оценку по параметру $\hbar$, $\hbar\to 0$. Обоснование этих асимптотик на конечных временах $t\in[0,T]$, $T=\text{const}$, представляет собой отдельную непростую математическую задачу[2)]. Эта задача связана с получением априорных оценок для решения нелинейного уравнения типа Хартри, равномерных по параметру $\hbar\in(0,1]$. В данной работе такая задача не рассматривается. Из эвристических соображений, приведенных в работе [47], вытекает, что оценка разности между точным и формально построенным асимптотическим решениями, по-видимому, может быть получена с использованием методов, развитых в работах [47], [81].

План дальнейшего изложения следующий. Во втором разделе дана постановка задачи о построении квазиклассических асимптотик в классе траекторно-сосредоточенных

[2)] Формальная асимптотика по t, $t\to\infty$, и фиксированном $\hbar=1$ для уравнения (1.4) была построена в случае специальных классов потенциалов в ряде работ (см., например, [79], [80]).

функций и рассмотрены их простейшие свойства. В разделе 3 получена система Гамильтона–Эренфеста, описывающая “частицеподобные” свойства квазиклассически сосредоточенных решений уравнения типа Хартри. В разделе 4 уравнение типа Хартри линеаризовано с помощью решений системы Гамильтона–Эренфеста и получена система ассоциированных линейных уравнений, определяющих асимптотическое решение исходной задачи. В пятом разделе с точностью $O(\hbar^{3/2})$ исследуется динамика фоковских состояний уравнения типа Хартри и получен главный член квазиклассической асимптотики этого уравнения. Квазиклассически сосредоточенные решения (общий случай) для уравнения Хартри построены с точностью до $O(\hbar^{3/2})$ в разделе 6, а с любой степенной точностью по параметру $\sqrt{\hbar}$ при $\hbar \to 0$ – в разделе 7. В восьмом разделе найден приближенный оператор эволюции уравнения типа Хартри. Там же дано обоснование нелинейного принципа суперпозиции в классе квазиклассически сосредоточенных решений. В приложении дано обоснование основных свойств траекторно-сосредоточенных функций.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В КЛАССЕ КВАЗИКЛАССИЧЕСКИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Построение асимптотических решений уравнения типа Хартри проведем при следующем предположении о свойствах вейлевских символов операторов $\mathcal{H}(\hat{z},t)$ и $V(\hat{z},\widehat{w},t)$ в (1.1):

Предположение 2.1. Функции $\mathcal{H}(z,t)$ и $V(z,w,t)$ являются C^∞-гладкими функциями и вместе со всеми своими производными по z и w растут при $|z|\to\infty$ и $|w|\to\infty$ не быстрее, чем полином, равномерно по $t\in\mathbb{R}$, т.е. для любых мультииндексов $\alpha,\beta,\mu,\nu\in\mathbb{Z}_+^{2n}$ и $T>0$ существуют постоянные $C_\beta^\alpha(T)$ и $C_{\beta\nu}^{\alpha\mu}(T)$ такие, что выполняются неравенства

$$\left|z^\alpha\frac{\partial^{|\beta|}\mathcal{H}(z,t)}{\partial z^\beta}\right| \leqslant C_\beta^\alpha(T),$$
$$\left|z^\alpha w^\mu\frac{\partial^{|\beta+\nu|}V(z,w,t)}{\partial z^\beta\partial w^\nu}\right| \leqslant C_{\beta\nu}^{\alpha\mu}(T), \qquad z,w\in\mathbb{R}^{2n}, \quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Здесь

$$\frac{\partial^{|\alpha|}V(z)}{\partial z^\alpha}=\frac{\partial^{|\alpha|}V(z)}{\partial z_1^{\alpha_1}\partial z_2^{\alpha_2}\dots\partial z_{2n}^{\alpha_{2n}}}, \quad \alpha_j\in\mathbb{Z}_+, \qquad j=1,\dots,2n,$$
$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{2n}), \qquad |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{2n}, \qquad z^\alpha=z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}\dots z_{2n}^{\alpha_{2n}}.$$

Перейдем к описанию класса функций, в котором мы будем искать локализованные асимптотические решения уравнения (1.1). Функции этого класса, сингулярно зависящие от малого параметра $\hbar$, представляют собой обобщение понятия уединенной волны.

Они зависят от произвольной фазовой траектории $z = Z(t,\hbar) \in \mathbb{R}^{2n}_{p,x}$, $t \in \mathbb{R}^1$, и вещественнозначной функции $S(t,\hbar)$ (аналога классического действия в линейном случае при $\varkappa = 0$). В пределе $\hbar \to 0$ функции этого класса сосредоточены в окрестности точки, движущейся вдоль заданной фазовой кривой $z = Z(t,0)$. Такие функции хорошо известны в квантовой механике. К ним, в частности, относятся когерентные и "сжатые" состояния квантовых систем с квадратичным гамильтонианом [70], [71].

Обозначим этот класс функций через $\mathcal{P}^t_\hbar(Z(t,\hbar),S(t,\hbar))$ и определим его следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^t_\hbar &= \mathcal{P}^t_\hbar\big(Z(t,\hbar),S(t,\hbar)\big) = \\ &= \left\{\Phi\colon \Phi(x,t,\hbar) = \varphi\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\hbar}},t,\sqrt{\hbar}\right)\exp\left[\frac{i}{\hbar}(S(t,\hbar) + \langle P(t,\hbar),\Delta x\rangle)\right]\right\}, \qquad (2.1)\end{aligned}$$

где комплекснозначная функция $\varphi(\xi,t,\sqrt{\hbar})$ принадлежит пространству Шварца $\mathbb{S}$ по переменной $\xi \in \mathbb{R}^n$, гладким образом зависит от t и регулярно зависит от $\sqrt{\hbar}$ при $\hbar \to 0$. В соотношении (2.1) $\Delta x = x - X(t,\hbar)$, а вещественная функция $S(t,\hbar)$ и $2n$-мерная вектор-функция $Z(t,\hbar) = (P(t,\hbar),X(t,\hbar))$, характеризующие класс $\mathcal{P}^t_\hbar(Z(t,\hbar),S(t,\hbar))$, регулярно зависят от $\sqrt{\hbar}$ в окрестности $\hbar = 0$ и *подлежат определению* при $t > 0$, причем $S(0,\hbar) = 0$, $Z(0,\hbar) = z_0 = (p_0,x_0)$ – произвольная точка фазового пространства $\mathbb{R}^{2n}_{px}$.

Функции, принадлежащие классу $\mathcal{P}^t_\hbar$, в любой фиксированный момент времени $t \in \mathbb{R}^1$ *сосредоточены* в пределе $\hbar \to 0$ в окрестности точки, лежащей на фазовой кривой $z = Z(t,0)$, $t \in \mathbb{R}^1$ (точный смысл этого свойства устанавливается ниже формулами (2.6), (2.7)). Поэтому функции класса $\mathcal{P}^t_\hbar$ естественно назвать *траекторно-сосредоточенными функциями* при $\hbar \to 0$. В определение класса траекторно-сосредоточенных функций входят в качестве свободных "параметров" фазовая траектория $Z(t,\hbar)$ и скалярная функция $S(t,\hbar)$. Оказывается, что эти "параметры" однозначно определяются[3)] из системы Гамильтона–Эренфеста (см. разд. 4), отвечающей нелинейному ($\varkappa \neq 0$) гамильтониану уравнения (1.1). Отметим, что в предельном случае $\varkappa = 0$ для линейного уравнения типа Шредингера вектор-функция $Z(t,0)$ – главный член разложения по $\hbar \to 0$ – определяет фазовую траекторию гамильтоновой системы с классическим гамильтонианом $\mathcal{H}(p,x,t)$, а функция $S(t,0)$ является классическим действием вдоль этой траектории. В частности, в этом случае классу $\mathcal{P}^t_\hbar$ принадлежат хорошо известные динамические (сжатые) когерентные состояния квантовых систем с квадратичными гамильтонианами при выборе амплитуды φ в (2.1) в форме гауссовой экспоненты,

$$\varphi(\xi,t) = \exp\left[\frac{i}{2}\langle\xi,Q(t)\xi\rangle\right]f(t),$$

где $Q(t)$ – комплексная симметричная матрица с положительной мнимой частью, а временной множитель $f(t)$ определяется формулой

$$f(t) = \sqrt[4]{\det\operatorname{Im}Q(t)}\exp\left[-\frac{i}{2}\int_0^t \operatorname{Sp}\operatorname{Re}Q(\tau)\,d\tau\right]$$

[3)]Результаты, полученные в этом разделе, так же как и в разделе 3, не зависят от явного вида функций $Z(t,\hbar)$ и $S(t,\hbar)$.

(см. [61], [62]). Здесь и далее через $\operatorname{Sp} A$ обозначен след матрицы A.

Рассмотрим основные свойства функций из класса $\mathcal{P}_\hbar^t(Z(t,\hbar),S(t,\hbar))$, обоснование которых дано в приложении.

1. *Для функций класса $\mathcal{P}_\hbar^t(Z(t,\hbar),S(t,\hbar))$ справедливы следующие асимптотические оценки для центрированных моментов $\Delta_\alpha(t,\hbar)$ порядка $|\alpha|$, $\alpha\in\mathbb{Z}_+^{2n}$:*

$$\Delta_\alpha(t,\hbar)=\Delta_\alpha^\Phi(t,\hbar)=\frac{\langle\Phi|\{\Delta\hat z\}^\alpha|\Phi\rangle}{\|\Phi\|^2}=O(\hbar^{|\alpha|/2}),\qquad \hbar\to0,\quad |\alpha|\neq0, \tag{2.2}$$
$$\Delta_\alpha(t,\hbar)=1,\qquad |\alpha|=0.$$

Через $\{\Delta\hat z\}^\alpha$ обозначен оператор с вейлевским символом $(\Delta z)^\alpha$,

$$\Delta z=z-Z(t,\hbar)=(\Delta p,\Delta x),\qquad \Delta p=p-P(t,\hbar),\qquad \Delta x=x-X(t,\hbar).$$

Обозначим символом $\widehat O(\hbar^k)$, $k\geqslant 0$, оператор $\widehat F$ такой, что для любой функции Φ, принадлежащей $\mathcal{P}_\hbar^t(Z(t,\hbar),S(t,\hbar))$, справедлива асимптотическая оценка

$$\frac{\|\widehat F\Phi\|}{\|\Phi\|}=O(\hbar^k),\qquad \hbar\to0. \tag{2.3}$$

2. *Для функций, принадлежащих $\mathcal{P}_\hbar^t(Z(t,\hbar),S(t,\hbar))$, справедливы следующие асимптотические оценки:*

$$\big\{-i\hbar\partial_t-\dot S(t,\hbar)+\langle P(t,\hbar),\dot X(t,\hbar)\rangle+\langle\dot Z(t,\hbar),J\Delta\hat z\rangle\big\}=\widehat O(\hbar), \tag{2.4}$$
$$\{\Delta\hat z\}^\alpha=\widehat O(\hbar^{|\alpha|/2}),\qquad \alpha\in\mathbb{Z}_+^{2n},\quad \hbar\to0,$$

и, в частности,

$$\Delta\hat x_k=\widehat O(\sqrt\hbar),\qquad \Delta\hat p_j=\widehat O(\sqrt\hbar),\quad k,j=1,\dots,n. \tag{2.5}$$

Следующее свойство придает точный смысл понятию сосредоточенности при $\hbar\to0$ в окрестности точки на фазовой траектории для функций из класса $\mathcal{P}_\hbar^t$.

3. *Для любой функции $\Phi(x,t,\hbar)\in\mathcal{P}_\hbar^t(Z(t,\hbar),S(t,\hbar))$ справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{\hbar\to0}\frac{1}{\|\Phi\|^2}|\Phi(x,t,\hbar)|^2=\delta(x-X(t,0)), \tag{2.6}$$
$$\lim_{\hbar\to0}\frac{1}{\|\tilde\Phi\|^2}|\tilde\Phi(p,t,\hbar)|^2=\delta(p-P(t,0)), \tag{2.7}$$

где $\tilde\Phi(p,t,\hbar)=F_{\hbar,x\to p}\Phi(x,t,\hbar)$, $F_{\hbar,x\to p}$ – “$\hbar$”-преобразование Фурье [1].

4. *Обозначим через* $\langle\hat{L}(t)\rangle$ *среднее значение самосопряженного в* $L_2(\mathbb{R}^n_x)$ *оператора* $\hat{L}(t)$, $t\in\mathbb{R}^1$, *вычисленное по функции* $\Phi(x,t,\hbar)\in\mathcal{P}^t_\hbar$. *Тогда для любой функции* $\Phi(x,t,\hbar)\in\mathcal{P}^t_\hbar(Z(t,\hbar),S(t,\hbar))$ *и любого оператора* $\hat{A}(t,\hbar)$, *вейлевский символ которого* $A(z,t,\hbar)$ *удовлетворяет предположению* 2.1, *справедливо равенство*

$$\lim_{\hbar\to0}\langle\hat{A}(t,\hbar)\rangle=\lim_{\hbar\to0}\frac{1}{\|\Phi\|^2}\langle\Phi(x,t,\hbar)\,|\,\hat{A}(t,\hbar)\,|\,\Phi(x,t,\hbar)\rangle=A(Z(t,0),t,0). \tag{2.8}$$

По аналогии с линейной теорией [62] дадим следующее определение.

Определение 2.1. Решение $\Phi(x,t,\hbar)$ уравнения (1.1) в классе функций $\mathcal{P}^t_\hbar$ назовем квазиклассически сосредоточенным при $\hbar\to0$ на фазовой траектории $Z(t,\hbar)$.

Предельный характер условий (2.6), (2.7) и асимптотический характер оценок (2.2)–(2.5), справедливых в классе траекторно-сосредоточенных функций, позволяют строить квазиклассически сосредоточенные решения уравнения типа Хартри *не точно*, а *приближенно*. При этом L_2-норма погрешности имеет порядок $\hbar^\alpha$, $\alpha>1$, при $\hbar\to0$ на любом конечном временном интервале $[0,T]$. Обозначим такое приближенное решение через $\Psi_{\mathrm{as}}=\Psi_{\mathrm{as}}(x,t,\hbar)$. Оно удовлетворяет следующей задаче:

$$\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\widehat{\mathcal{H}}(t)+\varkappa\widehat{V}(t,\Psi_{\mathrm{as}})\right]\Psi_{\mathrm{as}}=O(\hbar^\alpha), \tag{2.9}$$

$$\Psi_{\mathrm{as}}\in\mathcal{P}^t_\hbar(Z(t,\hbar),S(t,\hbar),\hbar),\qquad t\in[0,T], \tag{2.10}$$

где через $O(\hbar^\alpha)$ обозначена функция $g^{(\alpha)}(x,t,\hbar)$ – “*невязка*” уравнения (1.1) в норме L_2,

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|g^{(\alpha)}(x,t,\hbar)\|=O(\hbar^\alpha),\qquad \hbar\to0. \tag{2.11}$$

Функцию $\Psi_{\mathrm{as}}(x,t,\hbar)$, удовлетворяющую задаче (2.9)–(2.11), будем также называть *квазиклассически сосредоточенным решением* $(\operatorname{mod}\hbar^\alpha,\ \hbar\to0)$ уравнения типа Хартри (1.1).

Основной целью работы является построение квазиклассически сосредоточенных решений уравнения типа Хартри с любой степенью точности по степеням малого параметра $\sqrt{\hbar}$, $\hbar\to0$, т.е. функций $\Psi_{\mathrm{as}}(x,t,\hbar)=\Psi^{(N)}(x,t,\hbar)$, удовлетворяющих задаче (2.9)–(2.11) по $\operatorname{mod}(\hbar^{(N+1)/2})$, где $N\geqslant2$ – любое натуральное число.

Таким образом, квазиклассически сосредоточенные решения $\Psi^{(N)}(x,t,\hbar)$ уравнения типа Хартри приближенно описывают эволюцию начального состояния $\Psi_0(x,\hbar)$, если оно выбрано в классе траекторно-сосредоточенных функций $\mathcal{P}^0_\hbar$:

$$\Psi(x,t,\hbar)|_{t=0}=\Psi_0(x,\hbar),\qquad \Psi_0\in\mathcal{P}^0_\hbar(z_0,0). \tag{2.12}$$

Функции из класса $\mathcal{P}^0_\hbar$ имеют вид

$$\Psi_0(x,\hbar)=\exp\left\{\frac{i}{\hbar}[\langle p_0,x-x_0\rangle]\right\}\varphi_0\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{\hbar}},\sqrt{\hbar}\right),\qquad \varphi_0\bigl(\xi,\sqrt{\hbar}\,\bigr)\in\mathbb{S}(\mathbb{R}^n_\xi), \tag{2.13}$$

где $z_0 = (p_0, x_0)$ – произвольная точка фазового пространства $\mathbb{R}^{2n}_{px}$.

Важными частными случаями начальных условий вида (2.13) являются, например, следующие:

а) гауссов пакет, если $\varphi_0\big(\xi, \sqrt{\hbar}\big) = e^{-\langle \xi, A\xi\rangle/2}$, где вещественная $(n \times n)$-матрица A положительно определена и симметрична;

б) фоковские состояния, если $\varphi_0\big(\xi, \sqrt{\hbar}\big) = \varphi_\nu(\xi) = e^{i\langle \xi, Q\xi\rangle/2} H_\nu(\sqrt{\mathrm{Im}\ Q}\xi)$, где комплексная $(n \times n)$-матрица Q симметрична и имеет положительно определенную мнимую часть $\mathrm{Im}\, Q$, а $H_\nu(\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, – многомерные полиномы Эрмита мультииндекса $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ [82]. В частности, при $\nu = 0$ функция $\Psi_0(x, \hbar)$ определяет сжатое когерентное состояние (1.5).

3. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА–ЭРЕНФЕСТА

Символы $\mathcal{H}(z, t)$ и $V(z, w, t)$ удовлетворяют условиям предположения 2.1. Поэтому оператор $\mathcal{H}(\hat{z}, t)$ в (1.3) самосопряжен относительно скалярного произведения $\langle \Psi | \Phi \rangle$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n_x)$, а оператор $V(\hat{z}, \widehat{w}, t)$ – относительно скалярного произведения $L_2(\mathbb{R}^{2n}_{xy})$,

$$\langle \Psi(t) | \Phi(t) \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} dx\, dy\, \Psi^*(x, y, t, \hbar) \Phi(x, y, t, \hbar).$$

Следовательно, квадрат нормы точных решений уравнения (1.1) сохраняется, т.е. $\|\Psi(t)\|^2 = \|\Psi(0)\|^2$, и для средних значений оператора $\hat{A}(t) = A(\hat{z}, t)$, вычисленных на этих решениях, справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{A}(t)\rangle = \Big\langle \frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t}\Big\rangle + \frac{i}{\hbar}\langle [\widehat{\mathcal{H}}, \hat{A}(t)]\rangle + \frac{i\varkappa}{\hbar}\Big\langle \int dy\, \Psi^*(y, t, \hbar)[\hat{A}(t), V(\hat{z}, \widehat{w}, t)]\Psi(y, t, \hbar)\Big\rangle, \tag{3.1}$$

где $[\hat{A}, \widehat{B}] = \hat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\hat{A}$ – коммутатор операторов $\hat{A}$ и $\widehat{B}$. По аналогии с линейным $(\varkappa = 0)$ уравнением Шредингера в квантовой механике равенство (3.1) назовем *уравнением Эренфеста для средних значений оператора* $\hat{A}(t)$, отвечающим уравнению типа Хартри.

Мы предполагаем, что для уравнения (1.1) существуют точные (или отличающиеся от них на величину $O(\hbar^\infty)$) решения в классе траекторно-сосредоточенных функций. Выпишем уравнения Эренфеста (3.1) для средних значений операторов $\hat{z}$, $\{\Delta\hat{z}\}^\alpha$, вычисленных по таким (траекторно-сосредоточенным) решениям уравнения (1.1). Будем при этом использовать правила композиции вейлевских символов [1]

$$C(z) = A\bigg(\overset{2}{z} + \frac{i\hbar}{2} J \frac{\overset{1}{\partial}}{\partial z}\bigg) B(z) = B\bigg(\overset{2}{z} - \frac{i\hbar}{2} J \frac{\overset{1}{\partial}}{\partial z}\bigg) A(z),$$

где $C(z)$ – символ оператора $\widehat{C} = \hat{A}\,\widehat{B}$ и знаки 1 и 2 над оператором указывают очередность его действия (напомним, что $\hat{z} = (\hat{p}, \hat{x})$, $Z(t, \hbar) = (P(t, \hbar), X(t, \hbar))$, $\Delta\hat{z} = \hat{z} - Z(t, \hbar)$). После громоздких, но несложных расчетов, аналогичных линейному случаю

($\varkappa = 0$) (детали этих вычислений можно найти в [61], [62], [75]), получим, ограничиваясь моментами порядка N, следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= \sum_{|\mu|=0}^{N} \frac{1}{\mu!} J\biggl(\mathcal{H}_{z\mu}(z,t)\Delta_\mu + \widetilde{\varkappa} \sum_{|\nu|=0}^{N} \frac{1}{\nu!} V_{z\mu\nu}(z,t)\Delta_\nu\Delta_\mu\biggr),\\
\dot{\Delta}_\alpha &= \sum_{|\mu+\gamma|=0}^{N} (-i\hbar)^{|\gamma|-1} \frac{\bigl[(-1)^{|\gamma_p|} - (-1)^{|\gamma_x|}\bigr]\alpha!\beta!\theta(\alpha-\gamma)\theta(\beta-\gamma)}{\gamma!(\alpha-\gamma)!(\beta-\gamma)!\mu!}\times\\
&\quad\times\biggl(\mathcal{H}_\mu(z,t) + \widetilde{\varkappa}\sum_{|\nu|=0}^{N}\frac{1}{\nu!}V_{\mu\nu}(z,t)\Delta_\nu\biggr)\Delta_{\alpha-\gamma+J\beta-J\gamma} -\\
&\quad-\sum_{k=1}^{2n} \dot{z}_k\alpha_k\Delta_{\alpha(k)}, \quad |\alpha| = 1,2,\dots,N.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Здесь $\Delta_\alpha = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2n}}$ – вектор длины $(2n)^{|\alpha|}$, компоненты которого Δ_α^a занумерованы $|\alpha|$-мерным мультииндексом $a = (a_1,\dots,a_i,\dots,a_{|\alpha|})$, $1 \leqslant a_i \leqslant 2n$, и обозначено: $\widetilde{\varkappa} = \varkappa\|\Psi_0(x,\hbar)\|^2$, $\Psi_0(x,\hbar)$ – начальная функция из (2.12), $\alpha,\mu,\nu,\beta,\gamma$ – мультииндексы длины $2n$,

$$
\begin{gathered}
\mathcal{H}_\mu(z,t) = \frac{\partial^{|\mu|}\mathcal{H}(z,t)}{\partial z^\mu}, \qquad V_{\mu\nu}(z,t) = \frac{\partial^{|\mu+\nu|}V(z,w,t)}{\partial z^\mu\partial w^\nu}\bigg|_{w=z},\\
\mathcal{H}_{z\mu}(z,t) = \partial_z\mathcal{H}_\mu(z,t),\\
\alpha = (\alpha_p,\alpha_x), \quad J\alpha = (\alpha_x,\alpha_p), \qquad \theta(\alpha-\beta) = \prod_{k=1}^{2n}\theta(\alpha_k-\beta_k),\\
\alpha(k) = (\alpha_1-\delta_{1,k},\dots,\alpha_{2n}-\delta_{2n,k}),
\end{gathered}
$$

где $\theta(x)$ – θ-функция и $J\gamma = (\gamma_x,\gamma_p)$, $\gamma_x = (\gamma_{n+1},\dots,\gamma_{2n})$, $\gamma_p = (\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ – компоненты мультииндекса $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n,\gamma_{n+1},\dots,\gamma_{2n})$.

Так же как и в линейной теории ($\varkappa = 0$), систему (3.2) назовем *системой Гамильтона–Эренфеста* порядка N, $N = 0,1,2,\dots$. В силу оценок (2.2) эта система с точки зрения вычисления квантовых средних эквивалентна решению нелинейного уравнения (1.1) в классе траекторно-сосредоточенных функций, если начальные данные для (3.2) задать как приближенные по $\operatorname{mod} O(\hbar^{(N+1)/2})$, $\hbar \to 0$, значения квантово-механических средних от операторов $\hat{z}$, $\widehat{\Delta z^\alpha}$ в начальном состоянии $\Psi_0(x,\hbar)$ (2.12), а именно

$$
z|_{t=0} = z^N(\hbar), \qquad \Delta_\alpha|_{t=0} = \Delta_\alpha^N(\hbar), \qquad 1 \leqslant |\alpha| \leqslant N, \tag{3.3}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\Delta_\alpha^{\Psi_0}(\hbar) &= \frac{\langle\Psi_0|\widehat{\Delta z}^\alpha|\Psi_0\rangle}{\|\Psi_0\|^2} = \Delta_\alpha^N(\hbar) + O(\hbar^{(N+1)/2}),\\
z^{\Psi_0}(\hbar) &= \frac{\langle\Psi_0|\hat{z}|\Psi_0\rangle}{\|\Psi_0\|^2} = z^N(\hbar) + O(\hbar^{(N+1)/2}), \quad N = 0,1,2,\dots.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Отметим, что в силу системы Гамильтона–Эренфеста порядка N при $N \geqslant 0$ для переменных Δ_α, где $|\alpha| = 1$, имеем $\dot\Delta_\alpha = 0$ и, следовательно, для задачи Коши (3.2), (3.3) $\Delta_\alpha(t,\hbar) = \mathrm{const} = \Delta^N_\alpha(\hbar)$ при любом N. Если теперь начальная траекторно-сосредоточенная функция $\Psi_0(x,\hbar)$ удовлетворяет условию траекторной когерентности (см. об этом подробнее в работах [61], [62])

$$z^{\Psi_0}(\hbar) = z_0 \quad \text{для любого} \quad \hbar \in (0,1], \tag{3.5}$$

где z_0 – произвольная точка фазового пространства, $z_0 = (p_0, x_0) \in \mathbb{R}^{2n}_{p,x}$, то тогда, очевидно, $\Delta_\alpha(t,\hbar) = \Delta^{\Psi_0}_\alpha(\hbar, N) = 0$ при $|\alpha| = 1$. Таким образом, системы Гамильтона–Эренфеста порядков $N = 0$ и $N = 1$ совпадают и имеют вид

$$\dot z = J\big[\mathcal{H}_z(z,t) + \widetilde{\varkappa} V_z(z,\omega,t)|_{\omega=z}\big]. \tag{3.6}$$

Выпишем в этом же случае (при выполнении условия (3.5)) систему Гамильтона–Эренфеста порядка $N = 2$, представив набор переменных Δ_α, $|\alpha| = 2$, в виде $(2n\times 2n)$-матрицы "дисперсий" $\Delta_2 = (\Delta_2^{a_1a_2})$, $1 \leqslant a_1, a_2 \leqslant 2n$. Тогда из (3.2) имеем

$$\begin{aligned} &\dot z = J\partial_z\bigg(1 + \frac{1}{2}\langle\partial_z, \Delta_2\partial_z\rangle + \frac{1}{2}\langle\partial_\omega, \Delta_2\partial_\omega\rangle\bigg)\Big(\mathcal{H}(z,t) + \widetilde{\varkappa} V(z,\omega,t)|_{\omega=z}\Big),\\ &\dot\Delta_2 = JM\Delta_2 - \Delta_2 MJ, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $(2n\times 2n)$-матрица

$$M = \mathcal{H}_{zz}(z,t) + \widetilde{\varkappa} V_{zz}(z,\omega,t)|_{\omega=z}.$$

Замечание 3.1. Условию (3.5) удовлетворяет, например, сжатое когерентное состояние $\Psi_0(x,\hbar)$ вида (1.5). Поэтому в теореме 1.1 при конструкции асимптотик была использована система Гамильтона–Эренфеста порядка $N = 2$ в форме (3.7).

4. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ХАРТРИ

Центральным моментом рассматриваемого подхода является линеаризация (с любой степенной точностью по параметру $\hbar \to 0$) уравнения типа Хартри в классе траекторно-сосредоточенных функций. Существенную роль при этом играет решение задачи Коши (3.2), (3.3) для системы Гамильтона–Эренфеста порядка N. Решение этой задачи обозначим через $y^N_{\Psi_0}(t,\hbar) = \big(Z^N(t,\hbar), \Delta^N_\alpha(t,\hbar), |\alpha| \leqslant N\big)$.

Обозначим (см. (2.2))

$$\begin{aligned} z^\Psi(t,\hbar) &= \frac{1}{\|\Psi(t,\hbar)\|^2}\langle\Psi(t,\hbar)\,|\,\widehat w\,|\,\Psi(t,\hbar)\rangle,\\ \Delta^\Psi_\alpha(t,\hbar) &= \frac{1}{\|\Psi(t,\hbar)\|^2}\langle\Psi(t,\hbar)\,|\,\{\Delta\widehat w\}^\alpha\,|\,\Psi(t,\hbar)\rangle \end{aligned} \tag{4.1}$$

и разложим “ядро” оператора $\widehat{V}(t,\Psi)$ в ряд Тейлора по степеням операторов $\Delta\widehat{w} = \widehat{w} - z^{\Psi}(t,\hbar)$,

$$V(\hat{z},\widehat{w},t) = \sum_{|\alpha|=0}^{N} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} V(\hat{z},w,t)}{\partial w^{\alpha}}\bigg|_{w=z^{\Psi}(t,\hbar)} \{\Delta\widehat{w}\}^{\alpha} + \widehat{R}_{N+1}, \tag{4.2}$$

где остаточный член, оператор $\widehat{R}_{N+1} = R_{N+1}\big(\hat{z}, z^{\Psi}(t,\hbar), \Delta\widehat{w}^{N+1}\big)$ на функциях $\Psi \in \mathcal{P}_n^t$ допускает[4)] следующую оценку по $\hbar \to 0$:

$$\bigg\|\Psi(x)\int_{\mathbb{R}^n} \Psi^*(y)\widehat{R}_{N+1}\Psi(y)\,dy\bigg\|_{L_2(\mathbb{R}^n_x)} = O(\hbar^{(N+1)/2}). \tag{4.3}$$

Подставив это разложение в уравнение (1.1), на функциях $\Psi \in \mathcal{P}_\hbar^t$ с учетом оценки (4.3) получим

$$\begin{aligned}\hat{L}^{(N)}(t,\Psi)\Psi = \bigg[-i\hbar\partial_t + \mathcal{H}(\hat{z},t) + \widetilde{\varkappa}\sum_{|\alpha|=0}^{N} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}V(\hat{z},w,t)}{\partial w^{\alpha}}\bigg|_{w=z^{\Psi}(t,\hbar)} \Delta_\alpha^{\Psi}(t,\hbar)\bigg]\Psi = \\ = O(\hbar^{(N+1)/2}).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Воспользуемся теперь результатами предыдущего раздела: “квантовые” моменты до порядка N включительно на решении $\Psi(x,t,\hbar) \in \mathcal{P}_\hbar^t$ приближенно, с точностью до моментов $\Delta_\alpha^{\Psi}(t,\hbar)$, $|\alpha| > N$, определяются решением системы Гамильтона–Эренфеста порядка N, и, следовательно, с учетом асимптотических оценок (2.2) для коэффициентов $z^{\Psi}(t,\hbar)$ и $\Delta_\alpha^{\Psi}(t,\hbar)$ в (4.4) справедливы (с любой степенью точности по $\hbar \to 0$) равенства

$$\begin{aligned} z^{\Psi}(t,\hbar) &= Z^N(t,\hbar) + O(\hbar^{(N+1)/2}), \\ \Delta_\alpha^{\Psi}(t,\hbar) &= \Delta_\alpha^N(t,\hbar) + O(\hbar^{(N+1)/2}), \quad |\alpha| \leqslant N. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Подставив эти разложения коэффициентов в оператор $\hat{L}^{(N)}(t,\Psi)$, получим, что

$$\hat{L}^{(N)}(t,\Psi) = \hat{L}^{(N)}(t,\Psi_0) + \widehat{O}_{N+1}(\hbar), \tag{4.6}$$

где оператор $\widehat{O}_{N+1}(\hbar) = \widehat{O}(\hbar^{(N+1)/2})$ в смысле оценки (2.3), а $\hat{L}^{(N)}(t,\Psi_0)$ – *линейный оператор типа оператора Шредингера* имеет вид

$$\hat{L}^{(N)}(t,\Psi_0) = -i\hbar\partial_t + \mathcal{H}(\hat{z},t) + \widetilde{\varkappa}\sum_{|\alpha|=0}^{N} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}V(\hat{z},w,t)}{\partial w^{\alpha}}\bigg|_{w=Z^N(t,\hbar)} \Delta_\alpha^N(t,\hbar) \tag{4.7}$$

с коэффициентами, зависящими от $Z^N(t,\hbar)$ и $\Delta_\alpha^N(t,\hbar)$, $|\alpha| \leqslant N$, и определяемыми в силу системы (3.2) заданной начальной функцией $\Psi_0(x,\hbar)$ (2.12).

[4)] Это нетрудно показать, основываясь на теории оценок для “$\hbar$”-псевдодифференциальных операторов с вейлевскими символами, удовлетворяющими предположению 2.1 (см., например, [1], [81]).

Таким образом, замена (4.5) квантовых средних значений операторов $\widehat{w}$ и $\{\widehat{\Delta w}\}^\alpha$ на решения системы Гамильтона–Эренфеста порядка N в уравнении (4.4) *линеаризует* уравнение (1.1) с точностью до $O(\hbar^{(N+1)/2})$, где $N \geqslant 2$. Следовательно, для построения квазиклассически сосредоточенных состояний $\operatorname{mod} \hbar^{(N+1)/2}$ нелинейного уравнения (1.1) достаточно построить с этой же точностью асимптотику решения *линейного уравнения*

$$\hat{L}^{(N)}(t,\Psi_0)\Phi = 0, \qquad \Phi \in \mathcal{P}_\hbar^t. \tag{4.8}$$

Определение 4.1. Уравнение вида (4.8) при заданном Ψ_0 (2.12) будем называть уравнением Хартри в траекторно-когерентном приближении или линейным ассоциированным уравнением Шредингера порядка N для уравнения (1.1), а его (произвольное) решение в классе функций $\mathcal{P}_\hbar^t$ будем обозначать[5)] через $\Phi = \Phi(x,t,\hbar,\Psi_0)$.

Очевидным является следующее важное утверждение.

Утверждение 4.1. *Если функция* $\Phi^{(N)}(x,t,\hbar,\Psi_0) \in \mathcal{P}_\hbar^t$, *асимптотическое (с точностью* $O(\hbar^{(N+1)/2})$, $\hbar \to 0$) *решение уравнения* (4.8), *удовлетворяет начальному условию*

$$\Phi|_{t=0} = \Psi_0, \tag{4.9}$$

где $\Psi_0(x,\hbar)$ *определена в* (2.12), *то функция* $\Psi^{(N)}(x,t,\hbar) = \Phi^{(N)}(x,t,\hbar,\Psi_0)$ *является асимптотическим (с точностью* $O(\hbar^{(N+1)/2})$, $\hbar \to 0$) *решением задачи Коши для уравнения типа Хартри* (2.9)–(2.12).

Для построения функции $\Phi^{(N)} \in \mathcal{P}_\hbar^t(Z(t,\hbar),S(t,\hbar))$, $N \geqslant 2$, воспользуемся методом построения локализованных асимптотик, развитым в работах [48], [59], [61], [62] для линейных квантово-механических уравнений, модифицировав его с учетом исходной постановки задачи (2.9)–(2.12) и структуры гамильтониана (4.7) для (линеаризованного) уравнения Хартри в траекторно-когерентном приближении. А именно точку локализации в $\mathbb{R}^{2n}_{p,x}$ квазиклассически сосредоточенного решения уравнения (4.8) – "параметр" $Z(t,\hbar)$, входящий в определение класса $\mathcal{P}_\hbar^t$, – определим как естественную проекцию решения $y^N_{\Psi_0}(t,\hbar)$ системы Гамильтона–Эренфеста (3.2) на фазовое пространство, т.е. положим $Z(t,\hbar) = Z^N(t,\hbar) = (P^N(t,\hbar), X^N(t,\hbar))$. Функцию $S(t,\hbar)$ (второй "параметр" класса $\mathcal{P}_\hbar^t$) определим как аналог классического действия вдоль этой ($z = Z^N(t,\hbar), t \in [0,T]$) фазовой траектории стандартной формулой. При этом будем исходить из классического гамильтониана, отвечающего не главному, а *полному символу* [1] $\mathcal{H}^N_\varkappa(z,t)$ квантового гамильтониана в (4.7). Этот символ с учетом оценок $\Delta^N_\alpha(t,\hbar) = O(\hbar^{|\alpha|/2})$ имеет вид

$$\mathcal{H}^N_\varkappa(z,t) = \mathcal{H}(z,t) + \tilde{\varkappa} \sum_{|\alpha|=0}^{N} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial w^\alpha} V(z,w,t)\bigg|_{w=Z^N(t,\hbar)} \Delta^N_\alpha(t,\hbar). \tag{4.10}$$

[5)] Тем самым мы подчеркиваем зависимость решения уравнения (4.8) (через коэффициенты оператора $\hat{L}^{(N)}(t,\Psi_0)$) от решения $y^N_{\Psi_0}(t,\hbar)$ уравнения Гамильтона–Эренфеста (3.2) с начальными данными (3.3), индуцированными начальным условием Ψ_0 (2.12) в исходной постановке задачи (2.9)–(2.12) для уравнения типа Хартри.

В результате получим

$$S(t,\hbar) = S^N(t,\hbar) = \int_0^t \big[\langle P^N, \dot X^N\rangle(\tau,\hbar) - \mathcal{H}^N_\varkappa(Z^N(\tau,\hbar),\tau)\big]\,d\tau. \tag{4.11}$$

Обозначим

$$S^N(x,t,\hbar) = S^N(t,\hbar) + \langle P^N(t,\hbar), x - X^N(t,\hbar)\rangle.$$

Таким образом, для построения асимптотического $\operatorname{mod}\hbar^{(N+1)/2}$, $\hbar\to 0$, решения уравнения (4.8)

$$\Phi^{(N)}(x,t,\hbar) = e^{\frac{i}{\hbar}S^N(x,t,\hbar)}\varphi^N\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\hbar}}, t, \sqrt{\hbar}\right) \in \mathcal{P}^t_\hbar$$

(здесь и далее зависимость решения $\Phi^{(N)}$ от Ψ_0 может быть опущена в целях сокращения обозначений) достаточно найти амплитуду решения φ^N с соответствующей точностью по $\hbar\to 0$ в виде разложения по степеням $\sqrt{\hbar}$,

$$\varphi^{(N)}(x,t,\hbar) = \sum_{k=0}^{N-2}\hbar^{k/2}\varphi^N_k\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\hbar}}, t\right).$$

Соответственно для $\Phi^{(N)}(x,t,\hbar)$ имеем представление

$$\Phi^{(N)}(x,t,\hbar) = \sum_{k=0}^{N-2}\hbar^{k/2}\Phi^{(N)}_k(x,t,\hbar), \tag{4.12}$$

где

$$\Phi^{(N)}_k(x,t,\hbar) = e^{\frac{i}{\hbar}S^N(x,t,\hbar)}\varphi^N_k\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\hbar}}, t\right), \quad k = 0,\dots,N-2.$$

Далее, разложим операторы

$$\mathcal{H}(\hat z, t) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial w^\alpha}V(\hat z, w, t)\bigg|_{w=z^N(t,\hbar)}$$

в ряды Тейлора порядка N по степеням оператора $\Delta\hat z = \hat z - Z^N(t,\hbar)$ с остаточными членами $\widehat R^H_{N+1}$ и $\widehat R^V_{N+1}$, соответственно, и представим оператор $-i\hbar\partial/\partial t$ в виде

$$-i\hbar\partial_t = \hat A + \widehat B, \tag{4.13}$$

где

$$\begin{aligned}
\hat A &= -i\hbar\partial_t - \dot S^N(t,\hbar) + \langle P^N(t,\hbar), \dot X^N(t,\hbar)\rangle + \langle \dot Z^N(t,\hbar), J\Delta\hat z\rangle,\\
\widehat B &= -\langle P^N(t,\hbar), \dot X^N(t,\hbar)\rangle + \dot S^N(t,\hbar) - \langle \dot Z^N(t,\hbar), J\Delta\hat z\rangle.
\end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в уравнение (4.8). С учетом оценок по $\hbar \to 0$ для операторов $\widehat{R}_{N+1}^{H}$ и $\widehat{R}_{N+1}^{V}$ на функциях класса $\mathcal{P}_{\hbar}^{t}$ (аналогичных оценке (4.3)) получим

$$\big[-i\hbar\partial_t + \hat{\mathfrak{H}}_0(t,\Psi_0) + \hbar\hat{\mathfrak{H}}^{(N)}(t,\Psi_0)\big]\Phi = O(\hbar^{(N+1)/2}). \qquad (4.14)$$

В формуле (4.14) введены следующие обозначения:

$$\hat{\mathfrak{H}}_0(t,\Psi_0) = -\dot{S}^N(t,\hbar) + \langle P^N(t,\hbar), \dot{X}^N(t,\hbar)\rangle + \langle \dot{Z}^N(t,\hbar), J\Delta\hat{z}\rangle + \\ + \frac{1}{2}\langle \Delta\hat{z}, \mathfrak{H}_{zz}(t,\Psi_0)\Delta\hat{z}\rangle, \qquad (4.15)$$

где

$$\mathfrak{H}_{zz}(t,\Psi_0) = \big[\mathcal{H}_{zz}(z,t) + \widetilde{\varkappa}V_{zz}(z,w,t)\big]\big|_{z=w=Z^N(t,\hbar)},$$

и

$$\hat{\mathfrak{H}}^{(N)}(t,\Psi_0) = \sum_{k=1}^{N} \hbar^{k/2}\hat{\mathfrak{H}}_k(t,\Psi_0), \qquad (4.16)$$

где

$$\hat{\mathfrak{H}}_k(t,\Psi_0) = -\Big\langle \dot{Z}_{(k+1)}(t), J\frac{\Delta\hat{z}}{\sqrt{\hbar}}\Big\rangle + \sum_{|\alpha|=k+2} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}\mathcal{H}(z,t)}{\partial z^\alpha}\Big|_{z=Z(t,\hbar,N)} \frac{\{\Delta\hat{z}\}^\alpha}{\hbar^{k+2}} + \\ + \frac{\widetilde{\varkappa}}{\hbar^{k+2}} \sum_{|\alpha+\beta|=k+2} \frac{1}{\alpha!\beta!}\frac{\partial^{|\alpha+\beta|}V(z,w,t)}{\partial z^\beta \partial w^\alpha}\Big|_{z=w=Z^N(t,\hbar)} \{\Delta\hat{z}\}^\beta \Delta_\alpha^N(t,\hbar). \quad (4.17)$$

Здесь функции $Z_{(k)}^N(t)$ – коэффициенты разложения проекции $Z^N(t,\hbar)$ решения $y^{(N)}(t,\hbar)$ системы Гамильтона–Эренфеста на фазовое пространство $\mathbb{R}^{2n}$ в ряд регулярной теории возмущений по степеням $\sqrt{\hbar}$,

$$Z^N(t,\hbar) = \sum_{k=0}^{N} \hbar^{k/2} Z_{(k)}^N(t),$$

причем в силу оценок (2.4), (2.5) операторы $\hat{\mathfrak{H}}_k(t,\Psi_0)$, $k = 1,\dots,N$, имеют по параметру $\hbar \to 0$ порядок $\widehat{O}(1)$ в смысле, определенном равенством (2.3). Отметим два важных технических момента, использованных при выводе приближенного уравнения (4.14). Во-первых, в силу оценки (2.4) для оператора $\hat{A}$ из (4.13) оператор $-i\hbar\partial/\partial t + \hat{\mathfrak{H}}_0(t,\Psi_0)$ имеет порядок $\widehat{O}(\hbar)$, $\hbar \to 0$. Во-вторых, при подстановке в (4.8) оператора $\widehat{B}$ из (4.13), в котором

$$\dot{Z}^N(t,\hbar) = \sum_{k=0}^{N} \hbar^{k/2} \dot{Z}_{(k)}^N(t),$$

слагаемые, пропорциональные $\dot{Z}_{(0)}^N\Delta\hat{z}$ и $\dot{Z}_{(1)}^N\Delta\hat{z}$, сокращаются с соответствующими членами рядов Тейлора для $\mathcal{H}(\hat{z},t)$ и

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial w^\alpha}V(\hat{z}, Z^N(t,\hbar), t) \quad \text{при} \quad |\alpha| = 1$$

в силу формул для нулевого $Z^N_{(0)}(t)$ и первого $Z^N_{(1)}(t)$ порядков приближения в решении задачи (3.2), (3.3) по теории возмущений.

Подставим теперь разложение (4.12) в (4.14) и приравняем нулю слагаемые при одинаковых степенях $\hbar^{1/2}$. В результате получим рекуррентную систему *линейных ассоциированных уравнений* для определения функций $\Phi^{(N)}_k(x,t,\hbar)$, $k=0,1,2,\dots,N-2$,

$$\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\hat{\mathfrak{H}}_0(t,\Psi_0)\right]\Phi^{(N)}_0=0, \tag{4.18}$$

$$\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\hat{\mathfrak{H}}_0(t,\Psi_0)\right]\Phi^{(N)}_k+\sum_{m=0}^{k-1}\hat{\mathfrak{H}}_{k-m}(t,\Psi_0)\Phi^{(N)}_m=0,\quad k=1,2,\dots,N-2. \tag{4.19}$$

Уравнение (4.18) для главного члена асимптотического решения $\Phi^{(N)}_0(x,t,\hbar)$ естественно также назвать уравнением типа Хартри в траекторно-когерентном приближении $\operatorname{mod}\hbar^{3/2}$. Это уравнение является уравнением Шредингера с гамильтонианом, квадратичным по операторам $\hat{p}$ и $\hat{x}$.

5. ТРАЕКТОРНО-КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ХАРТРИ

Решение линейного уравнения Шредингера с квадратичным гамильтонианом хорошо известно. Для наших целей удобно в качестве базиса решений уравнения (4.18) выбрать квазиклассические траекторно-когерентные состояния этого уравнения [59], [60]. В силу утверждения 4.1 такие состояния являются асимптотическими ($\operatorname{mod}\hbar^{3/2}$) решениями задачи (2.9)–(2.12), если функция $\Psi_0(x,\hbar)$ (2.12) совпадает с траекторно-когерентным состоянием в начальный момент времени. Эти решения мы также будем называть *траекторно-когерентными состояниями уравнения типа Хартри* (1.1). Приведем их явный вид, а также ряд свойств, которые ниже (в разделах 6, 7) используются для решения задачи (2.9)–(2.12) с произвольным начальным условием из класса функций $\mathcal{P}^0_\hbar$.

Пусть заданы натуральное число N, $N\geqslant 2$, и функция $\Psi_0(x,\hbar)\in\mathcal{P}^0_\hbar$. Обозначим через $B(t)$, $C(t)$ комплексные $(n\times n)$-матрицы[6], удовлетворяющие системе в вариациях "с самодействием", отвечающей гамильтониану $\mathcal{H}^0_\varkappa(z,t)$ (4.10) – главному символу оператора $\hat{\mathfrak{H}}_0(t,\Psi_0)$ (4.15),

$$\begin{pmatrix}\dot{B}\\ \dot{C}\end{pmatrix}=J\mathfrak{H}_{zz}(t,\Psi_0)\begin{pmatrix}B\\ C\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{cases}\dot{B}=-\mathfrak{H}_{xp}(t,\Psi_0)C-\mathfrak{H}_{xx}(t,\Psi_0)B,\\ \dot{C}=\mathfrak{H}_{pp}(t,\Psi_0)B+\mathfrak{H}_{px}(t,\Psi_0)C\end{cases} \tag{5.1}$$

и начальным данным

$$B|_{t=0}=B_0,\quad C|_{t=0}=E_n, \tag{5.2}$$

[6] Зависимость этих матриц от N и Ψ_0 опускается.

где B_0 – симметричная матрица с положительной мнимой частью

$$B_0^t = B_0, \quad \operatorname{Im} B_0 > 0. \tag{5.3}$$

Здесь $(2n \times 2n)$-матрица $\mathfrak{H}_{zz}(t, \Psi_0)$ определена в (4.15).

Как известно [83], линейная гамильтонова система (5.1) сохраняет стандартную симплектическую структуру $\omega = dp \wedge dx$ фазового пространства $\mathbb{R}^{2n}_{p,x}$. Следовательно, кососкалярное произведение $\langle a, Jb\rangle = \omega(a, b)$ любых двух комплексных решений $a(t)$,$b(t) \in \mathbb{C}^{2n}_{w,z}$ системы (5.1) не зависит от времени (здесь через $\mathbb{C}^{2n}_{w,z}$ обозначена комплексификация пространства $\mathbb{R}^{2n}_{p,x}$ с комплексными координатами $w \in \mathbb{C}^n$, $z \in \mathbb{C}^n$, $a = (w, z)$). Отсюда и из условий (5.3) следуют равенства

$$C^t(t)B(t) - B^t(t)C(t) = \big(\{a_i(t), a_j(t)\}\big)_{n\times n} = 0, \tag{5.4}$$

$$\frac{1}{2i}(C^\dagger(t)B(t) - B^\dagger(t)C(t)) = \left(\frac{\{a_i(t), a_j^*(t)\}}{2i}\right)_{n\times n} = \operatorname{Im} B_0 > 0, \tag{5.5}$$

где $2n$-мерный вектор $a_i(t) = (w_i(t), z_i(t))$, $i = 1, 2, \dots, n$, составлен из вектор-столбцов $w_i(t)$ и $z_i(t)$ матриц $B(t)$ и $C(t)$, соответственно: $B(t) = (w_1(t), \dots, w_n(t))$, $C(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$. С помощью стандартных рассуждений (см., например, [62]) из (5.5) следует, что матрица $C(t)$ невырожденна, $\det C(t) \neq 0$, и мнимая часть матрицы

$$Q(t) = B(t)C^{-1}(t) \tag{5.6}$$

положительна при $t \in [0, T]$, $T > 0$: $\operatorname{Im} Q(t) > 0$, причем в силу равенства (5.4) матрица $Q(t)$ симметрична, $Q^t(t) = Q(t)$.

Фиксируем теперь непрерывную ветвь корня из $\det C(t)$, $t \in [0, T]$, например, считая, что $\operatorname{Arg}\sqrt{\det C(0)} = 0$. Определим функцию

$$\begin{aligned}\Phi_0^{(N)}(x, t, \hbar) = |0, t, \Psi_0\rangle = N_0(\hbar)(\det C(t))^{-1/2}\times\\ \times \exp\bigg\{\frac{i}{\hbar}\bigg[S^N(t,\hbar) + \Big\langle\frac{P^N(t,\hbar)}{\sqrt{\hbar}}, \frac{\Delta x}{\sqrt{\hbar}}\Big\rangle + \frac{1}{2}\Big\langle\frac{\Delta x}{\sqrt{\hbar}}, Q(t)\frac{\Delta x}{\sqrt{\hbar}}\Big\rangle\bigg]\bigg\},\end{aligned} \tag{5.7}$$

где $\Delta x = x - X^N(t, \hbar)$, $(P^N(t, \hbar), X^N(t, \hbar)) = Z^N(t, \hbar)$, $t \in [0, T]$ – фазовая траектория в силу системы Гамильтона–Эренфеста порядка N (3.2), функция $S^N(t, \hbar)$ определена в (4.11) и $N_0(\hbar) = (\pi\hbar)^{-n/4}(\det \operatorname{Im} B_0)^{1/4}$ – нормировочная постоянная, $\langle t, 0|0, t\rangle = 1$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть при заданных числе* N, $N \geqslant 2$, *и функции* $\Psi_0(x, \hbar) \in \mathcal{P}_0^\hbar$ *на интервале* $[0, T]$, $T > 0$, *существует решение задачи Коши* (3.2), (3.3), *гладко зависящее от параметра* $\sqrt{\hbar}$, $\hbar \in (0, 1]$. *Тогда при* $t \in [0, T]$ *функция* $\Phi_0^{(N)}(x, t, \hbar)$ (5.7) *является точным решением задачи Коши для уравнения* (4.18) *с начальным условием*

$$\Phi_0^{(N)}|_{t=0} = N_0(\hbar)\exp\bigg\{\frac{i}{\hbar}\bigg[\langle p_0, x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle x - x_0, B_0(x - x_0)\rangle\bigg]\bigg\}, \tag{5.8}$$

где $(p_0, x_0) \in \mathbb{R}^{2n}_{p,x}$ *и комплексная* $(n\times n)$*-матрица* B_0 *удовлетворяет условиям* (5.3).

Доказательство. Решение линейного уравнения (4.18) в классе функций $\mathcal{P}_\hbar^t(S^N(t,\hbar), Z^N(t,\hbar))$ ищем в форме гауссова пакета

$$\Phi(x,t,\hbar) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\big[S^N(t,\hbar) + \langle P^N(t,\hbar), \Delta x\rangle\big]\right\}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\frac{\langle \Delta x, Q(t)\Delta x\rangle}{2}\right\}\varphi(t), \tag{5.9}$$

где комплексная $(n\times n)$-матрица $Q(t)$ симметрична и $\operatorname{Im} Q(t) > 0$. Подставив (5.9) в (4.18) и приравняв нулю коэффициенты при степенях оператора Δx^k, $k=0,2$, получим линейное уравнение на функцию $\varphi(t)$ и матричное уравнение Риккати на матрицу $Q(t)$, соответственно,

$$\dot\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{Sp}[\mathfrak{H}_{px}(t,\Psi_0) + \mathfrak{H}_{pp}(t,\Psi_0)Q(t)]\varphi = 0, \tag{5.10}$$

$$\dot Q + \mathfrak{H}_{xx}(t,\Psi_0) + Q(t)\mathfrak{H}_{px}(t,\Psi_0) + \mathfrak{H}_{xp}(t,\Psi_0)Q(t) + Q(t)\mathfrak{H}_{pp}(t,\Psi_0)Q(t) = 0. \tag{5.11}$$

Стандартная замена $Q(t) = B(t)C^{-1}(t)$ (см., например, [84]) при условии, что $Q(0) = B_0$, где B_0 удовлетворяет условиям (5.3), сводит задачу построения требуемого комплексного решения уравнения (5.11) к задаче (5.1), (5.2). В силу второго уравнения системы (5.1) имеем

$$\dot C = [\mathfrak{H}_{px}(t,\Psi_0) + \mathfrak{H}_{pp}(t,\Psi_0)Q(t)]C,$$

где $Q(t)$ – решение уравнения (5.11). Отсюда в силу леммы Лиувилля найдем, что

$$\det C(t) = \exp\int_0^t \operatorname{Sp}[\mathfrak{H}_{px}(\tau,\Psi_0) + \mathfrak{H}_{pp}(\tau,\Psi_0)Q(\tau)]\,d\tau$$

и, следовательно, из уравнения (5.10) имеем $\varphi(t) = (\det C(t))^{-1/2}$.

Построим теперь фоковский базис решений уравнения (4.18). Для этого будем искать линейные по операторам $\Delta\hat z$ операторы симметрии $\hat a(t,\Psi_0)$ этого уравнения в виде $\hat a(t,\Psi_0) = N_a\langle b(t,\Psi_0), \Delta\hat z\rangle$, где N_a – постоянная, $b(t) = b(t,\Psi_0)$ – комплексный $2n$-вектор, подлежащий определению. Из уравнения

$$-i\hbar\frac{\partial\hat a(t)}{\partial t} + [\hat{\mathfrak{H}}_0(t,\Psi_0), \hat a(t)] = 0,$$

определяющего оператор $\hat a(t)$, с учетом явного вида $\hat{\mathfrak{H}}_0(t,\Psi_0)$ (4.15) получим

$$\begin{aligned}- i\hbar\langle\dot b(t), \Delta\hat z\rangle + i\hbar\langle b(t), \dot Z^N(t,\hbar)\rangle + \Big[&-\dot S^N(t,\hbar) + \langle P^N(t,\hbar), \dot X^N(t,\hbar)\rangle + \\ &+ \langle \dot Z^N(t,\hbar), J\Delta\hat z\rangle + \frac{1}{2}\langle\Delta z, \mathfrak{H}_{zz}(t,\Psi_0)\Delta\hat z\rangle, \langle b(t), \Delta\hat z\rangle\Big] = 0.\end{aligned}$$

Отсюда в силу коммутационных соотношений $[\Delta\hat z_j, \Delta\hat z_k] = i\hbar J_{jk}$, $j,k = 1,\dots,2n$, найдем

$$-i\hbar\langle\dot b(t), \Delta\hat z\rangle + i\hbar\langle\Delta\hat z, \mathfrak{H}_{zz}(t)Jb(t)\rangle = 0$$

и, следовательно, $\dot b = \mathfrak{H}_{zz}(t,\Psi_0)Jb$. Обозначим $b(t) = -Ja(t)$. Тогда для определения вектора $a(t)$ получим уравнение $\dot a = J\mathfrak{H}_{zz}(t,\Psi_0)a$. Таким образом, оператор

$$\hat a(t) = \hat a(t,\Psi_0) = N_a\langle b(t),\Delta\hat z\rangle = N_a\langle a(t), J\Delta\hat z\rangle \tag{5.12}$$

является оператором симметрии для уравнения (4.18), если вектор $a(t) = a(t,\Psi_0)$ является решением системы в вариациях (5.1).

Пусть $\hat a(t)$, $\hat b(t)$ – операторы симметрии, отвечающие двум решениям системы в вариациях $a(t)$ и $b(t)$, соответственно. Тогда нетрудно проверить, что

$$[\hat a(t),\hat b(t)] = i\hbar N_aN_b\{a(t),b(t)\} = i\hbar N_aN_b\{a(0),b(0)\}, \tag{5.13}$$

причем последнее равенство является следствием свойства гамильтоновости системы (5.1).

Пусть теперь матрица B_0 в (5.2) диагональна, $B_0 = \operatorname{diag}(b_1,\dots,b_n)$, где $b_j\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Im} b_j > 0$, $j = 1,2,\dots,n$. Тогда вектор-столбцы $a_j(t) = (w_j(t), z_j(t))$, $j = 1,2,\dots,n$, $(2n\times 2n)$-матрицы $\begin{pmatrix} B(t)\\ C(t)\end{pmatrix}$ представляют собой решения задачи (5.1), (5.2) и векторы $a_j^*(t)$, $j = 1,2,\dots,n$, образуют базис решений системы в вариациях. По формуле (5.12) сопоставим векторам $a_j^*(t)$ операторы "рождения" $\hat a_j^+(t)$, а векторам $a_j(t)$ – операторы "уничтожения" $\hat a_j(t)$, положив $N_j = (\hbar\operatorname{Im} b_j)^{-1/2}$. Тогда в силу формул (5.13) для операторов $\hat a_j^+(t), \hat a_j(t)$, $j = 1,2,\dots,n$, справедливы канонические коммутационные соотношения

$$[\hat a_j(t),\hat a_k(t)] = [\hat a_j^+(t),\hat a_k^+(t)] = 0, \qquad [\hat a_j(t),\hat a_k^+(t)] = \delta_{jk},\quad j,k = 1,2,\dots,n. \tag{5.14}$$

Утверждение 5.1. *Пусть в* (5.2) $B_0 = \operatorname{diag}(b_1,\dots,b_n)$, $b_j\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Im} b_j > 0$, $j = 1,\dots,n$. *Тогда функция* $\Phi_0^{(N)}(x,t,\hbar) = |0,t,\Psi_0\rangle$ (5.7) *является "вакуумным" траекторно-когерентным состоянием*,

$$\hat a_j(t)|0,t,\Psi_0\rangle = 0,\quad j = 1,2,\dots,n. \tag{5.15}$$

Доказательство. Действуя оператором "уничтожения" $\hat a_j(t)$ на функцию $|0,t\rangle$, получим, что

$$\hat a_j(0,t)|0,t\rangle = \big(\langle z_j(t), Q(t)\Delta x\rangle - \langle w_j(t),\Delta x\rangle\big)|0,t\rangle.$$

Отсюда немедленно следует (5.15), поскольку в силу определения и свойств матрицы $Q(t)$ имеем

$$Q(t)z_j(t) = B(t)C^{-1}(t)z_j(t) = w_j(t).$$

При заданных $N \geqslant 2$ и $\Psi_0 \in \mathcal{P}_\hbar^0$ определим теперь счетный набор состояний $|\nu, t, \Psi_0\rangle$ (точных решений уравнения (4.18)) как результат действия операторов “рождения” на “вакуумное” состояние $|0, t, \Psi_0\rangle$ (5.7),

$$\Phi_\nu^{(N)}(x,t,\hbar) = |\nu, t, \Psi_0\rangle = \frac{1}{\nu!}(\hat{a}^+(t,\Psi_0))^\nu |0,t,\Psi_0\rangle = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\nu_k!}(\hat{a}_k^+(t,\Psi_0))^{\nu_k}|0,t,\Psi_0\rangle. \tag{5.16}$$

Функции $\Phi_\nu^{(N)}(x,t,\hbar)$, $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$, образуют фоковский базис решений (линейного) уравнения (4.18). Действительно, используя формулы (5.15), (5.14), с помощью стандартных вычислений легко проверить ортонормированность этого набора функций

$$\langle \Phi_\nu^{(N)}, \Phi_{\nu'}^{(N)} \rangle = \delta_{\nu\nu'}, \qquad \nu, \nu' \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Доказательство полноты следует, например, из результатов [85]. Таким образом, отсюда и из утверждения 4.1 вытекает следующая теорема.

Теорема 5.2. *Пусть символы операторов $\widehat{\mathcal{H}}(t)$ и $\widehat{V}(t,\Psi)$ в* (1.1) *удовлетворяют условиям предположения* 2.1 *и пусть выполнены условия теоремы* 5.1. *Тогда для любого $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$ функция $\Psi_\nu^{(N)}(x,t,\hbar)$ является асимптотическим (с точностью $O(\hbar^{3/2})$, $\hbar \to 0$) решением уравнения типа Хартри* (1.1) *с начальным условием*

$$\begin{aligned}\Psi|_{t=0} = \Psi_0(x,\hbar) &= \frac{1}{\nu!}\hat{a}^+(0)^\nu \Phi_0^{(N)}(x,\hbar) = \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}\langle p_0, x-x_0\rangle} N_0(\hbar) \prod_{j=1}^n \frac{e^{\frac{i}{\hbar}b_j \frac{(x_j - x_{j0})^2}{2}}}{\sqrt{2^{\nu_j}\nu_j!}} H_{\nu_j}\left(\frac{x_j - x_{j0}}{\sqrt{\hbar}}\sqrt{\operatorname{Im} b_j}\right),\end{aligned} \tag{5.17}$$

где функция $\Phi_0^{(N)}(x,\hbar)$ определена формулой (5.8), $H_{\nu_j}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, *– полином Эрмита степени $\nu_j \in \mathbb{Z}_+$,* $N_0(\hbar) = (\pi\hbar)^{-n/4}\big(\prod_{j=1}^n \operatorname{Im} b_j\big)^{1/4}$.

6. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИ СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ХАРТРИ (ГЛАВНЫЙ ЧЛЕН АСИМПТОТИКИ)

Асимптотические решения задачи Коши (2.9)–(2.12) (где Ψ_0 имеет вид (5.17)), построенные в предыдущем разделе, являются частным случаем квазиклассически сосредоточенных $(\operatorname{mod} \hbar^{3/2})$ решений уравнения (1.1). В случае произвольных начальных условий $\Psi_0(x,\hbar)$ (2.12), принадлежащих классу $\mathcal{P}_\hbar^0$, главный член асимптотики $\Psi_0^{(N)}(x,t,\hbar)$ уравнения (1.1) определяется разложением в ряд по фоковскому базису $|\nu, t, \Psi_0\rangle$ (5.16), $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$, решений уравнения (4.18),

$$\Psi_0^{(N)}(x,t,\hbar) = \sum_{|\nu|=0}^\infty C_\nu |\nu, t, \Psi_0\rangle, \qquad C_\nu = \langle \Psi_0, 0, \nu | \Psi_0\rangle.$$

В дальнейшем более удобным для нас является представление решения $\Psi_0^{(N)}(x,t,\hbar)$ через свертку начального условия Ψ_0 с функцией Грина $G_0^{(N)}(x,y,t,s,\Psi_0)$ уравнения (4.18). Функция Грина для квадратичных квантовых систем известна (см., например, [71], [86], [87]). Для полноты изложения приведем ее явный вид в форме, позволяющей явно показать нетривиальную зависимость оператора эволюции ассоциированного линейного уравнения (4.18) от начальных условий для исходного уравнения типа Хартри.

По определению функции Грина $G_0^{(N)}$ для уравнения (4.18) имеем

$$\begin{gathered}\big[-i\hbar\partial_t+\hat{\mathfrak{H}}_0(t,\Psi_0)\big]G_0^{(N)}(x,y,t,s,\Psi_0)=0, \qquad 0\leqslant s\leqslant t,\\ \lim_{t\to s}G_0^{(N)}(x,y,t,s,\Psi_0)=\delta(x-y),\end{gathered} \tag{6.1}$$

где оператор $\hat{\mathfrak{H}}_0$ определен в (4.15). Обозначим через $\lambda_k(t,\Psi_0)$, $k=1,2,3,4$, $(n{\times}n)$-матрицы, являющиеся блоками фундаментальной матрицы системы в вариациях (5.1),

$$\Phi(t,\Psi_0)=\begin{pmatrix}\lambda_4^t(t,\Psi_0) & \lambda_2^t(t,\Psi_0)\\ \lambda_3^t(t,\Psi_0) & \lambda_1^t(t,\Psi_0)\end{pmatrix}, \qquad \Phi(0,\Psi_0)=E_{2n\times 2n}. \tag{6.2}$$

Пусть выполнены следующие условия:

$$\det\mathfrak{H}_{pp}(t,\Psi_0)\neq 0, \qquad \det\lambda_3(t-s)\neq 0, \qquad s,t\in[0,T]. \tag{6.3}$$

Тогда функция Грина $G_0^{(N)}(x,y,t,s,\Psi_0)$ имеет вид [61], [62]

$$\begin{aligned}G_0^{(N)}(x,y,t,s,\Psi_0)=\frac{1}{\sqrt{\det(-i2\pi\hbar\lambda_3(\Delta t))}}\exp\bigg\{\frac{i}{\hbar}\Big[&S^N(t,\hbar)-S^N(s,\hbar)+\\ &+\langle P^N(t,\hbar),\Delta x\rangle-\langle p_0,y-x_0\rangle-\\ &-\frac12\langle y-x_0,\lambda_1(\Delta t)\lambda_3^{-1}(\Delta t)(y-x_0)\rangle-\frac12\langle\Delta x,\lambda_3^{-1}(\Delta t)(y-x_0)\rangle-\\ &-\frac12\langle\Delta x,\lambda_3^{-1}(\Delta t)\lambda_4(\Delta t)\Delta x\rangle\Big]\bigg\}.\end{aligned} \tag{6.4}$$

Здесь $\Delta t=t-s$, $(P^N(t,\hbar),X^N(t,\hbar))$ – проекция решения системы Гамильтона–Эренфеста порядка N на пространство $\mathbb{R}^{2n}_{p,x}$.

Замечание 6.1. Если условия (6.3) не выполняются, то решение задачи (6.1) в несколько иной форме, чем (6.4), можно найти, например, в работах [86], [87].

Таким образом, отсюда и из утверждения 4.1 следует теорема.

Теорема 6.1. *Пусть символы операторов $\widehat{\mathcal{H}}(t)$ и $\widehat{V}(t,\Psi)$ в* (1.1) *удовлетворяют условиям предположения* 2.1 *и пусть выполнены условия теоремы* 5.1 *и условия* (6.3). *Тогда функция*

$$\Psi_0^{(N)}(x,t,\hbar)=\widehat{U}_0^{(N)}(t,0,\Psi_0)\Psi_0, \quad t\in[0,T], \tag{6.5}$$

где $\widehat{U}_0^{(N)}(t,0,\Psi_0)$ – оператор эволюции ассоциированного уравнения Шредингера нулевого порядка (4.18) *с ядром $G_0^{(N)}(x,y,t,0,\Psi_0)$* (6.4), *является асимптотическим (с точностью $O(\hbar^{3/2})$, $\hbar\to 0$) решением уравнения типа Хартри* (1.1) *с начальным условием*

$$\Psi|_{t=0}=e^{\frac{i}{\hbar}\langle p_0,x-x_0\rangle}\varphi_0\bigg(\frac{x-x_0}{\sqrt{\hbar}}\bigg), \quad \varphi_0(\xi)\in\mathbb{S}(\mathbb{R}^n).$$

7. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИ СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ХАРТРИ (ВЫСШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ)

Построим квазиклассически сосредоточенные решения $(\operatorname{mod} \hbar^{(N+1)/2},\ \hbar \to 0,\ N \geqslant 2)$ задачи Коши для уравнения (1.1) с произвольным начальным условием $\Psi_0(x,\hbar) \in \mathcal{P}_\hbar^0$, которое с соответствующей точностью по $\hbar \to 0$ имеет вид

$$\Psi|_{t=0} = \Psi_0(x,\hbar) = \sum_{k=0}^{N-2} \hbar^{k/2}\Phi_k(x,\hbar) + O(\hbar^{N/2}), \tag{7.1}$$

где

$$\Phi_k(x,\hbar) = e^{\frac{i}{\hbar}\langle p_0, x-x_0\rangle}\varphi_k\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{\hbar}}\right), \qquad \varphi_k(\xi) \in S(\mathbb{R}_x^n), \quad k = 0,1,\dots,N-2. \tag{7.2}$$

Тогда для рекуррентной системы ассоциированных линейных уравнений (4.18), (4.19) имеем задачу Коши со следующими начальными данными:

$$\Phi_k^{(N)}\big|_{t=0} = \Phi_k(x,0,\hbar), \quad k = 0,1,\dots,N-2.$$

Решение этой задачи нетрудно построить в виде разложения по полному ортонормированному набору фоковских функций $|\nu,t,\Psi_0\rangle$ (5.16), в котором "параметр" Ψ_0 определяется главным членом разложения начального условия (7.1),

$$\Psi_0 = \Phi_0(x,\hbar). \tag{7.3}$$

В результате получим

$$\Phi_0^{(N)}(x,t,\hbar) = \sum_{|\nu|=0}^{\infty} |\nu,t,\Psi_0\rangle\langle\Psi_0,0,\nu|\Phi_0(x,\hbar)\rangle, \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1^{(N)}(x,t,\hbar) &= \sum_{|\nu|=0}^{\infty} |\nu,t,\Psi_0\rangle\langle\Psi_0,0,\nu|\Phi_1(x,\hbar)\rangle - \\
&\quad - \frac{i}{\hbar}\sum_{|\nu|=0}^{\infty} |\nu,t,\Psi_0\rangle \int_0^t d\tau\, \langle\Psi_0,\tau,\nu|\hat{\mathfrak{H}}_1(t,\Psi_0)\Phi_0^{(N)}(x,\tau,\hbar)\rangle, \\
\Phi_2^{(N)}(x,t,\hbar) &= \sum_{|\nu|=0}^{\infty} |\nu,t,\Psi_0\rangle\langle\Psi_0,0,\nu|\Phi_2(x,\hbar)\rangle - \\
&\quad - \frac{i}{\hbar}\sum_{|\nu|=0}^{\infty} |\nu,t,\Psi_0\rangle \int_0^t d\tau\, \langle\Psi_0,\tau,\nu|\hat{\mathfrak{H}}_1(t,\Psi_0)\Phi_1^{(N)}(x,\tau,\hbar)\rangle - \\
&\quad - \frac{i}{\hbar}\sum_{|\nu|=0}^{\infty} |\nu,t,\Psi_0\rangle \int_0^t d\tau\, \langle\Psi_0,\tau,\nu|\hat{\mathfrak{H}}_2(t,\Psi_0)\Phi_0^{(N)}(x,\tau,\hbar)\rangle,
\end{aligned} \tag{7.5}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Обозначим через $\widehat{\mathcal{F}}^{(N)}(t,\Psi_0)$ оператор, определенный соотношением

$$\widehat{\mathcal{F}}^{(N)}(t,\Psi_0)\Phi(x,t)=\int_0^t d\tau\,\widehat{U}_0^{(N)}(t,\tau,\Psi_0)\hat{\mathfrak{H}}^{(N)}(\tau,\Psi_0)\Phi(x,\tau), \tag{7.6}$$

где $\widehat{U}_0^{(N)}(t,\tau,\Psi_0)$ – оператор эволюции ассоциированного уравнения Шредингера (4.18) при $\Psi_0=\Phi_0$ и оператор $\hat{\mathfrak{H}}^{(N)}(t,\Psi_0)=\sum_{k=1}^N \hbar^{k/2}\hat{\mathfrak{H}}_k(t,\Psi_0)$ определен в (4.16). Тогда из формул (7.1)–(7.6) и утверждения 4.1 вытекает следующая теорема.

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1. *Тогда функция*

$$\Psi^{(N)}(x,t,\hbar)=\sum_{k=0}^{N-2}\frac{1}{k!}\Big[-\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathcal{F}}^{(N)}(t,\Psi_0)\Big]^k\widehat{U}_0^{(N)}(t,0,\Psi_0)\Psi_0(x,\hbar), \tag{7.7}$$

где $N\geqslant 2$, *при* $t\in[0,T]$ *является асимптотическим с точностью* $O(\hbar^{(N+1)/2})$, $\hbar\to 0$, *решением уравнения* (1.1) *и удовлетворяет начальному условию* (7.1), (7.2).

8. ФУНКЦИЯ ГРИНА И НЕЛИНЕЙНЫЙ ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

Покажем, что в классе траекторно-сосредоточенных функций для уравнения (1.1) с любой заданной точностью по $\hbar^{1/2}$, $\hbar\to 0$, можно построить ядро оператора эволюции – функцию Грина соответствующей задачи Коши. Явный вид квазиклассических асимптотик $\Psi^{(N)}(x,t,\hbar)$ (7.7) позволяет получить представление для этой функции Грина $G^{(N)}(x,y,t,s,\Psi_0)$ (справедливое на конечном промежутке $t\in[0,T]$, где выполняются условия (6.3)). Действительно, согласно (7.7) для любой функции $\Psi_0(x,\hbar)\in\mathcal{P}_\hbar^0$ решение задачи Коши с начальным условием

$$\Phi(x,t,\hbar)|_{t=0}=\Psi_0(x,\hbar) \tag{8.1}$$

для линейного ассоциированного уравнения Шредингера (4.8) порядка N имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi^{(N)}(x,t,\hbar,\Psi_0)&=\widehat{R}^{(N)}(t,\Psi_0)\int_{\mathbb{R}^n}dy\,G_0^{(N)}(x,y,t,0,\Psi_0)\varphi(y,\hbar)+O(\hbar^{(N+1)/2})=\\&=\int_{\mathbb{R}^n}dy\,G^{(N)}(x,y,t,0,\Psi_0)\varphi(y,\hbar)+O(\hbar^{(N+1)/2}),\end{aligned} \tag{8.2}$$

где через $\widehat{R}^{(N)}(t,\Psi_0)$ обозначен оператор

$$\widehat{R}^{(N)}(t,\Psi_0)=\sum_{k=0}^{N-2}\frac{1}{k!}\Big[-\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathcal{F}}^{(N)}(t,\Psi_0)\Big]^k. \tag{8.3}$$

Напомним, что функция $G_0^{(N)}(x,y,t,s,\Psi_0)$ и оператор $\widehat{\mathcal{F}}^{(N)}(t,\Psi_0)$ определены формулами (6.4) и (7.6), соответственно. Следовательно, для ядра интегрального оператора $G^{(N)}$ в (8.2) имеем

$$G^{(N)}(x,y,t,0,\Psi_0)=\widehat{R}^{(N)}(t,\Psi_0)G_0^{(N)}(x,y,t,0,\Psi_0).$$

Поскольку $\widehat{R}^{(N)}(0,\Psi_0)=1$, то для произвольного начального момента времени s, $0<s<t$, отсюда следует представление функции Грина задачи Коши (4.8), (8.1) с $s\neq 0$,

$$G^{(N)}(x,y,t,s,,\Psi_0)=\widehat{R}^{(N)}(t,\Psi_0)G_0^{(N)}(x,y,t,s,\Psi_0)\bigl(\widehat{R}^{(N)}(s,\Psi_0)\bigr)^{+}. \tag{8.4}$$

Нетрудно проверить для функций $G^{(N)}(x,y,t,s,\Psi_0)$ следующее правило композиции:

$$\int_{\mathbb{R}^n}du\,G^{(N)}(x,u,t,\tau,\Psi_0)G^{(N)}(u,y,\tau,s,\Psi_0)=G^{(N)}(x,y,t,s,\Psi_0)+O(\hbar^{(N+1)/2}).$$

Обозначим через $\widehat{U}^{(N)}(t,0,\Psi_0)$ приближенный оператор эволюции линейного уравнения (4.18),

$$\widehat{U}^{(N)}(t,0,\Psi_0)\varphi(x,\hbar)=\int_{\mathbb{R}^n}dy\,G^{(N)}(x,y,t,0,\Psi_0)\varphi(y,\hbar),\quad \varphi(x,\hbar)\in L_2(\mathbb{R}^n).$$

В силу (8.4) его можно записать в виде T-упорядоченного дайсоновского разложения

$$\widehat{U}^{(N)}(t,0,\Psi_0)=\sum_{k=0}^{N-2}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^k\int_{\Delta_k^{>}}d^k\tau\,\hat{\mathfrak{H}}_1^{(N)}(\tau_1,t,\Psi_0)\dots\hat{\mathfrak{H}}_1^{(N)}(\tau_k,t,\Psi_0)\widehat{U}_0^{(N)}(t,0,\Psi_0). \tag{8.5}$$

Здесь использованы следующие обозначения: область интегрирования – открытый гипертреугольник

$$\Delta_k^{>}\equiv\{\tau\in[0,t]^k;\quad t>\tau_1>\tau_2>\dots>\tau_N>s\},$$

оператор $\hat{\mathfrak{H}}_1^{(N)}(\tau,t,\Psi_0)$ – оператор “возмущения” $\hat{\mathfrak{H}}^{(N)}(t,\Psi_0)$ (4.16) в уравнении (4.18),

$$\hat{\mathfrak{H}}_1^{(N)}(\tau,t,\Psi_0)=\widehat{U}_0^{(N)}(t,\tau,\Psi_0)\hat{\mathfrak{H}}^{(N)}(\tau,\Psi_0)(\widehat{U}_0^{(N)}(\tau,t,\Psi_0))^{+}, \tag{8.6}$$

а $\widehat{U}_0^{(N)}(t,s,\Psi_0)$ – оператор эволюции ассоциированного линейного уравнения Шредингера нулевого порядка (4.18) с ядром $G_0^{(N)}(x,y,t,s,\Psi_0)$ (6.4).

Из соотношения (8.2) и утверждения 4.1 вытекает, что действие оператора (8.5) на функцию $\Psi_0(x,\hbar)$ определяет асимптотическое по $\operatorname{mod}\hbar^{(N+1)/2}$ решение задачи Коши (2.9)–(2.12) для уравнения типа Хартри в виде

$$\Psi^{(N)}(x,t,\hbar)=\widehat{U}^{(N)}(t,0,\Psi_0)\Psi_0(x,\hbar),\quad \Psi_0(x,\hbar)\in\mathcal{P}_\hbar^0. \tag{8.7}$$

Следовательно, оператор (8.5) является приближенным (с точностью $O(\hbar^{(N+1)/2})$, $\hbar\to 0$) оператором эволюции для уравнения (1.1) в классе траекторно-сосредоточенных функций.

Из представления (8.7) для построенных асимптотических решений непосредственно следует (см. также [88]–[90]) теорема.

Теорема 8.1 (нелинейный принцип суперпозиции). *Пусть* $\Psi_j(x,t,\hbar,y_j^{(N)}(t,\hbar))$ – *асимптотическое с точностью* $O(\hbar^{(N+1)/2})$ *решение задачи Коши для уравнения* (1.1) *с начальным условием* $\Psi_{0j}(x,\hbar)\in\mathcal{P}_0^\hbar$, $j=1,2$. *Тогда решение задачи Коши для этого уравнения с начальным условием*

$$\Psi_{03}(x,\hbar)=c_1\Psi_{01}(x,\hbar)+c_2\Psi_{02}(x,\hbar),\qquad c_1,c_2=\mathrm{const},$$

имеет вид

$$\begin{aligned}\Psi_3\big(x,t,\hbar,y_3^{(N)}(t,\hbar)\big)&=\widehat{U}^{(N)}(t,0,\Psi_{03})\Psi_{03}(x)=\\&=c_1\widehat{U}^{(N)}(t,0,\Psi_{03})\Psi_{01}(x)+c_2\widehat{U}^{(N)}(t,0,\Psi_{03})\Psi_{02}(x)=\\&=c_1\Psi_1\big(x,t,\hbar,y_3^{(N)}(t,\hbar)\big)+c_2\Psi_2\big(x,t,\hbar,y_3^{(N)}(t,\hbar)\big).\end{aligned}$$

Здесь через $y_j^{(N)}(t,\hbar)$ *обозначено решение системы Гамильтона–Эренфеста* (3.2) *порядка* N, $N\geqslant 2$, *с начальным условием, которое определяется формулами* (3.3) *по функциям* $\Psi_{0j}(x,\hbar)$, $j=1,2,3$, *соответственно.*

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство свойств 1–4 из раздела 2

Доказательство свойства 1. Символ оператора $\{\Delta\hat{z}\}^\alpha$ можно записать в виде $(\Delta z)^\alpha=(\Delta p)^{\alpha_p}(\Delta x)^{\alpha_x}$, $(\alpha_p,\alpha_x)=\alpha$, и, следовательно, согласно определению упорядоченных по Вейлю псевдодифференциальных операторов [1] для среднего значения $\sigma_\alpha(t,\hbar)$ оператора $\{\Delta\hat{z}\}^\alpha$ имеем

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha(t,\hbar)=\langle\Phi|\{\Delta\hat{z}\}^\alpha|\Phi\rangle=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int_{\mathbb{R}^{3n}}dx\,dy\,dp\Phi^*(x,t,\hbar)\times\\\times\exp\Big(\frac{i}{\hbar}\langle(x-y),p\rangle\Big)[\Delta p]^{\alpha_p}\Big(\frac{\Delta x+\Delta y}{2}\Big)^{\alpha_x}\Phi(y,t,\hbar),\end{aligned}$$

где $\Delta y=y-X(t,\hbar)$. После замены переменных

$$\Delta x=\sqrt{\hbar}\xi,\qquad\Delta y=\sqrt{\hbar}\zeta,\qquad\Delta p=\sqrt{\hbar}\omega$$

с учетом явного вида функций

$$\Phi(x,t,\hbar)=\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}(S(t,\hbar)+\langle P(t,\hbar),\Delta x\rangle)\Big\}\varphi\Big(\frac{\Delta x}{\sqrt{\hbar}},t,\sqrt{\hbar}\Big)\in\mathcal{P}_\hbar^t,$$

найдем

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha(t,\hbar)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\hbar^{3n/2}\hbar^{|\alpha|/2}2^{-|\alpha_p|}\int_{\mathbb{R}^{3n}}d\xi\,d\zeta\,d\omega\,\varphi^*(\xi,t,\sqrt{\hbar})\times\\\times\exp\{i\langle\xi-\zeta,\omega\rangle\}\omega^{\alpha_x}(\xi+\zeta)^{\alpha_p}\varphi(\zeta,t,\hbar)=\hbar^{(n+|\alpha|)/2}M_\alpha(t,\sqrt{\hbar}),\\\|\Phi\|^2=\hbar^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}d\xi\,\varphi^*(\xi,t,\sqrt{\hbar})\varphi(\xi,t,\sqrt{\hbar})=\hbar^{n/2}M_0(t,\sqrt{\hbar}).\end{aligned}$$

В силу гладкой зависимости функции $\varphi(\xi, t, \sqrt{\hbar}\,)$ от $\sqrt{\hbar}$, $\hbar \to 0$, и того, что $M_0(t, \hbar) > 0$, отсюда следует

$$\Delta_\alpha(t, \hbar) = \frac{\sigma_\alpha(t, \hbar)}{\|\Phi\|^2} = \hbar^{|\alpha|/2} \frac{M_\alpha(t, \sqrt{\hbar}\,)}{M_0(t, \sqrt{\hbar}\,)} \leqslant$$

$$\leqslant \hbar^{|\alpha|/2} \max_{t \in [0,T]} \frac{M_\alpha(t, \sqrt{\hbar}\,)}{M_0(t, \sqrt{\hbar}\,)} \leqslant C(T) \hbar^{|\alpha|/2}, \quad C(T) > 0.$$

Свойство 2 непосредственно следует из явного вида траекторно-сосредоточенных функций (см. (2.1)) и определения (2.3).

Доказательство свойства 3. Пусть $\phi(x) \in \mathbb{S}$. Тогда для любой функции $\Phi(x, t, \hbar) \in \mathcal{P}_\hbar^t$ выражение

$$\left\langle \frac{|\Phi(t, \hbar)|^2}{\|\Phi(t, \hbar)\|^2} \;\Big|\; \phi \right\rangle = \frac{1}{\|\Phi(t, \hbar)\|^2} \int_{\mathbb{R}_x^n} \phi(x) |\Phi(x, t, \hbar)|^2 \, dx =$$

$$= \frac{1}{\|\varphi(t, \sqrt{\hbar}\,)\|^2} \int_{\mathbb{R}_x^n} \phi(x) \left| \varphi\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\hbar}}, t, \sqrt{\hbar} \right) \right|^2 dx$$

после замены переменных $\xi = \Delta x / \sqrt{\hbar}$ преобразуется к виду

$$\left\langle \frac{|\Phi(t, \hbar)|^2}{\|\Phi(t, \hbar)\|^2} \;\Big|\; \phi \right\rangle = \frac{\hbar^{n/2}}{\|\varphi(t, \sqrt{\hbar}\,)\|^2} \int_{\mathbb{R}_\xi^n} \phi(X(t, \hbar) + \sqrt{\hbar}\xi) |\varphi(\xi, t, \sqrt{\hbar}\,)|^2 \, d\xi.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу $\hbar \to 0$, воспользовавшись регулярной зависимостью функции $\varphi(\xi, t, \sqrt{\hbar}\,)$ от $\sqrt{\hbar}$ и тем, что

$$\|\varphi(t, \sqrt{\hbar}\,)\|^2 = \hbar^{n/2} \int_{\mathbb{R}_\xi^n} |\varphi(\xi, t, \sqrt{\hbar}\,)|^2 \, d\xi,$$

получим требуемое утверждение. Доказательство соотношения (2.7) аналогично предыдущему, если заметить, что фурье-образ функции $\Phi(x, t, \hbar) \in \mathcal{P}_\hbar^t$ имеет вид

$$\tilde{\Phi}(p, t, \hbar) = \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \big[S(t, \hbar) - \langle p, X(t, \hbar) \rangle \big] \right\} \tilde{\varphi}\left(\frac{p - P(t, \hbar)}{\sqrt{\hbar}}, t, \sqrt{\hbar} \right),$$

где

$$\tilde{\varphi}(\omega, t, \sqrt{\hbar}\,) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}_\xi^n} e^{-i\langle \omega, \xi \rangle} \varphi(\xi, t, \sqrt{\hbar}\,) \, d\xi.$$

Доказательство свойства 4 аналогично доказательству соотношений (2.6) и (2.7).

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00087) и Министерства образования РФ (грант № Е00-1.0-126).

Список литературы

[1] *М. В. Карасев, В. П. Маслов*. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.

[2] *С. Р. де Гроот, Л. Г. Сатторп*. Электродинамика. М.: Мир, 1982.

[3] *С. И. Пекар*. Исследования по электронной теории кристаллов. М.: Гостехиздат, 1951.

[4] *P. Ring, P. Schuck*. The Nuclear Many-Body Problem. New York: Springer, 1980.

[5] *J. Kurlandski*. Bull. Acad. Pol. Sci. 1982. V. 30. № 3, 4. P. 135.

[6] *В. М. Ольхов*. ТМФ. 1982. Т. 51. № 1. С. 150.

[7] *D. V. Chudnovsky*. Infinite component two-dimensional completely integrable systems of KdV type. In: The Riemann Problem, Complete Integrability and Arithmetic Applications. Lect. Notes Math. V. 925. Eds. D. Chudnovsky and G. Chudnovsky. Berlin: Springer, 1982. P. 71.

[8] *А. А. Боголюбская, И. Л. Боголюбский*. ТМФ. 1983. Т. 54. № 2. С. 258.

[9] *D. Gogny, P. L. Lions*. J. Math. Phys. 1986. V. 27. № 1. P. 211.

[10] *D. R. Hartree*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1928. V. 24. P. 89; P. 111; P. 426.

[11] *Г. Ефимов*. Нелокальное взаимодействие квантованных полей. М.: Наука, 1977.

[12] *Ф. А. Березин*. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.

[13] *А. С. Давыдов*. Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наукова Думка, 1984.

[14] *П. Н. Брусов, В. Н. Попов*. Сверхтекучесть и коллективные свойства квантовых жидкостей. М.: Наука, 1988.

[15] *Y. Lai, H. A. Haus*. Phys. Rev. A. 1989. V. 40. P. 844; P. 854.

[16] *D. E. Fillips, M. D. Lukin*. Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. № 5. P. 783.

[17] *A. Zozulya, S. Diddams, T. Clement*. Phys. Rev. A. 1988. V. 58. № 4. P. 72.

[18] *A. Bove, G. Da Prato, G. Fano*. Commun. Math. Phys. 1974. V. 37. P. 183.

[19] *J. M. Chadam, R. T. Glassey*. J. Math. Phys. 1975. V. 16. P. 1122.

[20] *R. T. Glassey*. Commun. Math. Phys. 1977. V. 53. № 1. P. 9.

[21] *V. Delgado*. Proc. Amer. Math. Soc. 1978. V. 69. № 2. P. 289.

[22] *I. Fukuda, M. Tsutsumi*. J. Math. Anal. Appl. 1978. V. 66. № 2. P. 358.

[23] *E. B. Davies*. Ann. Inst. H. Poincare. A. 1979. V. 31. № 4. P. 319.

[24] *J. Ginibre, G. Velo*. Math. Z. 1980. V. 170. № 2. P. 109.

[25] *Y. Choquet-Bruhat*. C. R. Acad. Sci. Paris. 1981. Ser. 1. V. 292. № 2. P. 153.

[26] *W. A. Strauss*. J. Funct. Anal. 1981. V. 43. № 3. P. 281.

[27] *G. P. Menzala, W. A. Strauss*. Diff. Equat. 1982. V. 43. № 1. P. 93.

[28] *K. Nakamitsu, M. Tsutsumi*. J. Math. Phys. 1986. V. 27. № 1. P. 211.

[29] *M. Reeken*. J. Math. Phys. 1970. V. 11. P. 2505.

[30] *K. Gustafson, D. Sather*. Rand. Math. 1971. V. 4. P. 723.

[31] *J. Wolkowsky*. Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 22. P. 551.

[32] *C. Stuart*. Arch. Rat. Mech. Anal. 1973. V. 51. P. 60.

[33] *G. Fonte, R. Mignani, G. Schiffrer*. Comm. Math. Phys. 1973. V. 33. P. 293.

[34] *E. H. Lieb, B. Simon*. Commun. Math. Phys. 1977. V. 53. № 3. P. 185.

[35] *E. H. Lieb*. Stud. Appl. Math. 1977. V. 57. P. 93.

[36] *P. Bader*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh. A. 1978. V. 82. № 1, 2. P. 27.

[37] *G. P. Menzala*. On a Hartree type equation: existence of regular solutions. In: Functional Differential Equations and Bifurcations. Lect. Notes Math. V. 799. Ed. A. F. Izé. Berlin: Springer, 1980. P. 277.

[38] *G. Rosensteel, E. Ihrig*. J. Math. Phys. 1980. V. 21. № 8. P. 2297.

[39] *P. L. Lions*. Nonlinear Anal.: Theory, Meth., Appl. 1980. V. 4. № 6. P. 1063.

[40] *A. Bongers*. Z. Angew. Math. Mech. 1980. V. 60. № 7. P. 240.
[41] *J. D. Gegenberg, A. J. Das*. J. Math. Phys. 1981. V. 22. № 8. P. 1736.
[42] *P. L. Lions*. Nonlinear Anal.: Theory, Meth., Appl. 1981. V. 5. № 11. P. 1245.
[43] *H. J. Efinger, H. Grosse*. Lett. Math. Phys. 1984. V. 8. № 2. P. 91.
[44] *P. L. Lions*. Comm. Math. Phys. 1987. V. 109. № 1. P. 33.
[45] *В. П. Маслов*. Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. М.: Наука, 1976.
[46] *В. П. Маслов*. Уравнения самосогласованного поля. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 11. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНИТИ, 1978. С. 153.
[47] *М. В. Карасев, В. П. Маслов*. Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. II. Операторные унитарно-нелинейные уравнения. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 13. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНИТИ, 1979. С. 145.
[48] *В. П. Маслов*. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
[49] *И. В. Сименог*. ТМФ. 1977. Т. 30. № 3. С. 408.
[50] *С. А. Вакуленко, В. П. Маслов, И. А. Молотков, А. И. Шафаревич*. Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 6. С. 743.
[51] *И. А. Молотков, С. А. Вакуленко, М. А. Бисярин*. Нелинейные локализованные волновые процессы. М.: Янус-К, 1999.
[52] *С. И. Черных*. ТМФ. 1982. Т. 52. № 3. С. 491.
[53] *М. В. Карасев, А. В. Перескоков*. ТМФ. 1989. Т. 79. № 2. С. 198.
[54] *М. В. Карасев, А. В. Перескоков*. ТМФ. 1993. Т. 97. № 1. С. 78.
[55] *М. В. Карасев, А. В. Перескоков*. Изв. РАН. Сер. Матем. 2001. Т. 65. № 5. С. 33.
[56] *М. В. Карасев, А. В. Перескоков*. Изв. РАН. Сер. Матем. 2001. Т. 65. № 6. С. 57.
[57] *V. P. Maslov*. Russ. J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 2. P. 1.
[58] *В. П. Маслов, О. Ю. Шведов*. Метод комплексного ростка в квантовой теории поля. М.: Изд-во УРСС, 1998.
[59] *В. Г. Багров, В. В. Белов, И. М. Тернов*. ТМФ. 1982. Т. 50. № 3. С. 390.
[60] *V. G. Bagrov, V. V. Belov, I. M. Ternov*. J. Math. Phys. 1983. V. 24. № 12. P. 2855.
[61] *В. Г. Багров, В. В. Белов, А. Ю. Трифонов*. Квазиклассически сосредоточенные состояния уравнения Шредингера. В сб.: Лекционные заметки по теоретической и математической физике. Т. 1. Ч. 1. Ред. А. В. Аминова. Казань: Каз. ГУ, 1996. С. 15.
[62] *V. G. Bagrov, V. V. Belov, A. Yu. Trifonov*. Ann. Phys. 1996. V. 246. № 2. P. 231.
[63] *В. В. Белов, В. П. Маслов*. ДАН СССР. 1989. Т. 305. № 3. С. 574.
[64] *В. В. Белов, В. П. Маслов*. ДАН СССР. 1990. Т. 311. № 4. С. 849.
[65] *В. В. Белов, М. Ф. Кондратьева*. ТМФ. 1992. Т. 92. № 1. С. 41.
[66] *Э. Шредингер*. Непрерывный переход от микро- к макромеханике. В сб.: Избр. тр. по квантовой механике. М.: Наука, 1976. С. 51.
[67] *R. J. Glauber*. Phys. Rev. 1963. V. 130. № 6. P. 2529; V. 131. № 6. P. 2766.
[68] *П. К. Рашевский*. УМН. 1958. Т. 13. № 3. С. 3.
[69] *J. R. Klauder*. J. Math. Phys. 1963. V. 4. № 8. P. 1055; P. 1058; 1964. V. 5. № 2. P. 177.
[70] *Н. А. Черников*. ЖЭТФ. 1967. Т. 53. № 3. С. 1006.
[71] *М. А. Малкин, В. И. Манько*. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.
[72] *А. М. Переломов*. Обобщенные когерентные состояния и их применение. М.: Наука, 1987.
[73] *В. В. Белов*. Квазиклассический предел уравнений движения квантовых средних для нерелятивистских систем с калибровочными полями. Препринт № 58. Томск: Томский научный центр СО АН СССР, 1989.

[74] *V. G. Bagrov, V. V. Belov, M. F. Kondratyeva, A. M. Rogova, A. Yu. Trifonov*. J. Moscow Phys. Soc. 1993. V. 3. P. 309.
[75] *В. Г. Багров, В. В. Белов, М. Ф. Кондратьева*. ТМФ. 1994. Т. 98. № 1. С. 48.
[76] *В. В. Белов, М. Ф. Кондратьева*. Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 6. С. 27.
[77] *В. В. Белов, М. Ф. Кондратьева*. Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 6. С. 803.
[78] *V. P. Maslov*. The Complex WKB Method for Nonlinear Equations. I. Linear Theory. Basel, Boston, Berlin: Birkhauser, 1994.
[79] *H. Hayashi, P. I. Naumkin*. SUT J. Math. 1998. V. 34. № 1. P. 13.
[80] *J. Ginibre, G. Velo*. Rev. Math. Phys. 2000. V. 12. P. 361; Ann. Inst. H. Poincare. 2000. V. 1. P. 753.
[81] *В. П. Маслов*. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
[82] *Г. Бейтман, А. Эрдейи*. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966.
[83] *В. И. Арнольд*. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1983.
[84] *В. М. Бабич, В. С. Булдырев*. Асимптотические методы в теории дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
[85] *М. Рид, Б. Саймон*. Методы современной математической физики. Т. 3. М.: Мир, 1982.
[86] *М. М. Попов*. Функции Грина уравнения Шредингера с квадратичным потенциалом. В сб.: Пробл. матем. физики. Вып. 6. Ред. В. М. Бабич. Л.: ЛГУ, 1973. С. 119.
[87] *V. V. Dodonov, I. A. Malkin, V. I. Man'ko*. Int. J. Theor. Phys. 1975. V. 14. № 1. P. 37.
[88] *В. В. Белов, Г. Н. Сережников, А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов*. Симметрия и дифференциальные уравнения. В сб.: Тр. междунар. конф. Красноярск, 21–25 августа 2000 г. Ред. В. К. Андреев. С. 39.
[89] *В. Д. Баранов, В. В. Белов, А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов*. Новейшие проблемы теории поля. В сб.: Тр. Междунар. летней школы-семинара по современным проблемам теор. и матем. физики. Ред. А. В. Аминова. Казань: Каз. ГУ, 2000. С. 22.
[90] *Г. Н. Сережников, А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов*. Изв. Томск. гос. ун-та. 2000. Т. 1. С. 39.

Поступила в редакцию 19.IX.2001 г.