Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ф. А. Талалян, О перестановках рядов в гильбертовом пространстве,
Матем. заметки, 1972, том 12, выпуск 3, 275–280

https://www.mathnet.ru/mzm9879

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.173
24 апреля 2025 г., 06:34:54

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 3 (1972), 275—280

УДК 513.88

О ПЕРЕСТАНОВКАХ РЯДОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ф. А. Талалян

На ряды в гильбертовом пространстве переносится одна теорема о перестановках числовых рядов, доказанная Р. П. Агню. Дается новое доказательство теоремы В. Орлича о безусловно сходящихся рядах в гильбертовом пространстве. Библ. 3 назв.

1. Пусть π есть метрическое пространство всех перестановок множества натуральных чисел, где расстояние между двумя перестановками $\sigma = (m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots)$ и $\tau = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ определено по формуле Фреше

$$\rho(\sigma, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|m_k - n_k|}{1 + |m_k - n_k|}.$$

Агню [1] доказал, что пространство π является множеством второй категории.

Далее мы будем пользоваться следующими обозначениями. Если задан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1.1}$$

элементов некоторого топологического векторного пространства и $\sigma \in \pi$, то через

$$\sum_{n=1\sigma}^{\infty} u_n \tag{1.2}$$

мы будем обозначать ряд, полученный из ряда (1.1) перестановкой σ, а через

$$\sum_{n=1\sigma}^{N} u_n$$

частные суммы ряда (1.2).

В указанной работе Агню доказана следующая

ТЕОРЕМА. *Если Σc_n — условно сходящийся числовой ряд, то для всех $\sigma \in \pi$, за исключением множества первой категории,*

$$\liminf_{N\to\infty} \sum\nolimits_{n=1\sigma}^{N} c_n = -\infty, \qquad \limsup_{N\to\infty} \sum\nolimits_{n=1\sigma}^{N} c_n = \infty.$$

Б. И. Голубов ([2], теорема 7) обобщил эту теорему на функциональные ряды.

В настоящем параграфе мы доказываем аналогичную теорему для рядов в гильбертовом пространстве.

ТЕОРЕМА. *Пусть H — действительное гильбертово пространство и $x_n \in H$, $n = 1, 2, \ldots$ Если у ряда*

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} x_n \tag{1.3}$$

некоторая перестановка расходится, то для всех перестановок $\sigma \in \pi$, за исключением множества первой категории

$$\limsup_{N\to\infty} \left\| \sum\nolimits_{n=1\sigma}^{N} x_n \right\| = \infty. \tag{1.4}$$

Сначала докажем одну лемму.

ЛЕММА. *Пусть $y_k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$ и*

$$\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \| y_k \|^2 = \infty.$$

Тогда для любого положительного числа M найдется конечная система элементов $\{y_{k_1}, \ldots, y_{k_s}\}$ такая, что $\left\| \sum_{i=1}^{s} y_{k_i} \right\| > M$.

Доказательство. Возьмем N настолько большим, чтобы

$$\sum\nolimits_{n=1}^{N} \| y_n \|^2 > 4M^2, \tag{1.5}$$

и построим последовательность чисел ε_n, $n = 1, 2, \ldots, N$, следующим образом. Положим $\varepsilon_1 = 1$ и

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, \text{ если } \left(\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i y_i, y_n\right) \geqslant 0, \\ -1, \text{ если } \left(\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i y_i, y_n\right) < 0 \end{cases} \quad \text{при } 1 < n \leqslant N,$$

где (x, y) означает скалярное произведение в пространстве H. Тогда будем иметь

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i y_i, \varepsilon_n y_n\right) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.6}$$

Далее имеем

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n y_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|y_n\|^2 + 2\sum_{n=2}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i y_i, \varepsilon_n y_n\right). \tag{1.7}$$

Из (1.5), (1.6) и (1.7) получим

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n y_n\right\| > 2M. \tag{1.8}$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$\left\|\sum{}' y_n - \sum{}'' y_n\right\| > 2M, \tag{1.9}$$

где в сумме $\sum'$ участвуют те $\varepsilon_n y_n$, у которых $\varepsilon_n = 1$, а в $\sum''$ — те, у которых $\varepsilon_n = -1$.

Из (1.9) получим

$$\max\left(\left\|\sum{}' y_n\right\|, \quad \left\|\sum{}'' y_n\right\|\right) > M.$$

Если мы возьмем ту из сумм $\Sigma' y_n$ и $\Sigma'' y_n$, которая имеет большую норму, она и будет искомой. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Очевидно можно считать, что расходится сам ряд (1.3). Тогда найдутся положительное число C и две последовательности натуральных чисел $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$ такие, что

$$p_k < q_k < p_{k+1} \quad \text{и} \quad \left\|\sum_{n=p_k}^{q_k} x_n\right\| \geqslant C, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{1.10}$$

Если обозначим через E множество всех тех $\sigma \in \pi$, для которых не выполняется (1.4), то будем иметь

$$E = \bigcup_{l=1}^{\infty} E_l, \tag{1.11}$$

где $\quad E_l = \left\{\sigma \in \pi : \sup\limits_N \left\|\sum_{n=1\sigma}^{N} x_n\right\| < l\right\}.$

Докажем, что при любом l множество $\hat{E}_l$ нигде не плотно в π.

Пусть l — произвольное натуральное число. Возьмем в π произвольный открытый шар $B(\sigma_0, r)$, $r > 0$ с центром $\sigma_0 = (m_1^0, m_2^0, \ldots)$. Если t достаточно велико, то любая перестановка $\tau \in \pi$ вида $\tau = (m_1^0, \ldots, m_t^0, n_{t+1}, \ldots)$ входит в $B(\sigma_0, r)$. Зафиксируем такое t.

Возьмем k_0 настолько большим, чтобы

$$p_{k_0} \geqslant \max(m_1^0, \ldots, m_t^0). \tag{1.12}$$

В силу (1.10) мы можем применить лемму к последовательности

$$y_k = \sum_{n=p_k}^{q_k} x_n, \qquad k \geqslant k_0. \tag{1.13}$$

Это даст нам возможность построить такую конечную систему элементов $\{y_{k_1}, \ldots, y_{k_s}\}$, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^{s} y_{k_i} \right\| > l + \left\| \sum_{i=1}^{t} x_{m_i^0} \right\|. \tag{1.14}$$

Пусть перестановка $\tau_0 = (n_1^0, n_2^0, \ldots)$ построена следующим образом. На первых t местах стоят числа $m_1^0, \ldots, m_t^0$, за ними друг за другом следуют системы $(p_{k_1}, \ldots, q_{k_1}), \ldots$ $\ldots, (p_{k_s}, \ldots, q_{k_s})$ и на оставшихся местах произвольным образом расположены остальные натуральные числа. Построенная таким образом последовательность будет перестановкой, так как в силу (1.12) и (1.13) никакое число не появится больше одного раза.

Обозначим $N_0 = t + (q_{k_1} - p_{k_1} + 1) + \ldots + (q_{k_s} - p_{k_s} + 1)$.

Возьмем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы для любой перестановки $\tau \in B(\tau_0, \delta)$, $\tau = (n_1, n_2, \ldots)$ имело место $n_i = n_i^0$ при $i = 1, 2, \ldots, N_0$. Тогда для всех $\tau \in B(\tau_0, \delta)$ будем иметь

$$\sum_{n=1\tau}^{N_0} x_n = \sum_{i=1}^{t} x_{m_i^0} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=p_{k_i}}^{q_{k_i}} x_j = \sum_{i=1}^{t} x_{m_i^0} + \sum_{i=1}^{s} y_{k_i}. \tag{1.15}$$

Отсюда, в силу (1.14), получим $\left\|\sum_{n=1\,\tau}^{N_0} x_n\right\| > l$ для всех $\tau \in B(\tau_0, \delta)$, т. е.

$$B(\tau_0, \delta) \cap E_l = \phi. \tag{1.16}$$

С другой стороны, в силу выбора δ имеем

$$B(\tau_0, \delta) \subset B(\sigma_0, r). \tag{1.17}$$

В силу произвольности $B(\sigma_0, r)$, из (1.16) и (1.17) следует, что E нигде не плотно в π. Наконец, из (1.11) следует, что E является множеством первой категории. Теорема доказана.

2. Пусть, как и выше, H — действительное гильбертово пространство. В настоящем параграфе мы рассматриваем безусловно сходящиеся ряды в H. Одним из случаев известной теоремы Орлича [3] является следующая

ТЕОРЕМА. *Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \tag{2.1}$$

элементов из H безусловно сходится, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty. \tag{2.2}$$

Можно предложить следующее доказательство этой теоремы. Безусловная сходимость ряда (2.1) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n \tag{2.3}$$

при любом выборе чисел $\varepsilon_n = \pm 1$, $n = 1, 2, \ldots$

Построим последовательность $\{\varepsilon_n\}$ следующим образом. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Пусть построены $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ $(n > 2)$. Тогда ε_n выбираем так, чтобы величины

$$\sum_{m=2}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i x_i, \ \varepsilon_m x_m\right) \text{ и } \left(\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i x_i, \varepsilon_n x_n\right)$$

имели разные знаки. Если одна из этих величин равна нулю, то выбор ε_n произволен.

Далее мы будем иметь дело с фиксированной последовательностью $\{\varepsilon_n\}$, построенной указанным способом.

Обозначим $s_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i$.

Последовательность $\{s_n\}$ ограничена по норме, так как она является последовательностью частных сумм сходящегося ряда (2.3). С другой стороны, в силу условия теоремы, $\| x_n \| \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому имеем

$$(s_{m-1}, \varepsilon_m x_m) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{2.4}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i x_i, \varepsilon_m x_m \right) = \sum_{m=2}^{\infty} (s_{m-1}, \varepsilon_m x_m). \tag{2.5}$$

Докажем, что этот ряд сходится. Обозначим его частные суммы через S_n. Возможны два случая.

1) Частные суммы S_n или ограничены сверху и, начиная с некоторого номера, монотонно возрастают или же ограничены снизу и, начиная с некоторого номера, монотонно убывают. В этом случае ряд (2.5) сходится.

2) Случай 1) не выполняется. Тогда из построения чисел ε_n видно, что существует последовательность натуральных чисел $k(n)$, удовлетворяющая условиям

$$k(n) \to \infty \text{ при } \quad n \to \infty, \tag{2.6}$$

$$| S_n | \leqslant | (s_{k(n)-1}, \varepsilon_{k(n)} x_{k(n)}) |, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.7}$$

Из (2.4), (2.6) и (2.7) следует, что и во втором случае ряд (2.5) сходится.

Наконец, воспользовавшись сходимостью последовательности s_n и ряда (2.5) и переходя к пределу в равенстве

$$\| s_n \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^2 + 2 \sum_{m=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i x_i, \varepsilon_m x_m \right),$$

мы получим (2.2). Теорема доказана.

Ереванский государственный университет

Поступило 3.XII.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A g n e w R. P., On rearrangements of series, Bull. Amer. Math. Soc., 46 (1940), 797—799.

[2] Г о л у б о в Б. И., О суммировании последовательностей. Изв. вузов, Математика, 4(1964), 47—55.

[3] O r l i c z W., Über unbedingte Konvergenz in Funktionenraumen, Studia Math., 4 (1933), 33—37, 41—47.