ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2002, том 38, № 6, с. 795–801

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

МЕТОД СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2002 г. И. С. Ломов

Классическая теорема Коши–Ковалевской гарантирует локальную аналитичность решения линейного дифференциального уравнения, представленного в нормальной форме, коэффициенты, правая часть и начальные данные которого аналитичны. Исследования вырождающихся эллиптических уравнений (см., например, [1]) показали, что и в этом случае аналитичность коэффициентов уравнения наследуется решением. Фундаментальная система состоит из функций, представляющих произведение голоморфной в окрестности точки (плоскости) вырождения функции на функцию, которая может иметь особенность на указанном множестве. Эта особенность либо степенная, при этом показатель находится по коэффициентам уравнения, либо степенная и логарифмическая. Для обоснования существования решения краевой задачи для вырождающихся уравнений, как правило, используют неявные методы построения решения (например, метод барьеров). При этом затруднительно выяснить структуру решения и проследить, как аналитичность коэффициентов и правой части уравнения отражается на решении задачи.

На примере модельной задачи с нерегулярно вырождающимся эллиптическим оператором, заданным в прямоугольнике, с аналитическими данными по переменной вырождения предложим метод решения краевой задачи для неоднородного уравнения и покажем, как результат теоремы Коши–Ковалевской переносится на этот класс задач. Для описания особенностей решения привлекается спектр предельного (особого) оператора – оператора на линии вырождения, при этом каждое собственное значение участвует в описании особенности. Решение получено в виде ряда по собственным функциям предельного оператора, наглядно просматривается структура решения и, в частности, зависимость его от переменной вырождения. Приведен пример задачи, для которой выполнены все условия сформулированных утверждений, и описана более общая задача, на которую распространяется предложенная схема.

В прямоугольнике $D = (0 < x < 1) \times (0 < y < b)$ требуется найти ограниченное в окрестности линии $y = 0$ решение задачи

$$y^2 u_{yy} + u_{xx} - a^2(y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in D, \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = u|_{y=b} = 0, \quad |u(x,0)| < \infty, \quad (1)$$

$u(x,y) \in C(\overline{D}) \bigcap C^2(D)$, $a^2(y) \geq 0$, функции $a^2(y)$, $f(x,y)$, аналитические в точке $y = 0$ (при каждом $x \in G = (0,1)$), разлагаются в ряды по степеням y, $f \in C(D)$. Решение удовлетворяет всем условиям задачи в классическом смысле (краевая задача E по терминологии М.В. Келдыша [2, с. 299]).

Эта задача была поставлена С.А. Ломовым в 1992 г.; им было высказано предположение, что особенности решения можно описать в соответствии с методом регуляризации сингулярных возмущений [3, с. 38] (подобно тому, как если считать, что $y^2 = \varepsilon$ – малый параметр). Гипотеза подтвердилась; задача была решена в 1993 г., но опубликована только часть имеющих самостоятельный интерес результатов [4]: о сходимости “рядов Пуассона” и о возникающей проблеме “малых знаменателей”.

Отметим, что другой метод разделения переменных решения краевых задач для вырождающихся уравнений $y^m u_{xx} + u_{yy} + (q/y)u_y - \mu^2 y^m u = 0$, $y^m u_{xx} + u_{yy} = 0$, $m > -2$, был предложен Е.И. Моисеевым [5, 6]. Регулярное решение получено в виде биортогонального ряда (см. также [7, 8]).

1^0. Построение формального решения. Приведем схему построения формального решения задачи (1), затем укажем условия, при которых оно является классическим решением.

Обозначим $a^2(0) = a_0$, $a^2(y) - a_0 = a_1(y)$ и разделим переменные в задаче. Пусть $u(x,y) = X(x)Y(y)$, подставим его в однородное уравнение (1) и разделим на XY: $y^2Y''/Y - a_1(y) = a_0 - X''/X = \lambda$. Для X имеем задачу на собственные функции для предельного (особого) оператора L, получающегося из левой части (1) при $y = 0$: $X'' + (\lambda - a_0)X = 0$, $X(0) = X(1) = 0$. Обозначим: $\mu_k = -\lambda_k^2$ собственные значения, $\psi_k(x)$ нормированные собственные функции, $\lambda_k^2 = a_0 + k^2\pi^2$, $\psi_k(x) = \sqrt{2}\sin \pi kx$, $k \in \mathcal{N}$.

Для выделения особенности по y отбросим подчиненный член $a_1 Y$ и рассмотрим уравнение Эйлера $y^2Y'' - \lambda_k^2 Y = 0$. Положив $Y = y^\alpha$, получим определяющее уравнение $\alpha(\alpha - 1) - \lambda_k^2 = 0$ с корнями $\alpha_{1,2} = \left(1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda_k^2}\right)/2$. Для того чтобы не появилось логарифмических особенностей в решении, потребуем: $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathcal{Z}$, т.е.

$$\lambda_k^2 \neq (n^2 - 1)/4 \quad \forall k, n \in \mathcal{N} \tag{2}$$

(тогда $\lambda_k^2 \neq l(l-1)$ $\forall l, k \in \mathcal{N}$). Условие (2) в терминах коэффициента a^2 запишется в виде $a^2(0) \neq (n^2-1)/4 - k^2\pi^2$ $\forall k, n \in \mathcal{N}$. Учитывая условие $|u(x,0)| < \infty$, оставляем только положительный корень, который обозначим $r_k = \left(1 + \sqrt{1 + 4\lambda_k^2}\right)/2$.

По аналогии с методом регуляризации С.А. Ломова введем счетное число новых переменных $\tau_k \in [0,1]$, $k \in \mathcal{N}$, обозначим $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots)$, $g_k(y^{r_k}) = (y/b)^{r_k}$, $g(y^{r_k}) = (g_1, g_2, \ldots)$, $\sum_k = \sum_{k=1}^\infty$. Ищем решение задачи (1) в виде

$$v(x,y,\tau) = \sum_k [\tau_k \varphi_k(y) + \eta_k(y)]\psi_k(x), \tag{3}$$

где φ_k, η_k – аналитические функции, представимые рядами по степеням y на $[0,b]$, $v(x,y,\tau)|_{\tau = g(y^{r_k})} \equiv u(x,y)$.

Поставим задачу для v. Принимая во внимание, что $u_y = (v_y + v_\tau \tau_y)|_{\tau = g(y^{r_k})} = v_y + (1/y)\sum_k r_k \tau_k v_{\tau_k}$, получим из (1)

$$\begin{gathered} y^2 v_{yy} + 2y\sum_k r_k\tau_k v_{y\tau_k} + \sum_k r_k(r_k - 1)\tau_k v_{\tau_k} + v_{xx} - a^2(y)v = f(x,y), \\ (x,y) \in G, \quad \tau_k \in G, \quad k \geq 1, \quad |v(x, 0+, \tau_k)| < \infty, \\ v|_{x=0} = v|_{x=1} = v|_{y=b,\tau_k=1} = 0, \quad v(x,y,\tau)|_{\tau=g(y^{r_k})} = u(x,y); \end{gathered} \tag{4}$$

краткая запись уравнения: $y^2T_2v + yT_1v + T_0v = f(x,y)$, где $T_2v = v_{yy}$, $T_1v = 2\sum_k r_k\tau_k v_{y\tau_k}$, $T_0v = \sum_k r_k(r_k-1)\tau_k v_{\tau_k} + v_{xx} - a^2 v$.

Задача (4) более масштабная, чем (1), но можно построить ее решение (3) без особенности по y и, положив $\tau = g(y^{r_k})$, получить решение задачи (1). По аналогии с теорией малого параметра задачу (1) можно назвать сингулярно возмущенной, а задачу (4) – регулярно возмущенной, так как предельный оператор в задаче (4) (при $y = 0$) допускает удовлетворения всем краевым условиям, в том числе и при $y = b$, $\tau_k = 1$.

Система $\{\psi_k\}$ образует ортонормированный базис в $\mathcal{L}^2(G)$, тогда $f(x,y) = \sum_k f_k(y)\psi_k(x)$. Подставив (3) в (4), получим задачи для $\varphi_k(y)$, $\eta_k(y)$:

$$y^2\eta_k'' - [\lambda_k^2 + a_1(y)]\eta_k = f_k(y), \quad y \in (0,b), \quad |\eta_k(0)| < \infty, \quad k \in \mathcal{N}, \tag{5}$$

$$\eta_k = \sum_{l=0}^\infty \eta_k^l y^l, \quad a^2(y) = \sum_{l=0}^\infty a^l y^l, \quad f_k(y) = \sum_{l=0}^\infty f_k^l y^l, \quad y \in (-R,R), \quad R \geq b; \tag{6}$$

$$\begin{gathered} y^2\varphi_k'' + 2yr_k\varphi_k' - a_1(y)\varphi_k = 0, \quad y \in (0,b), \quad |\varphi_k(0)| < \infty, \\ \varphi_k(b) = -\eta_k(b), \quad \varphi_k(y) = \sum_{l=0}^\infty \varphi_k^l y^l, \quad y \in (-R,R), \quad k \in \mathcal{N}. \end{gathered} \tag{7}$$

Решая последовательно задачи (5), (6), получаем формальное решение задачи (4). Приведем условия, при которых задачи (5), (6) разрешимы.

2^0. Формулировка результатов.

Теорема 1. *Пусть $a^2(y) \in \mathcal{L}(0,b)$, разлагается в ряд (6) при $R = b$, справедливо условие (2), $f(x,y) \in \mathcal{L}(D)$ и для каждого $y \in [0,b)$: $f(x,y) \in \mathcal{L}^2_x(G)$. Тогда, для того чтобы задача (4) имела и притом единственное формальное решение вида (3), необходимо и достаточно, чтобы $f_k(y)$ разлагалась в ряд (6), $R = b$.*

Необходимость доказывается подстановкой решения (3) в уравнение (4) и приравниванием коэффициентов при ψ_k, а достаточность вытекает из следующих утверждений.

Лемма 1 [4]. *Пусть коэффициент a^2 представим в виде сходящегося ряда (6), $R = b$. Для того чтобы при каждом $k \in \mathcal{N}$ уравнение (5) имело и притом единственное аналитическое на $(-b,b)$ решение, необходимо и достаточно, чтобы его правая часть $f_k(y)$ была аналитической на $(-b,b)$ функцией, т.е. была представимой рядом (6), а также, чтобы выполнялось условие $\lambda_k^2 \neq l(l-1)$ $\forall l,k \in \mathcal{N}$. Если при этом $f_k(y), a^2(y) \in \mathcal{L}(0,b)$, то существуют конечные предельные значения $\eta_k^{(\alpha)}(b-0)$, $\alpha = 0,1$.*

Лемма 2. *Пусть выполняется условие теоремы 1 относительно a^2, $f_k(y) \in \mathcal{L}(0,b)$, $\lambda_k^2 \neq l(l-1)$ $\forall k,l \in \mathcal{N}$. Тогда задача (7) имеет и притом единственное решение с конечными предельными значениями $\varphi_k^{(\alpha)}(b-0)$, $\alpha = 0,1$.*

Отметим, что условие $f \in \mathcal{L}(D)$ обеспечивает справедливость условия $f_k \in \mathcal{L}(0,b)$ (по теореме Фуббини).

Для того чтобы показать, что формальное решение задачи (4) является его классическим (регулярным) решением, нужно получить оценки решений задач (5), (7) по k. Сформулируем соответствующие утверждения в виде двух лемм.

Лемма 3 [4]. *Пусть при некотором фиксированном числе $R > b$ выполняются следующие условия A:*

1) степенные ряды (6) для a^2 и $f_k(y)$ сходятся на $(-R,R)$;

2) существуют $M = \mathrm{const} > 0$ и $R_1 \in (b,R)$ такие, что $|f_k^l| \leq M/R_1^l$ $\forall l \geq 0$, $k \geq 1$;

3) (оценка малых знаменателей) пусть $\beta_k^l \equiv l(l-1) - \lambda_k^2$, $l \geq 0$, $k \geq 1$, $\delta_k \equiv \min\limits_l |\beta_k^l| = |\beta_k^J| > 0$ и постоянные $k_1 \in \mathcal{N}$, $c_\delta \in \mathcal{R}_+$, $q_0 \in (b/R_1, R/b)$ таковы, что $\delta_k \geq c_\delta J^2 q_0^J$ $\forall k \geq k_1$.

Тогда, начиная с некоторого номера k_0, равномерно по $y \in [-b,b]$ для решения задачи (5), (6) имеют место оценки: $\eta_k^{(\alpha)}(y) = O(1/k^2)$, $\eta_k^{(\alpha)}(y) = -(\pi k)^{-2} + O(1/k^4)$, $\alpha = 0,1,2$.

Отсюда вытекает

Следствие 1 [4]. *Пусть выполнены условия A и ряд Фурье функции $f(x,y)$ по системе $\psi_k(x)$ сходится равномерно по $x \in [c,d]$ $\forall [c,d] \subset G$ при каждом $y \in [0,b)$. Тогда ряд $\sum_k \eta_k(y)\psi_k(x)$ допускает двукратное почленное дифференцирование по x и y в D.*

Лемма 4. *Пусть выполняются условия A. Тогда, начиная с некоторого номера k_0, равномерно по $y \in [0,b]$ для решения задачи (7) имеют место оценки:*

$$\varphi_k(y) = (\pi k)^{-2} f_k(b)(1 + O(k^{-1})), \quad \varphi_k^{(\alpha)}(y) = k^{-2} f_k(b) O(k^{-1}), \quad \alpha = 1,2.$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия A, $f \in \mathcal{L}^2_x(G)$ $\forall y \in [0,b]$, ряд Фурье функции $f(x,y)$ по системе $\psi_k(x)$ сходится равномерно по $x \in [c,d]$ $\forall [c,d] \subset G$ при каждом $y \in [0,b]$ и $\{\tau_k\}$ – монотонная последовательность. Тогда ряд $\sum_k \tau_k \varphi_k(y)\psi_k(x)$ допускает двукратное почленное дифференцирование по x и y в D, при этом ряд, содержащий ψ_k'', сходится в D, а все остальные ряды сходятся абсолютно и равномерно в $\overline{D}$.*

Оператор в задаче (4) содержит два ряда: с $v_{y\tau_k}$ и v_{τ_k}. Исследуем их на сходимость.

Следствие 3. *Пусть выполняются условия следствия 2. Тогда ряд $\sum_k r_k \tau_k v_{y\tau_k}$ сходится абсолютно и равномерно в $\overline{D}$, а ряд $\sum_k r_k(r_k - 1)\tau_k v_{\tau_k}$ сходится в D.*

Теорема 2. *Пусть выполняются условия A, условие (2), $f \in \mathcal{L}^2_x(G)$ $\forall y \in [0,b]$, ряд Фурье функции $f(x,y)$ по системе $\psi_k(x)$ сходится равномерно по $x \in [c,d]$ $\forall [c,d] \subset G$ при* *каждом* $y \in [0,b]$, $f(x,y) \in \mathcal{L}_y(0,b)$ $\forall x \in G$ *и* $\{\tau_k\}$ *– монотонная последовательность. Тогда формальное решение (3) задачи (4) будет ее классическим решением.*

Теорема 3. *Пусть выполняются условия 1) и 3) из условий A, условие (2),* $\{\tau_k\}$ *– монотонная последовательность, ряд* $f(x,y) = \sum_{l=0}^{\infty} f^l(x)y^l$ *сходится по* y *на* $(-R,R)$ $\forall x \in G$ *и сходится в среднем по* $x \in G$ $\forall y \in (-R,R)$, *ряд (6) для* $f_k(y)$ *сходится равномерно по* $k \in \mathcal{N}$, $f(x,y) \in \mathcal{L}_x^2(G)$ *и ряд* $f(x,y) = \sum_k f_k(y)\psi_k(x)$ *сходится равномерно по* x *на любом отрезке* $[c,d] \subset G$ *при каждом* $y \in [0,b]$; *пусть также*

$$\forall L \in \mathcal{N} \quad \exists c = \text{const} > 0 : \quad |f_k^l| \le c \quad \text{при} \quad 0 \le l \le L \quad \text{и} \quad k \ge 1. \tag{8}$$

Тогда задача (4) имеет и притом единственное классическое решение, представимое в виде (3), сужение которого при $\tau = g(y^{r_k})$ *является решением задачи (1).*

Замечание 1. Условия (8) и равномерной сходимости по k ряда $f_k(y)$ обеспечивают выполнение условия 2) из условий A. Для выполнения (8) достаточно, чтобы $\partial^l f(x,0)/\partial y^l \in \mathcal{L}(G)$, $l \ge 1$, при этом коэффициенты Фурье $f_k^l = \int_{\overline{G}} f^l(x)\psi_k(x)\,dx \to 0$, $k \to \infty$, и условие (8) выполняется для каждого конечного числа L.

Замечание 2. Сходимость в среднем степенного ряда для $f(x,y)$ требуется для того, чтобы функция $f_k(y)$ была представима степенным рядом.

Замечание 3. Если $f(x,y) \in W_2^1(G)$ по x $\forall y \in (0,b)$, то $\eta_k(y) = O(k^{-3})$, как и в рассмотренном ниже примере. При этом ряд Фурье функции f по системе $\{\psi_k\}$ сходится равномерно по $x:$ $\forall [c,d] \subset (0,1)$ при каждом y.

3^0. Доказательство леммы 2. Подставив ряды φ_k и a^2 в уравнение (7), определим однозначно коэффициенты

$$\varphi_k^l = \frac{1}{\mu_k^l}\sum_{j=0}^{l-1} a^{l-j}\varphi_k^j, \quad l \ge 1, \quad \mu_k^l = l(l+2r_k-1) > 0,$$

коэффициент $\varphi_k^0 \in \mathcal{C}$ – пока любое число. Докажем, что построенный степенной ряд сходится на $(0,b)$. Пусть $R \ge b$ – радиус сходимости ряда $a^2(y)$, фиксируем любое число $R_1 \in (0,R)$; из теоремы Коши–Адамара следует, что найдется постоянная $M \ge 1$ такая, что $|a^l| \le M/R_1^l$ $\forall l \ge 1$. Для каждого $k \in \mathcal{N}$ существует номер $L \in \mathcal{N}$ такой, что $\mu_k^l \ge M$ $\forall l \ge L$.

Оценим коэффициенты φ_k^l. Для каждого $l \ge 1$ справедливо неравенство

$$|\varphi_k^l| \le \frac{M}{\mu_k^l}\sum_{j=0}^{l-1}\frac{|\varphi_k^j|}{R_1^{l-j}}.$$

Пусть $l < L$, фиксируем произвольно φ_k^0. Найдется число $p > 1$ такое, что $|\varphi_k^l| \le (p/R_1)^l$, $l = \overline{0, L-1}$; выберем число p таким образом, чтобы эта оценка была верна для всех l. Пусть $l = L$, $|\varphi_k^l| \le p^{l-1}/(R_1^l(p-1)) \le (p/R_1)^l$, неравенство справедливо для любого $p \ge 2$. Фиксируем любое число $p \ge 2$. По индукции доказываем, что $|\varphi_k^l| \le (p/R_1)^l$ $\forall l \ge 0$, т.е. ряд φ_k сходится абсолютно при $|y| < R_1/p$, а следовательно, в силу теоремы Коши–Ковалевской и при $|y| < R$.

Таким образом, получено решение $\varphi_k(y)$ уравнения (7) в виде степенного ряда, сходящегося на $[0,b)$. Условие $|\varphi_k(0)| = |\varphi_k^0| < \infty$ выполнено, обеспечим выполнение условия $\varphi_k(b) = -\eta_k(b)$. Положим $\eta_k(b) = \eta_k(b-0)$ (см. лемму 1). Покажем, что существуют $\varphi_k^{(\alpha)}(b-0)$, $\alpha = 0,1$, и положим $\varphi_k(b) = \varphi_k(b-0)$. Обозначим $2r_k/y = B(y)$, $a_1(y)/y^2 = C(y)$. Решение $\varphi_k(y)$ уравнения $\varphi_k'' + B(y)\varphi_k' - C(y)\varphi_k = 0$, $y \in (b-\varepsilon, b)$, $\varepsilon \in (0,b)$, принадлежит классу $W_1^2(b-\varepsilon,b)$, $B(y)\varphi_k', C(y)\varphi_k \in \mathcal{L}(b-\varepsilon,b)$, и из представления решения ($y_0 \in (b-\varepsilon,b)$ – фиксированное число)

$$\varphi_k(y) = \varphi_k(y_0) + \varphi_k'(y_0)(y-y_0) - \int_{y_0}^{y}[B(\tau)\varphi_k'(\tau) - C(\tau)\varphi_k(\tau)](y-\tau)\,d\tau$$

следует, что

$$\varphi_k(b-0) = \varphi_k(y_0) + \varphi_k'(y_0)(b-y_0) - \int\limits_{y_0}^{b} [B(\tau)\varphi_k'(\tau) - C(\tau)\varphi_k(\tau)](b-\tau)\, d\tau.$$

Далее, $\varphi_k'(y) = \varphi_k'(y_0) - \int_{y_0}^{y} [B(\tau)\varphi_k'(\tau) - C(\tau)\varphi_k(\tau)]\, d\tau$, т.е. существует $\varphi_k'(b-0)$.

Фиксируем $\varphi_k^0 = 1$ и отвечающее ему решение задачи (7) $\varphi_{1k}(y)$. Все решения задачи (7) имеют вид $\varphi_k(y) = c\varphi_{1k}(y)$, $c = c(\varphi_k^0)$. Если $\varphi_{1k}(b) \neq 0$, то $\varphi_k(y) = -(\eta_k(b-0)/\varphi_{1k}(b-0))\varphi_{1k}(y)$ – единственное решение задачи (7).

Покажем, что для любого нетривиального аналитического решения $\varphi_k(y)$, $|\varphi_k(0)| < \infty$, уравнения (7) справедливо $\varphi_k(b) \neq 0$ (аналогично доказывается, что $\varphi_k(y) \neq 0$ $\forall y \in (0, b]$). В уравнении (7) сделаем подстановку $\varphi_k(y) = y^{-r_k}\psi_k(y)$, $y \neq 0$, получим уравнение $\psi_k''(y) - q(y)\psi_k = 0$, $q(y) = (1/y^2)(a^2(y) + k^2\pi^2)$, – однородное уравнение (5); $\psi_k(0) = 0 \cdot \varphi_k(0) = 0$.

По теореме Штурма $\psi_k(y)$ имеет на $(0, b)$ не более одного нуля. Пусть $\psi_k(b) = 0$. Предположим, что $\psi_k(y) \neq 0$, $y \in (0, b)$ (если $\psi_k(y_1) = 0$, $y_1 \in (0, b)$, то $\psi_k(y) \neq 0$ на (y_1, b)), и пусть $\psi_k(y) > 0$, $y \in (0, b)$. Обозначим через $\psi_0(y)$ произвольное положительное решение уравнения $\psi'' = 0$, $y \in (0, b)$, $\psi_0(0) \geq 0$, $\psi_0(b) \geq 0$. Так как $r_k > 1$, то $\psi_k'(0) = 0$, а поскольку b – регулярная точка, то $\psi_k'(b) < 0$. Умножим обе части уравнения для ψ_k на $\psi_0(y)$, а уравнения для ψ_0 на $\psi_k(y)$ и вычтем почленно: $(\psi_0\psi_k' - \psi_0'\psi_k)' = q(y)\psi_k\psi_0$. Проинтегрируем по y на $[0, b]$:

$$\psi_0\psi_k'|_{y=b} - \psi_0\psi_k'|_{y=0} = \int\limits_0^b q(y)\psi_k\psi_0\, dy;$$

здесь левая часть равенства меньше либо равна нулю, а правая часть положительна. Полученное противоречие показывает, что либо для любого решения ψ_0 существует $\xi \in (0, b)$ такое, что $\psi_0(\xi) = 0$ (но для $\psi_0 \equiv 1$ это не так, т.е. имеем противоречие), либо $\psi_k(b) \neq 0$. Следовательно, и $\varphi_k(b) \neq 0$. Таким образом, выше получено единственное аналитическое решение $\varphi_k(y)$ задачи (7). Лемма 2 доказана. Тем самым доказана и теорема 1, т.е. выражение (3) является формальным решением задачи (4).

4^0. Доказательство леммы 4. Как показано при доказательстве леммы 2, решение задачи (7) имеет вид

$$\varphi_k(y) = -\frac{\eta_k(b)}{\varphi_{1k}(b)}\varphi_{1k}(y), \quad y \in [0, b], \quad \varphi_{1k}(0) = \varphi_{1k}^0 = 1,$$

$$\varphi_{1k}(y) = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{1k}^l y^l, \quad \varphi_{1k}^l = \frac{1}{\mu_k^l}\sum_{j=0}^{l-1} a^{l-j}\varphi_{1k}^j, \quad l \geq 1,$$

$$\mu_k^l = l(l + 2r_k - 1) = l(l + (1 + 4\lambda_k^2)^{1/2}) > lk, \quad l, k \geq 1.$$

Зафиксируем $R_1 \in (0, R)$ и воспользуемся примененной в лемме 2 оценкой $|a^l| \leq M/R_1^l$ $\forall l \geq 1$:

$$|\varphi_{1k}^l| \leq \frac{M}{lkR_1^l}\sum_{j=0}^{l-1} R_1^j|\varphi_{1k}^j|.$$

Обозначим $\alpha_k = M/k$, тогда $R_1|\varphi_{1k}^1| \leq \alpha_k$, $R_1^l|\varphi_{1k}^l| < \alpha_k(1 + \sum_{j=1}^{l-1} R_1^j|\varphi_{1k}^j|) < \alpha_k(1 + \alpha_k)^{l-1}$, $l > 1$, т.е.

$$|\varphi_{1k}^l| \leq (\alpha_k/(1 + \alpha_k))((1 + \alpha_k)/R_1)^l, \quad l \geq 1.$$

Фиксируем некоторое число $\varepsilon \in (0, (R-b)/2)$ и такой номер $k_0 = k_0(\varepsilon)$, что $R_1 = b(1 + \alpha_{k_0}) + \varepsilon < R$ $(k_0 > Mb/(R - b - \varepsilon))$. Тогда $q_k = (1 + \alpha_k)b/R_1 < 1$, $k \geq k_0$, и справедливо

$$\sum_{l=1}^{\infty} |\varphi_{1k}^l y^l| \leq \frac{\alpha_k b}{R_1 - (1 + \alpha_k)b} \leq \frac{Mb}{k\varepsilon}, \quad k \geq k_0;$$

получена оценка $\varphi_{1k}(y) = 1 + O(1/k)$, $y \in [0,b]$, $k \geq k_0 \geq 1$ $(k_0 > M)$, откуда следует первая оценка леммы 4 (использована также вторая оценка леммы 3).

Для получения оценок производных $\varphi'_{1k}(y) = \sum_{l=1}^{\infty} l\varphi_{1k}^l y^{l-1}$, $k \geq 1$, найдем постоянные $c > 0$, $\nu > 0$, $R_1 \in (b,R)$, $k_0 \in \mathcal{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ такие, что $l < c(1+\nu)^{l-1}$, $l \geq 1$, $q_k = (1+\alpha_k)(1+\nu)b/R_1 < 1-\varepsilon$, $k \geq k_0$ (это возможно, если $\varepsilon < (R-b)/R$, $\nu < (R(1-\varepsilon)-b)/b$, $k_0 > Mb(1+\nu)/[R(1-\varepsilon) - b(1+\nu)]$, $c > (1+\nu)/(e\ln(1+\nu))$). Тогда

$$|\varphi'_{1k}(y)| \leq c\frac{\alpha_k}{R_1 q_k}\sum_{l=1}^{\infty} q_k^l < \frac{c\alpha_k}{R_1\varepsilon},$$

т.е. $\varphi'_{1k}(y) = O(1/k)$, и получаем оценку леммы 4 при $\alpha = 1$.

При тех же ν, R_1, k_0, ε найдем постоянную $c > 0$ такую, чтобы выполнялось неравенство $l(l-1) < c(1+\nu)^{l-2}$, $l \geq 2$. Тогда

$$|\varphi''_{1k}(y)| \leq \frac{c\alpha_k(1+\alpha_k)}{R_1^2 q_k^2}\sum_{l=2}^{\infty} q_k^l < \frac{c(1+\alpha_k)}{R_1^2\varepsilon}\alpha_k,$$

т.е. $\varphi''_{1k}(y) = O(1/k)$, и получаем оценку леммы 4 при $\alpha = 2$. Лемма 4 доказана.

5^0. **Доказательство следствий из лемм.** Докажем следствие 2. Оценки леммы 4 позволяют применить признак Вейерштрасса равномерной сходимости для рядов

$$\sum_k \tau_k\varphi_k^{(\alpha)}(y)\sin\pi kx, \quad \alpha = 0,1,2.$$

Получаем утверждение следствия для рядов с $\psi_k(x)$. Для доказательства утверждения для рядов с $\psi'_k(x)$ достаточно исследовать ряд $\sum_k(\tau_k/k)f_k(b)\cos\pi kx$. При каждом $y \in [0,b]$ функция $f(x,y) \in \mathcal{L}^2(G)$ и для нее справедливо равенство Парсеваля, поэтому требуемое утверждение следует из справедливости неравенства $k^{-1}|f_k(b)| \leq 2^{-1}(f_k^2(b) + k^{-2})$ и сходимости ряда $\sum_k k^{-2}$.

Для доказательства утверждения для ряда с $\psi''_k(x)$ достаточно исследовать ряд $\sum_k \tau_k f_k(b)\sin\pi kx$, который сходится равномерно на $\forall[c,d] \subset G$ по признаку Абеля ($\{\tau_k\}$ – ограниченная монотонная последовательность, ряд $\sum_k f_k(b)\sin\pi kx$ сходится равномерно на $\forall[c,d] \subset G$). Следствие доказано.

Докажем следствие 3. Для исследования ряда с $v_{y\tau_k}$ достаточно изучить ряд

$$\sum_k r_k\tau_k\varphi'_k(y)\psi_k(x),$$

общий член которого, согласно оценкам леммы 4, имеет порядок $O(1/k^2)$ равномерно по $(x,y) \in \overline{D}$. По признаку Вейерштрасса получаем утверждение следствия для указанного ряда. Для исследования ряда с v_{τ_k} достаточно изучить ряд $\sum_k \lambda_k^2\tau_k\varphi_k(y)\psi_k(x)$ или в силу оценок леммы 4 два ряда $\sum_k \tau_k f_k(b)\sin\pi kx$, $\sum_k(\tau_k/k)f_k(b)\sin\pi kx$, исследованные выше при обосновании следствия 2 (замена во втором ряде косинуса на синус не меняет схему исследования). Следствие доказано.

Леммы 3, 4 и следствия из них доказывают справедливость теоремы 2: все ряды, связанные с задачами (4)–(7), сходятся и удовлетворяют уравнениям в классическом смысле.

Теорема 3 лишь переформулирует некоторые условия теоремы 2 в других терминах. Комментарии к этим условиям содержатся в замечаниях 1–3. Таким образом, все сформулированные в работе утверждения доказаны.

Замечание 4. Коэффициент a^2 в уравнении (1) может зависеть от x. В частности, если $a^2(x,y) = a^2(x,0) + \sum_{l=1}^{\infty} a_l y^l$, $a_l = \text{const}$, то результаты работы остаются в силе. Результаты переносятся и на случай, когда предельный оператор L задачи (1) – общий линейный нагруженный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами и с краевыми условиями, задаваемыми интегралами Стилтьеса. Предполагается, что L удовлетворяет условиям безусловной базисности в $\mathcal{L}^2(G)$ (см. [9, с. 354–355] или [10]). Функции $\psi_k(x)$ вместе со своими производными могут иметь разрывы первого рода в счетном числе точек отрезка $[0,1]$. Вместо u_{xx} в уравнении (1) можно поставить Δu – оператор Лапласа по переменным $x, z, \ldots$

Замечание 5. Возвращаясь к теореме Коши–Ковалевской, заметим, что и в рассмотренной задаче (1) решение наследует свойство аналитичности коэффициентов. Решение (3) – это сумма слагаемых, каждое из которых состоит из двух частей: аналитической по y функции $\eta_k(y)\psi_k(x)$ и произведения аналитической по y функции $\varphi_k(y)\psi_k(x)$ на функцию y^{r_k}, описывающую особенность уравнения.

6^0. Пример. Пусть в задаче (1) $a^2(y) = y^2$, $f(x,y) = xy$. Тогда $\lambda_k^2 = \pi^2 k^2$, $f_k(y) = (-1)^{k+1}\sqrt{2}(\pi k)^{-1} y$ и ряд Фурье

$$f(x,y) = y\frac{2}{\pi}\sum_k \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin \pi k x$$

сходится равномерно на каждом отрезке $[c,d] \subset (0,1)$ $\forall y \in [0,b]$. Для решения $\eta_k(y)$ задачи (5) получаем ряд

$$\eta_k(y) = \frac{(-1)^k\sqrt{2}}{(\pi k)^3} y\left\{1 + \sum_{l=1}^{\infty} y^{2l}\prod_{j=1}^{l}[2j(2j+1) - \pi^2 k^2]^{-1}\right\},$$

имеет место оценка $\eta_k(y) = O(1/k^3)$, малые знаменатели отделены от нуля величиной $\min_j |2j(2j+1) - \pi^2 k^2| > c_0/k^{\Lambda} > c_0 J^2 q_0^J$ $\forall k > k_1 > 1$, $0 < \Lambda \le 16$, $q_0 < 1$ – некоторая постоянная, $J \sim \pi k$ (см. [4]).

Для решения $\varphi_k(y)$ задачи (7) получим ряд

$$\varphi_k(y) = \varphi_k^0\left\{1 + \sum_{l=1}^{\infty} y^{2l}\left[(2l)!!\prod_{j=1}^{l}(2r_k + 2j - 1)\right]^{-1}\right\},$$

$$\varphi_k^0 = -\eta_k(b)\left\{1 + \sum_{l=1}^{\infty} b^{2l}\left[(2l)!!\prod_{j=1}^{l}(2r_k + 2j - 1)\right]^{-1}\right\},$$

$$\varphi_k(y) = (-1)^k b\sqrt{2}\frac{1}{(\pi k)^3}\left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right].$$

Выполнены все условия теорем 2 и 3, решение задачи (1) имеет вид (3) с выписанными выше коэффициентами φ_k, η_k.

Автор признателен Е.И. Моисееву за полезные обсуждения результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-01260).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Янушаускас А.И.* Аналитическая теория эллиптических уравнений. Новосибирск, 1979.
2. *Келдыш М.В.* // Избр. тр. Математика. М., 1985.
3. *Ломов С.А.* Введение в теорию сингулярных возмущений. М., 1980.
4. *Ломов И.С.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2080–2090.
5. *Моисеев Е.И.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 1. С. 94–103.
6. *Моисеев Е.И.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1094–1100.
7. *Моисеев Е.И.* // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 1. С. 110–121.
8. *Лернер М.Е., Репин О.А.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1087–1093.
9. *Ильин В.А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. М., 1991.
10. *Ломов И.С.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 1. С. 74–86.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
05.12.2000 г.