I. B. Zhukov, G. K. Pak, Approximational approach to ramification theory,
Algebra i Analiz, 2015, Volume 27, Issue 6, 150–162

https://www.mathnet.ru/eng/aa1470

Алгебра и анализ
Том 27 (2015), №6

Сергею Владимировичу Востокову
с глубокой благодарностью

АППРОКСИМАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ ВЕТВЛЕНИЯ

© И. Б. ЖУКОВ, Г. К. ПАК

В статье предлагается новый подход к теории ветвления в конечных расширениях полных дискретно нормированных полей с несовершенным полем вычетов. Он основан на понятии расстояния между расширениями, которое показывает, насколько у этих расширений может различаться глубина ветвления, если мы производим замены базы определенного типа. Для двумерных локальных полей простой характеристики доказано следующее свойство. Если расстояние между двумя константными (т.е. определенными над заданным подполем с совершенным полем вычетов) расширениями равно нулю, то у них совпадают соответствующие функции Хассе–Эрбрана. Обратное проверено только для расширений степени p.

Введение

В многочисленных работах, посвященных теории ветвления полных дискретно нормированных полей в случае несовершенного поля вычетов, часто встречаются примеры, показывающие отличия этого случая от классического, когда поле вычетов совершенно. В частности, в §5 обзора [1] (= [2]) приведен пример композита двух расширений Артина–Шрайера, для которого не выполняется свойство Эрбрана, а тем самым и практически все другие свойства, составляющие классическую «nice ramification theory». Ключевое наблюдение состоит в том, что если у нас есть расширение L/K с группой Галуа, изоморфной $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$, и мы знаем число (скачок) ветвления для каждого подрасширения M/K степени p, то в классическом случае мы можем по этим данным определить число

Ключевые слова: высшие локальные поля, ветвление, несовершенное поле вычетов.
Работа поддержана грантом РФФИ 14-01-00393-а.

ветвления для всех L/M, а в неклассическом это не так; при этом мы не всегда можем определить даже тип расширений L/M (т.е. дикие они или свирепые).

Из этих примеров видно, что «трудности» в неклассическом случае начинаются уже на уровне элементарно абелевых расширений. Но, может быть, они и заканчиваются на этом уровне?

Можно было бы ответить на этот вопрос положительно, если бы мы научились в некотором смысле «приближать» произвольное конечное p-расширение L/K полного дискретно нормированного поля простой характеристики p элементарно абелевым расширением L'/K, которое было бы похожим на исходное в смысле теории ветвления (возможно, после замены K на некоторое его ручное расширение). Это требование означает, что L'/K и L/K должны иметь близкие инварианты ветвления, в том числе после той или иной замены базы. Более того, при этом естественно ожидать, что соответствующее элементарно абелево расширение может быть определено над подполем поля K, представляющим собой пополнение $\mathbb{F}_p(X_1, \dots, X_n)$ для подходящего n, и в конечном счете над n-мерным локальным полем $\mathbb{F}_p((X_1)) \dots ((X_n))$.

В случае полного дискретно нормированного поля характеристики 0 с полем вычетов характеристики $p > 0$ числа ветвления элементарно абелевых расширений ограничены сверху, поэтому мы должны будем работать в итоге не только с элементарно абелевыми, но со всеми абелевыми расширениями поля вида $\mathbb{Q}_p\{\{X_1\}\} \dots \{\{X_{n-1}\}\}$.

Реализация этой идеи позволила бы в некотором смысле свести теорию ветвления к случаю элементарно абелевых (соответственно всех абелевых) расширений n-мерных локальных полей наиболее простого вида, т.е. к изучению подгрупп K_nF/pK_nF, где

$$F = \mathbb{F}_p((X_1)) \dots ((X_n)),$$

в случае простой характеристики или подгрупп K_nF, где

$$F = \mathbb{Q}_p\{\{X_1\}\} \dots \{\{X_{n-1}\}\},$$

в случае разных характеристик.

Заметим, что в классическом случае близость расширений, о которой идет речь, сводится к близости их чисел ветвления с учетом кратности. Теорема Хассе–Арфа ограничивает набор возможных значений скачков ветвления в верхней нумерации целыми числами. Однако поскольку мы допускаем ручные замены базы, при соответствующей нормализации эти скачки могут иметь знаменатели, взаимно простые с p, и аналогом интересующего нас утверждения служит простое наблюдение о том, что мы можем приблизить заданный набор положительных рациональных чисел числами, у которых знаменатели не содержат множитель p.

В неклассическом случае полная информация о ветвлении (включающая скрытые инварианты, проявляющиеся при замене базы), по-видимому, не может быть выражена конечным набором дискретных инвариантов (см. обсуждение в [1]). В то же время в случае расширения, заданного уравнением Артина–Шрайера $x^p - x = a$, вся необходимая информация содержится в «главной части» элемента a, т.е. в $a \mod \deg 0$.

Определенным подтверждением идеи о том, что инварианты ветвления «проявляются» на элементарно абелевом уровне, служат результаты работ [3, 4], где изучаются композиты заданного расширения и максимального элементарно абелевого расширения с ограниченным ветвлением.

В данной статье мы вводим понятие расстояния между расширениями данного поля на примере двумерных локальных полей простой характеристики и проверяем первое важное свойство: если расстояние между двумя константными (т.е. определенными над заданным подполем с совершенным полем вычетов) расширениями равно нулю, то у них совпадают соответствующие функции Хассе–Эрбрана (предложение 2.3). Обратное пока проверено только для расширений степени p (следствие 2.2.1).

Обозначения. Всюду в данной работе:
- k — совершенное поле характеристики $p > 0$;
- $\tilde{k}$ — некоторое совершенное надполе k;
- $\lambda \in \tilde{k}$ — элемент, трансцендентный над k.

Выражение «$+\dots$» обозначает прибавление членов более высокого порядка, чем все предыдущие. Запись вида $O(a)$ обозначает произвольный элемент рассматриваемого поля, нормирование которого не меньше, чем нормирование a.

§1. Вычисления в классическом случае

В этом параграфе мы изучаем инварианты ветвления для композитов расширений полных дискретно нормированных полей с совершенным полем вычетов. Утверждение следующей леммы, уточняющей лемму 4.3.1 в [1, 2], должно быть известным, но мы не нашли его в литературе.

Лемма 1.1. *Пусть $F = k((\pi))$ и L_i/F — расширение, заданное уравнением Артина–Шрайера*

$$x_i^p - x_i = a_i = \theta_i \pi^{-s_i} + \dots, \quad \theta_i \in k^*, \ s_i > 0, \ p \nmid s_i,$$

для $i = 1, 2$. Предположим, что либо $s_1 \neq s_2$, либо $\theta_1/\theta_2 \notin \mathbb{F}_p^*$. Обозначим через π_1 произвольный простой элемент в L_1 такой, что $\pi = \pi_1^p + \dots$

Тогда расширение L_2L_1/L_1 может быть задано уравнением Артина–Шрайера

$$x^p - x = \theta_2' \pi_1^{-s_2'} + \dots,$$

где

$$s_2' = \begin{cases} s_2, & s_2 \leqslant s_1, \\ ps_2 - (p-1)s_1, & s_2 > s_1, \end{cases}$$

и

$$\theta_2' = \begin{cases} \theta_2^{p^{-1}}, & s_2 < s_1, \\ \theta_2^{p^{-1}} - \theta_2\theta_1^{p^{-1}-1}, & s_2 = s_1, \\ -s_2 s_1^{-1}\theta_2\theta_1^{p^{-1}-1}, & s_2 > s_1. \end{cases}$$

Доказательство. Утверждение леммы не зависит от выбора подходящего π_1. Путем замены π_1 можно обеспечить выполнение условия

$$\pi = \pi_1^p + \delta, \quad v_1(\delta) > p,\ p \nmid v_1(\delta),$$

где v_1 — нормирование в L_1. Из

$$x_1^p - x_1 = \theta_1 \pi^{-s_1} + \dots \tag{1}$$

немедленно следует

$$x_1 = \theta_1^{p^{-1}} \pi_1^{-s_1} + \dots$$

Подставляя это выражение вновь в (1) и выявляя в обеих частях члены, содержащие π_1 в минимальной степени, не кратной p, получаем

$$-\theta_1^{p^{-1}} \pi_1^{-s_1} = -s_1\theta_1\pi_1^{p\cdot(-s_1-1)} \cdot \delta + \dots,$$

откуда

$$\pi = \pi_1^p + s_1^{-1}\theta_1^{p_1^{-1}-1}\pi_1^{p+(p-1)s_1} + \dots \tag{2}$$

Пусть

$$a_2 = \sum_{i \geqslant -s_2} \varepsilon_i \pi^i, \quad \varepsilon_i \in k,$$

(в частности, $\varepsilon_{-s_2} = \theta_2$). Из (2) получаем

$$a_2 = \sum_{i \geqslant -s_2} \varepsilon_i \pi_1^{pi} - s_2 s_1^{-1}\theta_2\theta_1^{p^{-1}-1}\pi_1^{-ps_2+(p-1)s_1} + O(\pi_1^{-ps_2+(p-1)s_1+1}).$$

Отсюда вытекает, что расширение L_1L_2/L_1 может быть задано уравнением Артина–Шрайера с правой частью

$$a_2' = \sum_{i \geqslant -s_2} \varepsilon_i^{p^{-1}} \pi_1^i - s_2 s_1^{-1}\theta_2\theta_1^{p^{-1}-1}\pi_1^{-ps_2+(p-1)s_1} + O(\pi_1^{-ps_2+(p-1)s_1+1}),$$

и нетрудно видеть, что

$$a_2' = \begin{cases} \theta_2^{p^{-1}} \pi_1^{-s_2} + \dots, & s_2 < s_1, \\ (\theta_2^{p^{-1}} - \theta_2 \theta_1^{p^{-1}-1}) \pi_1^{-s_2} + \dots, & s_2 = s_1, \\ -s_2 s_1^{-1} \theta_2 \theta_1^{p^{-1}-1} \pi_1^{-ps_2 + (p-1)s_1} + \dots, & s_2 > s_1, \end{cases}$$

что составляет утверждение леммы. □

Замечание 1.1.1. Формально условие $\theta_1/\theta_2 \notin \mathbb{F}_p^*$ (при $s_1 = s_2$) в доказательстве не используется, однако именно при этом условии во втором случае получаем $\theta_2^{p^{-1}} - \theta_2 \theta_1^{p^{-1}-1} \neq 0$. Тем самым в каждом из случаев нормирование a_2' отрицательно и не кратно p, что позволяет определить число ветвления L_1L_2/L_1. Нетрудно видеть, что при $\theta_1/\theta_2 \in \mathbb{F}_p^*$ число ветвления определить невозможно (см. пример в начале следующего параграфа).

Замечание 1.1.2. Аналогичное утверждение легко доказать и в разнохарактеристическом случае.

Если выполнено $\theta_1/\theta_2 \notin \mathbb{F}_p^*$ или $s_1 \neq s_2$, будем говорить, что расширения L_1/K и L_2/K *не соприкасаются.* Это понятие легко распространить на p-расширения произвольной степени.

Пусть $F = k((\pi))$. Будем говорить, что конечные вполне разветвленные p-расширения Галуа L_1/F и L_2/F не соприкасаются, если для любых промежуточных полей $F \subset S_i \subset T_i \subset L_i$, где S_i/F нормально и T_i/S_i — расширение Галуа степени p $(i = 1, 2)$, можно утверждать, что T_1S_2/S_1S_2 и S_1T_2/S_1S_2 не соприкасаются.

Следствие 1.1.3. *Пусть $F = \tilde{k}((\pi))$ и E/F, L/F — конечные вполне разветвленные p-расширения Галуа, причем E/F (соответственно L/F) получено присоединением элемента, алгебраичного над $k((\pi))$ (соответственно над $k((\lambda\pi))$). Тогда E/F и L/F не соприкасаются.*

Доказательство. Зафиксируем башни расширений $F \subset S_1 \subset T_1 \subset E$ и $F \subset S_2 \subset T_2 \subset L$, где S_i/F нормальные и T_i/S_i — расширение Галуа степени p $(i = 1, 2)$. Построим произвольные башни

$$F = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n = E$$

и

$$F = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_m = L,$$

где все E_{i+1}/E_i и L_{j+1}/L_j представляют собой расширения Галуа степени p, причем S_1, T_1 входят в число E_i, а S_2, T_2 входят в число L_j. Положим $E_{ij} = E_iL_j$ и проверим индукцией по $i + j = n$ следующее утверждение.

Расширение $E_{i+1,j}/E_{ij}$ (*соответственно* $E_{i,j+1}/E_{ij}$) *задается присоединением корня уравнения* $x^p - x = a$, *где* $v_{E_{ij}}(a) = -s < 0$, $p \nmid s$, *и редукция* $\pi^s a^{p^n}$ *имеет вид* $f_{ij}(\lambda)$ (*соответственно* $g_{ij}(\lambda)$), *где* $f_{ij}, g_{ij} \in k(X)$, *причем* $v_X(f_{ij}) \geqslant 0$, $v_X(g_{ij}) < 0$, *где* v_X — X*-адическое нормирование на* $k(X)$.

Из последнего условия непосредственно следует, что $f_{ij}(\lambda)/g_{ij}(\lambda) \notin \mathbb{F}_p^*$, и тем самым $E_{i+1,j}/E_{ij}$ и $E_{i,j+1}/E_{ij}$ не соприкасаются.

В качестве базы индукции рассмотрим $E_{i+1,0}/E_{i0}$ и $E_{0,j+1}/E_{0j}$. Выберем в E_{i0} простые элементы π_i, алгебраичные над $k((\pi))$; можно считать

$$\pi = \pi_i^{p^i} + \dots$$

Тогда $E_{i+1,0}/E_{i0}$ задается уравнением Артина–Шрайера с правой частью из $k((\pi_i))$, и в качестве f_{i0} можно взять элемент k^*. Что касается расширений E_{0j}, выберем в них простые элементы ρ_j, алгебраичные над $k((\lambda\pi))$; можно считать

$$\lambda\pi = \rho_j^{p^j} + \dots$$

Заметим, что $E_{0,j+1}/E_{0j}$ можно задать уравнением $x^p - x = a$, где $a \in k((\rho_j))$, т.е. $a = c\rho_j^{-s} + \dots$, $s > 0$, $p \nmid s$, $c \in k^*$. Тогда редукция $\pi^s a^{p^j}$ имеет вид $c^{p^j}\lambda^{-s}$, т. е. $c^{p^j}X^{-s}$ подходит в качестве g_{0j}.

Для индукционного перехода применим лемму 1.1 (сохраняя обозначения из формулировки леммы) к $E_{i+1,j}/E_{ij}$ и $E_{i,j+1}/E_{ij}$; через π_{ij} обозначим простой элемент E_{ij}, для которого $\pi = \pi_{ij}^{p^n} + \dots$

По индукционному предположению $E_{i+1,j}/E_{ij}$ и $E_{i,j+1}/E_{ij}$ задаются уравнениями Артина–Шрайера

$$x_\nu^p - x_\nu = \theta_\nu \pi_{ij}^{-s_\nu} + \dots, \quad \theta_\nu \in k^*, \ \ s_\nu > 0, \ \ p \nmid s_\nu,$$

для $\nu = 1, 2$, причем $\theta_1^{p^n} = f_{ij}(\lambda)$, $\theta_2^{p^n} = g_{ij}(\lambda)$, $v_X(f_{ij}) \geqslant 0$, $v_X(g_{ij}) < 0$. По лемме 1.1 расширение $E_{i+1,j+1}/E_{i,j+1}$ может быть задано уравнением

$$x^p - x = \theta_2' \pi_{i+1,j}^{-s_2'} + \dots,$$

где $\pi_{ij} = \pi_{i+1,j}^p + \dots$, и

$$\theta_2' = \alpha\theta_2^{p^{-1}} - \beta\theta_2\theta_1^{p^{-1}-1},$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_p$ и не равны нулю одновременно. Возводя в степень p^{n+1}, получаем

$$\begin{aligned}(\theta_2')^{p^{n+1}} &= \alpha\theta_2^{p^n} - \beta\theta_2^{p^{n+1}}\theta_1^{p^n(1-p)} \\ &= \alpha g_{ij}(\lambda) - \beta g_{ij}(\lambda)^p f_{ij}(\lambda)^{1-p} =: g_{i,j+1}(\lambda).\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $v_X(g_{ij}^p f_{ij}^{1-p}) < v_X(g_{ij}) < 0$, откуда $v_X(g_{i,j+1}) < 0$.

Аналогично $E_{i+1,j+1}/E_{i+1,j}$ может быть задано уравнением

$$x^p - x = \theta_1' \pi_{i,j+1}^{-s_1'} + \dots,$$

где $\pi_{ij} = \pi_{i,j+1}^p + \dots$, и

$$\theta_1' = \alpha' \theta_1^{p^{-1}} - \beta' \theta_1 \theta_2^{p^{-1}-1},$$

где $\alpha', \beta' \in \mathbb{F}_p$ и не равны нулю одновременно. Возводя в степень p^{n+1}, получаем

$$\begin{aligned}(\theta_1')^{p^{n+1}} &= \alpha' \theta_1^{p^n} - \beta' \theta_1^{p^{n+1}} \theta_2^{p^n(1-p)} \\ &= \alpha' f_{ij}(\lambda) - \beta' f_{ij}(\lambda)^p g_{ij}(\lambda)^{1-p} =: f_{i+1,j}(\lambda)\end{aligned}$$

и $v_X(f_{i+1,j}) \geqslant 0$. □

До конца этого параграфа будем считать, что $F = k((\pi))$.

Пусть L/F — конечное расширение Галуа степени p^n. Определим его i-й скачок ветвления в верхней нумерации как

$$h_i = h_i(L/F) = \min\{j_0 : |G(L/K)^j| \leqslant p^{n-i} \text{ при любом } j > j_0\}.$$

Иначе говоря, $h_1 \leqslant \ldots \leqslant h_n$ представляют собой обычные скачки ветвления в верхней нумерации, причем скачок кратности m (ср. [1, 2.1]) повторяется в последовательности m раз.

Отметим следующее очевидное утверждение.

Лемма 1.2. *Пусть $h_1 \leqslant \ldots \leqslant h_n$ — все скачки ветвления расширения E/F в верхней нумерации. Тогда существует башня промежуточных полей*

$$F = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E$$

такая, что при каждом $i \leqslant n-1$ скачки ветвления E_i/F равны $h_1, \ldots, h_i$, а единственный скачок ветвления в E_{i+1}/E_i равен

$$H_{i+1} = \psi_{E_i/F}(h_{i+1}) = h_1 + p(h_2 - h_1) + \cdots + p^i(h_{i+1} - h_i).$$

При этом

$$\begin{aligned}d_F(E_{i+1}/E_i) &= p^{-i} d_{E_i}(E_{i+1}/E_i) \\ &= \frac{p-1}{p^{i+1}}(h_1 + p(h_2 - h_1) + \cdots + p^i(h_{i+1} - h_i))\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} d_F(E/F) &= d_F(E_1/E_0) + \cdots + d_F(E_n/E_{n-1}) \\ &= (p-1)\Bigg(\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p^i}\Big)h_1 + \Big(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{p^i}\Big)(h_2-h_1) + \cdots + \frac{1}{p}(h_n-h_{n-1})\Bigg), \end{aligned}$$

откуда

$$d_F(E/F) = (p-1)\Big(\frac{h_1}{p^n} + \frac{h_2}{p^{n-1}} + \cdots + \frac{h_n}{p}\Big). \tag{3}$$

Следующее предложение представляет собой некоторое усиление [1, 4.3.2] для изучаемой ситуации.

Предложение 1.3. *Пусть L/F и T/F — не соприкасающиеся конечные p-расширения Галуа; $[L:F]=p^n$; $h_i = h_i(L/F)$, $i=1,\dots,n$. Тогда*

$$h_i(LT/T) = \psi_{T/F}(h_i), \quad i = 1,\dots,n.$$

Доказательство. Предложение непосредственно вытекает из леммы 1.1 с применением индукции по степени каждого из расширений. □

§2. Расстояние между константными расширениями

В данном параграфе будут использоваться также следующие обозначения:

- $K = k((t))((\pi_0))$;
- $\tilde{K} = \tilde{k}((t))((\pi_0))$;
- f_λ — непрерывный автоморфизм $\tilde{K}$, тривиальный на $\tilde{k}((t))$ и переводящий π_0 в $\lambda\pi_0$;
- $K_\lambda = f_\lambda(K)$.

Определим основной объект исследования — «расстояние» между конечными расширениями данного поля.

Определение 2.1. Пусть L_1/K, L_2/K — некоторые конечные расширения. Положим

$$D(L_1/K, L_2/K) = \frac{p}{p-1}\max_T(|d_K(L_1T/T) - d_K(L_2T/T)|),$$

где T пробегает конечные расширения K_λ; при этом все композиты берутся внутри фиксированного алгебраического замыкания $\tilde{K}$.

Замечание 2.1.1. Если в качестве T мы стали бы брать произвольные конечные расширения K, а не K_λ, это привело бы к неэффективному определению, поскольку некоторые расширения K не находятся в «общем положении» с L_1/K или L_2/K.

Например, пусть a, b, c — натуральные числа, взаимно простые с p, причем $a < b < c$. Обозначим через L_1, L_2, T расширения K, задаваемые следующими уравнениями Артина–Шрайера:

$$\begin{aligned} L_1/K: &\quad x^p - x = \pi_0^{-c} + \pi_0^{-a}; \\ L_2/K: &\quad x^p - x = \pi_0^{-c} + \pi_0^{-b}; \\ T/K: &\quad x^p - x = \pi_0^{-c}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $L_1T/T = L_1'T/T$, где L_1'/K задается уравнением Артина–Шрайера с правой частью π_0^{-a}. Тогда по лемме 1.1 L_1T/T может быть задано уравнением Артина–Шрайера с правой частью вида $\pi^{-a} + \ldots$, где π — некоторый простой в T. Аналогично L_2T/T может быть задано уравнением Артина–Шрайера с правой частью вида $\pi^{-b} + \ldots$ Тем самым

$$\begin{aligned} &\frac{p}{p-1}\Big|d_K(L_1T/T) - d_K(L_2T/T)\Big| \\ &\qquad = \frac{p}{p-1}\left|\frac{p-1}{pe(T/K)}a - \frac{p-1}{pe(T/K)}b\right| = \frac{1}{p}(b-a); \end{aligned}$$

в то же время мы хотим считать расширения L_1/K и L_2/K имеющими одинаковое ветвление и соответственно хотим, чтобы расстояние между ними было нулевым.

Замечание 2.1.2. Рассмотрим похожий пример, в котором a, b, c такие же, как и выше, причем $c/p < a$, и заданы два расширения:

$$\begin{aligned} L_1/K: &\quad x^p - x = \pi_0^{-c} + \pi_0^{-a}t; \\ L_2/K: &\quad x^p - x = \pi_0^{-c} + \pi_0^{-b}t. \end{aligned}$$

В данном случае, как видно из примера в [1, §5], у расширений L_1/K и L_2/K после определенных замен базы (даже при наложении условий «общего положения») будут разные инварианты ветвления; такие расширения мы не хотим рассматривать как одинаково разветвленные. Действительно, если мы зададим T/K_λ уравнением $x^p - x = (\lambda\pi_0)^{-c}$, мы получим, что L_1T/T и L_2T/T задаются уравнениями Артина–Шрайера с правыми частями вида $\pi^{-pa}t + \ldots$ и $\pi^{-pb}t + \ldots$ соответственно, где π — некоторый простой в T. Отсюда

$$\begin{aligned} D(L_1/K, D_2/K) &\geqslant \frac{p}{p-1}\Big|d_K(L_1T/T) - d_K(L_2T/T)\Big| \\ &= \frac{p}{p-1}\left|\frac{p-1}{pe(T/K)}pa - \frac{p-1}{pe(T/K)}pb\right| \\ &= b - a > 0. \end{aligned}$$

Различие между L_1/K и L_2/K можно выявить также при использовании метода «нарезки на кривые», как в примере 9.1.1 в той же работе.

Будем называть расширение L/K константным, если существует алгебраическое расширение $E/k((\pi_0))$ такое, что $L = EK$. (Это определение согласуется с принятым в [5, 6], если в качестве базового подполя в K мы будем выбирать $\mathbb{F}_p((\pi_0))$.)

Мы покажем, что у константных циклических расширений степени p с одинаковым числом ветвления нельзя различить инварианты ветвления даже после «неклассической» замены базы.

Предложение 2.2. *Пусть $F = k((\pi_0)) \subset K$. Зафиксируем конечное расширение T_λ/K_λ и положим $\tilde{T} = T_\lambda \tilde{K}$.*

1. *Пусть L/F — вполне разветвленное циклическое расширение степени p. Тогда $d_K(L\tilde{T}/\tilde{T})$ зависит только от $d_F(E/F)$.*

2. *Пусть $\delta(d) = \delta_{T_\lambda}(d)$ — общее значение $d_K(L\tilde{T}/\tilde{T})$ при $d_F(L/F) = d$. Тогда δ представляет собой ограничение строго возрастающей кусочно-линейной функции, у которой все угловые коэффициенты $\leqslant 1$.*

Доказательство. Обозначим через T/K расширение, изоморфное T_λ/K_λ; продолжение f_λ до изоморфизма T на T_λ также обозначим через f_λ. Через π' и t' будут обозначаться некоторые локальные параметры в T, т.е. $T = k((t'))((\pi'))$.

Тогда π_0 раскладывается в ряд

$$\pi_0 = \sum_{i>0,\, j\in\mathbb{Z}} \theta_{ij} (\pi')^i (t')^j, \quad \theta_{ij} \in k,$$

откуда

$$\lambda\pi_0 = \sum_{i>0,\, j\in\mathbb{Z}} \theta_{ij} \pi^i t^j, \tag{4}$$

где $\pi = f_\lambda(\pi')$, $t = f_\lambda(t')$.

Пусть $v_T(\pi_0) = (p^n\beta, p^n\alpha)$, где $p \nmid (\alpha, \beta)$. Положим $\lambda = \mu^{p^n}$ и перепишем (4) в виде

$$\pi_0 = \prod_{j=n}^{0} \varphi_j(\pi^{p^j}, t^{p^j}),$$

где

$$\varphi_n(X, Y) = \mu^{-p^n} \theta_n^{p^n} X^\alpha Y^\beta + \ldots, \quad \theta_n \in k^*,$$

а при $0 \leqslant j \leqslant n-1$ либо $\varphi_j = 1$, либо

$$\varphi_j(X, Y) = 1 + \theta_j^{p^j} X^{\alpha_j} Y^{\beta_j} + \ldots, \quad \theta_j \in k^*, \ p \nmid (\alpha_j, \beta_j).$$

Сперва будем считать, что L/F задано уравнением $x^p - x = \theta\pi_0^{-m}$, где $\theta \in k^*$, $m > 0$, $(m,p) = 1$.

Расширение $L\tilde{T}/\tilde{T}$ задается присоединением корня уравнения

$$x^p - x = \theta \prod_{j=n}^{0} \varphi_j(\pi^{p^j}, t^{p^j})^{-m} = b_n^{p^n} + b_{n-1}^{p^{n-1}} + \dots + b_0,$$

где $b_n = \mu^{-1}\theta_n \pi^{-m\alpha} t^{-m\beta} + \dots$, и

$$b_j = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi_j = 1,\\ -\mu^{-p^{n-j}} \theta_n^{p^{n-j}} \theta_j \pi^{-mp^{n-j}\alpha + \alpha_j} t^{-mp^{n-j}\beta + \beta_j} + \dots, & \text{если } \varphi_j \neq 1, \end{cases}$$

при $j = n-1, \dots, 0$.

Очевидно, $L\tilde{T}/\tilde{T}$ может быть также задано уравнением $x^p - x = b_n + b_{n-1} + \dots + b_0 =: B$. Считая $\alpha_n = \beta_n = 0$, положим

$$(-\tilde{\beta}_m, -\tilde{\alpha}_m) = \min\{(-mp^{n-j}\beta + \beta_j, -mp^{n-j}\alpha + \alpha_j) | 0 \leqslant j \leqslant n, b_j \neq 0\}.$$

Пусть $j_1, \dots, j_s$ — все значения индекса j, при которых $(-\tilde{\beta}_m, -\tilde{\alpha}_m) = (-mp^{n-j}\beta + \beta_j, -mp^{n-j}\alpha + \alpha_j)$. Тогда коэффициент при $\pi^{\tilde{\alpha}} t^{\tilde{\beta}}$ в B равен

$$\sum_{\tau=1}^{s} \varepsilon_{j_\tau} \mu^{-p^{n-j_\tau}}, \text{ где } \varepsilon_j = \begin{cases} \theta_n, & j = n,\\ -m\theta_n^{p^{n-j}} \theta_j, & j < n. \end{cases}$$

Отметим, что $\varepsilon_{j_\tau} \in k^*$, $\tau = 1, \dots, s$, откуда

$$\sum_{\tau=1}^{s} \varepsilon_{j_\tau} \mu^{-p^{n-j_\tau}} \neq 0,$$

так как μ трансцендентен над k. Следовательно, $v_{\tilde{T}}(B) = -\tilde{\alpha}_m$, и

$$d_K(L\tilde{T}/\tilde{T}) = \frac{p-1}{p} e_{\tilde{T}/K}^{-1} v_T(B) = \frac{p-1}{p} p^{-n} \alpha^{-1} \cdot \tilde{\alpha}_m.$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда L/F задано уравнением

$$x^p - x = \theta^{(m)} \pi_0^{-m} + \theta^{(m-1)} \pi_0^{-m+1} + \dots,$$

где $m > 0$, $\theta^{(i)} \in k$ $(i = m, \dots, 1)$, $\theta^{(i)} = 0$ при $(i,p) \neq 1$, $\theta^{(m)} \neq 0$. Тогда ввиду приведенных выше вычислений $L\tilde{T}/\tilde{T}$ может быть задано уравнением $x^p - x = B^{(m)} + \dots + B^{(1)}$, где $B^{(i)} = 0$ при $\theta^{(i)} = 0$, и $v_{\tilde{T}}(B^{(i)}) = -\tilde{\alpha}_i$ в противном случае. Поскольку $\tilde{\alpha}_i$ строго возрастает с ростом i, отсюда следует, что и в общем случае

$$d_K(L\tilde{T}/\tilde{T}) = \frac{p-1}{p} p^{-n} \alpha^{-1} \cdot \tilde{\alpha}_m,$$

т.е. зависит только от m и обладает остальными указанными в формулировке предложения свойствами. □

Следствие 2.2.1. *Пусть L_1/K, L_2/K — константные расширения Галуа степени p с одинаковым числом ветвления, т.е. $d_K(L_1/K) = d_K(L_2/K)$. Тогда $D(L_1/K, L_2/K) = 0$.*

Предложение 2.3. *Пусть $F = k((\pi_0))$; $E/k((\pi_0))$, $E'/k((\pi_0))$ — вполне разветвленные расширения Галуа одинаковой степени p^n такие, что $D(EK/K, E'K/K) = 0$. Тогда функции Хассе–Эрбрана $\psi_{E/F}$ и $\psi_{E'/F}$ совпадают.*

Доказательство. Пусть $h_1 \leqslant \ldots \leqslant h_n$ (соответственно $h'_1 \leqslant \ldots \leqslant h'_n$) — все скачки ветвления расширения E/F (соответственно E'/F) в верхней нумерации с учетом кратностей. Для натурального числа c, взаимно простого с p, обозначим через T_c/K_λ произвольное константное расширение степени p с числом ветвления c, например, расширение, заданное уравнением Артина–Шрайера с правой частью $(\lambda\pi)^{-c}$. По предложению 1.3 имеем

$$h_i(ET_c/T_c) = \begin{cases} h_i, & h_i \leqslant c, \\ c + p(h_i - c), & h_i > c. \end{cases}$$

По формуле (3) выполнено

$$d_{T_c}(ET_c/T_c) = \frac{h_1}{p^n} + \cdots + \frac{h_m}{p^{n-m+1}} + \frac{c + p(h_{m+1} - c)}{p^{n-m}} + \cdots + \frac{c + p(h_n - c)}{p},$$

где m определено как максимальное, для которого $c \geqslant h_m$.

Предположим вначале, что $h_1, \ldots, h_n$, а также $h'_1, \ldots, h'_n$ — целые числа, взаимно простые с p. Предположим, что $\psi_{E/F} \neq \psi_{E'/F}$, т.е. $h_j \neq h'_j$ при некотором j; будем считать j максимальным с таким свойством. Не умаляя общности, можно считать $h_j < h'_j$.

Из $D(EK/K, E'K/K) = 0$ следует, что $d_{T_c}(ET_c/T_c) = d_{T_c}(E'T_c/T_c)$ при всех c. В частности, при $c = h'_j$ это дает

$$\frac{h_1}{p^n} + \cdots + \frac{h_j}{p^{n-j+1}} = \frac{h'_1}{p^n} + \cdots + \frac{h'_j}{p^{n-j+1}}, \tag{5}$$

а при $c = h_j$ получаем

$$\frac{h_1}{p^n} + \cdots + \frac{h_j}{p^{n-j+1}} = \frac{h'_1}{p^n} + \cdots + \frac{h'_m}{p^{n-m+1}} + \frac{c + p(h'_{m+1} - c)}{p^{n-m}} + \cdots + \frac{c + p(h'_j - c)}{p^{n-j}}, \tag{6}$$

где m — максимальное со свойством $h'_m \leqslant h_j$. Последние $j - m > 0$ слагаемых в правой части (6) больше аналогичных слагаемых в правой части (5), тогда как левые части равенств совпадают, и мы получаем противоречие.

Наконец, общий случай можно свести к рассмотренному, если несколько раз заменить F на его константное расширение степени p с числом ветвления $c = \min(h_1, h'_1)$. При этом мы сперва обеспечиваем, чтобы все h_i и h'_i стали целыми, а на последнем шаге — чтобы они стали сравнимы с c по модулю p и тем самым взаимно просты с p. $\square$

Список литературы

[1] Xiao L., Zhukov I., *Ramification of higher local fields, approaches and questions*, Алгебра и анализ **26** (2014), №5, 1–63.

[2] Xiao L., Zhukov I., *Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions*, Valuation Theory in Interaction. Proc. 2nd Internat. Conf. and Workshop on Valuation Theory (Segovia and El Escorial, Spain, July 18–29, 2011), EMS Series of Congress Reports, European Math. Soc. Zurich, 2014, 600–656.

[3] Жуков И. Б., *Ветвление элементарно абелевых расширений*, Зап. науч. семин. ПОМИ **413** (2013), 106–114.

[4] Жуков И. Б., *Элементарно абелев кондуктор*, Зап. науч. семин. ПОМИ **423** (2014), 126–131.

[5] Жуков И. Б., Коротеев М. В., *Устранение высшего ветвления*, Алгебра и анализ **11** (1999), №6, 153–177.

[6] Жуков И. Б., *О теории ветвления в случае несовершенного поля вычетов*, Мат. сб. **194** (2003), №12, 3–30.

С.-Петербургский
государственный университет
математико-механический факультет
198504, Санкт-Петербург
Петродворец, Университетский пр., 28
Россия
E-mail: i.zhukov@spbu.ru

Поступило 1 сентября 2015 г.

Институт математики и компьютерных наук
Дальневосточного
государственного университета
690000, Владивосток
ул. Октябрьская, 27
Россия
E-mail: pakgk@imcs.dvgu.ru