А. С. Белов, Об асимптотическом решении одной экстремальной задачи, связанной с неотрицательными тригонометрическими полиномами, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2013, том 18, выпуск 5, 27–67

Об асимптотическом решении одной экстремальной задачи, связанной с неотрицательными тригонометрическими полиномами

А. С. БЕЛОВ
Ивановский государственный университет
e-mail: asbel@ivanovo.ac.ru

УДК 517.518

Ключевые слова: экстремальные тригонометрические полиномы, экстремальные задачи о минимуме свободного члена тригонометрического полинома, асимптотическая оценка.

Аннотация

Для каждого вещественного числа $\gamma \geqslant 1$ пусть $K^{\downarrow}(\gamma)$ обозначает наименьшее возможное значение свободного члена чётного неотрицательного тригонометрического полинома с монотонными коэффициентами, у которого все коэффициенты, кроме свободного члена, не меньше 1 и сумма этих коэффициентов равна γ. В статье для $K^{\downarrow}(\gamma)$ находится асимптотическая оценка и изучаются некоторые экстремальные задачи о минимуме свободного члена чётного неотрицательного тригонометрического полинома.

Abstract

A. S. Belov, On the asymptotic solution of one extremal problem related to nonnegative trigonometric polynomials, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 5, pp. 27—67.

For every real number $\gamma \geqslant 1$ we denote by $K^{\downarrow}(\gamma)$ the least possible value of the constant term of an even nonnegative trigonometric polynomial with monotone coefficients such that all its coefficients, save for the constant term, are not less than 1 and the sum of these coefficients equals γ. In this paper, the asymptotic estimate of $K^{\downarrow}(\gamma)$ is found and some extremal problems on the minimum of the constant term of an even nonnegative trigonometric polynomial are studied.

1. Введение. Основной результат

Для вещественных $\gamma \geqslant 1$ обозначим

$$K(\gamma) = \inf\left\{ -\min_x \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) \right\}, \tag{1.1}$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 5, с. 27—67.

где нижняя грань берётся по всем действительным $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, таким что либо $\alpha_k = 0$, либо $\alpha_k \geqslant 1$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \gamma$. Величину (1.1) рассматривал А. М. Одлыжко [10]. Он показал, что $K(\gamma) = O\bigl((\gamma \ln \gamma)^{1/4}\bigr)$ при $\gamma \to +\infty$.

Также при всех $\gamma \geqslant 1$ определим функцию

$$K^{\downarrow}(\gamma) = \inf\biggl\{-\min_x \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx)\biggr\}, \tag{1.2}$$

где нижняя грань берётся по всем действительным $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, таким что либо $\alpha_k = 0$, либо $\alpha_k \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \gamma$ и $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3 \geqslant \ldots$. Из этих определений ясно, что

$$K^{\downarrow}(\gamma) \geqslant K(\gamma) \quad \text{при всех} \quad \gamma \geqslant 1$$

и

$$K^{\downarrow}(\gamma) = K(\gamma) = \gamma \quad \text{при} \quad \gamma \in [1, 2), \tag{1.3}$$

поскольку в этом случае и в сумме (1.1), и в сумме (1.2) только одно из $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ будет отлично от нуля и равно γ.

В [2, гл. 3] автор доказал, что существует положительная абсолютная постоянная C_1, такая что

$$C_1(1 + \ln \gamma) \leqslant K(\gamma) \leqslant K^{\downarrow}(\gamma) \leqslant \frac{1}{\pi}(\ln \gamma + 2\pi - \ln 2) \quad \text{при всех} \quad \gamma \geqslant 1 \tag{1.4}$$

и

$$K^{\downarrow}(\gamma) = \frac{1}{\pi} \ln \gamma + O\bigl(\ln \ln(\gamma + 2)\bigr) \quad \text{при} \quad \gamma \geqslant 1. \tag{1.5}$$

Отметим, что в (1.4) оценка снизу для величины (1.1) вытекает из положительного решения гипотезы Литтлвуда в [8, 9].

В [3] автор анонсировал оценку

$$K^{\downarrow}(\gamma) = \frac{1}{\pi} \ln \gamma + O(1) \quad \text{при всех} \quad \gamma \geqslant 1,$$

которая несколько улучшает оценку (1.5). Дальнейшее развитие и некоторое усложнение рассуждений позволило уточнить последнюю оценку. Оказывается, верна следующая теорема.

Теорема 1.1. *Для величины* (1.2) *справедлива оценка*

$$K^{\downarrow}(\gamma) = \frac{1}{\pi} \ln \gamma + \frac{C_0 + \ln 2 + \ln \pi}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} \frac{\ln \gamma}{\gamma} + \frac{O(1)}{\gamma} \quad \textit{при всех} \quad \gamma \geqslant 1, \tag{1.6}$$

где через

$$C_0 = \lim_{n \to \infty} \biggl(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\biggr) \tag{1.7}$$

обозначена известная постоянная Эйлера.

Естественно, что $O(1)$ в (1.6) означает некоторую ограниченную функцию на промежутке $[1, +\infty)$, т. е. существует такая положительная абсолютная постоянная C_2, что $|O(1)| \leqslant C_2$ при всех $\gamma \geqslant 1$. Из приводимого в статье доказательства соотношения (1.6) можно при желании получить конкретную оценку для постоянной C_2. Однако, чтобы избежать громоздких оценок, мы ограничились сформулированным результатом (1.6).

Основная цель этой статьи — подробное доказательство теоремы 1.1. Для этого в разделах 5 и 6 изучается одна экстремальная задача о минимуме свободного члена чётного неотрицательного тригонометрического полинома, тесно связанная с функцией (1.2).

2. О некоторых свойствах ядра Дирихле

Ядро Дирихле

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.1}$$

обладает интересными свойствами; некоторых мы не нашли в математической литературе. Изложению этих свойств (они потребуются нам при изучении свойств некоторых тригонометрических полиномов, связанных с ядром Дирихле) и посвящён данный раздел.

Отметим, что всюду в статье непрерывные функции, которые задаются некоторой формулой и в некоторых точках при формальной подстановке значений оказываются формально в этих точках не определёнными (как, например, в (2.1)), всегда считаются определёнными в этих точках по непрерывности.

Лемма 2.1. *Для каждого натурального числа n существует единственная точка*

$$z_n \in \left(\frac{2\pi}{2n+1}, \frac{3\pi}{2n+1}\right] \tag{2.2}$$

обладающая следующими свойствами:

$$D_n'(z_n) = 0,$$

$$D_n'(x) < 0 \ \ \text{при всех} \ \ x \in (0, z_n), \tag{2.3}$$

$$D_n'(x) > 0 \ \ \text{при} \ \ x \in \left(z_n, \frac{4\pi}{2n+1}\right], \tag{2.4}$$

$$D_n(x) > D_n(z_n) \ \ \text{при} \ \ x \in [0, \pi], \quad x \neq z_n, \tag{2.5}$$

$$D_n''(z_n) > 0, \tag{2.6}$$

$$z_n = \frac{\pi + v_n}{n + 1/2}, \tag{2.7}$$

где $v_n \in (0, \pi/2]$ — *единственный корень уравнения*

$$(2n+1)\operatorname{ctg} v_n = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi + v_n}{2n+1}\right). \tag{2.8}$$

Доказательство. Вспомогательная функция

$$F_n(v) = (2n+1)\operatorname{ctg} v - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi + v}{2n+1}\right), \quad v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \tag{2.9}$$

стремится к $+\infty$ при $v \to +0$,

$$F_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \leqslant 0$$

и

$$(2n+1)\sin^2(v)\sin^2\left(\frac{\pi+v}{2n+1}\right)F_n'(v) = \sin^2(v) - (2n+1)^2\sin^2\left(\frac{\pi+v}{2n+1}\right) < 0$$

при $v \in (0, \pi/2]$, поскольку

$$(2n+1)\sin\left(\frac{\pi+v}{2n+1}\right) > (2n+1)\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) > 2 > \sin v.$$

Значит, функция $F_n(v)$ строго убывает на $(0, \pi/2]$ и имеется единственная точка $v_n \in (0, \pi/2]$, такая что $F_n(v_n) = 0$, т. е. удовлетворяющая условию (2.8). По формуле (2.7) введём z_n. Тогда верно (2.2) и из (2.8) и (2.9) следует, что

$$(2n+1)\operatorname{ctg}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)z_n\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}z_n\right) = 0.$$

Значит,

$$\begin{aligned}
&(2n+1)\operatorname{ctg}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}z\right) = \\
&\quad = F_n\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)z - \pi\right) > 0 \ \text{ при } \ z \in \left(\frac{2\pi}{2n+1}, z_n\right), \qquad (2.10)\\
&(2n+1)\operatorname{ctg}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}z\right) = \\
&\quad = F_n\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)z - \pi\right) < 0 \ \text{ при } \ z \in \left(z_n, \frac{3\pi}{2n+1}\right]. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Из (2.1) получаем, что

$$\begin{aligned}
l_n(x) &= D_n'(x)4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \\
&= (2n+1)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \\
&= n\sin\bigl((n+1)x\bigr) - (n+1)\sin(nx). \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Тогда

$$l_n'(x) = -2n(n+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right),$$

функция $l_n(x)$ строго убывает на $[0, 2\pi/(2n+1)]$, строго возрастает на $[2\pi/(2n+1), 4\pi/(2n+1)]$ и

$$l_n(0) = 0, \quad l_n\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) < 0, \quad l_n\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right) \geqslant 0, \quad l_n\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right) > 0,$$

причём из первого представления (2.12), из (2.7) и (2.8) следует, что $l_n(z_n) = 0$. Поэтому выполнены (2.3) и (2.4). В частности,

$$D_n(x) > D_n(z_n)$$

при $x \in [0, 4\pi/(2n+1)]$, $x \neq z_n$. Если $x \in (3\pi/(2n+1), \pi]$, то

$$D_n(x) > D_n\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right) \geqslant D_n(z_n).$$

Отсюда вытекает (2.5). Из (2.12) выводим, что

$$D_n''(z_n) 4\sin^2\left(\frac{z_n}{2}\right) = l_n'(z_n) > 0,$$

т. е. (2.6) также справедливо. Лемма 2.1 доказана. □

Для примера отметим, что

$$z_1 = \pi, \quad z_2 = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right), \quad z_3 = \arccos\left(\frac{\sqrt{7}-1}{6}\right).$$

Поскольку функция

$$x^2\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = x\cos x - \sin x = -\int_0^x t\sin t\,dt$$

строго убывает на $[0, \pi]$ и строго возрастает на $[\pi, 2\pi]$, то существует единственная точка $\pi + v_\infty \in (\pi, 3\pi/2)$, в которой рассматриваемая функция обращается в нуль, т. е. удовлетворяет условию $\pi + v_\infty = \operatorname{tg} v_\infty$, причём $v_\infty \in (0, \pi/2)$, $x\cos x - \sin x < 0$ при $x \in (0, \pi + v_\infty)$ и $x\cos x - \sin x > 0$ при $x \in (\pi + v_\infty, 2\pi]$. Поэтому функция $\sin x/x$ строго убывает на $[0, \pi + v_\infty]$, строго возрастает на $[\pi + v_\infty, 2\pi]$ и $\sin x/x \geqslant -1/x > -2/(3\pi)$ при $x > 3\pi/2$. Следовательно,

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin(\pi + v_\infty)}{\pi + v_\infty} = -\cos v_\infty \quad \text{при всех} \quad x \in [0, +\infty), \quad x \neq \pi + v_\infty. \tag{2.13}$$

Функция $\operatorname{tg}(v) - \pi - v$ строго возрастает на $[0, \pi/2)$, обращается в нуль при $v = v_\infty$ и отрицательна при $v = \pi/4$. Значит, $v_\infty > \pi/4$. Вычисления дают, что $v_\infty/\pi = 0{,}43029665\ldots$, $\cos v_\infty = 0{,}21723362\ldots$. Лемму 2.1 дополняет следующий результат.

Лемма 2.2. *Для всех натуральных чисел* n

$$v_{n+1} < v_n, \tag{2.14}$$

$$D_n(z_n) = -\frac{\sin v_n}{2\sin(z_n/2)} = -(2n+1)\frac{\cos v_n}{2\cos(z_n/2)}, \tag{2.15}$$

$$D_n(z_n) > D_{n+1}(z_{n+1}), \tag{2.16}$$

$$\frac{D_n(z_n)}{2n+1} < \frac{D_{n+1}(z_{n+1})}{2n+3}, \tag{2.17}$$

$$\frac{1/2 - D_n(z_n)}{2n+1} > \frac{1/2 - D_{n+1}(z_{n+1})}{2n+3}, \tag{2.18}$$

$$v_n \to v_\infty \quad \textit{при} \quad n \to \infty, \tag{2.19}$$

$$\frac{1/2 - D_n(z_n)}{n+1/2} \to \cos v_\infty \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \tag{2.20}$$

Более того, при $n \geqslant 2$ *функция*

$$\frac{D_n(x) - D_n(z_n)}{(\cos x - \cos z_n)^2} \tag{2.21}$$

является положительным на всей прямой чётным тригонометрическим полиномом.

Доказательство. Поскольку $(x \operatorname{ctg} x)' < 0$ при $x \in (0, \pi)$, то функция $x \operatorname{ctg} x$ строго убывает на $[0, \pi)$. Отсюда и из (2.8) следует, что

$$\frac{1}{2n+3} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi + v_n}{2n+3}\right) > \frac{1}{2n+1} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi + v_n}{2n+1}\right) = \operatorname{ctg} v_n.$$

Но в силу (2.10) и (2.11)

$$(2n+3)\operatorname{ctg}\left((2n+3)\frac{z}{2}\right) > \operatorname{ctg}\left(\frac{z}{2}\right) \quad \text{при} \quad z \in \left(\frac{2\pi}{2n+3}, z_{n+1}\right)$$

и

$$(2n+3)\operatorname{ctg}\left((2n+3)\frac{z}{2}\right) < \operatorname{ctg}\left(\frac{z}{2}\right) \quad \text{при} \quad z \in \left(z_{n+1}, \frac{3\pi}{2n+3}\right].$$

Беря здесь

$$z = \frac{\pi + v_n}{n+3/2},$$

видим, что $z > z_{n+1}$, т. е. верно (2.14). Из (2.1) и (2.7) получаем первое равенство (2.15), а из (2.8) — второе. Поскольку $x \operatorname{ctg} x < 1$ при $x \in (0, \pi)$, то из (2.8) вытекает, что $(\pi + v_n)\operatorname{ctg} v_n < 1$ и, значит, $v_n > v_\infty$. При $n \to \infty$ из (2.8) выводим, что $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ является корнем уравнения $(\pi + v)\operatorname{ctg} v = 1$, т. е. имеет место (2.19). Отсюда и из (2.15) сразу следует (2.20). Из (2.2), (2.15) и (2.5) выводим, что

$$-D_n(z_n)=\max_{v\in[0,\pi/2]}\frac{\sin v}{2\sin((\pi+v)/(2n+1))}<\\ <\max_{v\in[0,\pi/2]}\frac{\sin v}{2\sin((\pi+v)/(2n+3))}=-D_{n+1}(z_{n+1}),$$

и (2.16) доказано. Так как

$$\frac{-D_n(z_n)}{n+1/2}=\max_{v\in[0,\pi/2]}\frac{\sin v}{(2n+1)\sin((\pi+v)/(2n+1))}>\\ >\max_{v\in[0,\pi/2]}\frac{\sin v}{(2n+3)\sin((\pi+v)/(2n+3))}=\frac{-D_{n+1}(z_{n+1})}{n+3/2},$$

то (2.17) также доказано. Из (2.17) вытекает (2.18). Отметим, что из (2.17) и (2.20) следует, что

$$\frac{-D_n(z_n)}{n+1/2}>\cos v_\infty \quad \text{при всех} \quad n=1,2,\ldots, \tag{2.22}$$

Если в (2.13) положить $x=(n+1/2)z_n$, то можно увидеть, насколько точна оценка (2.22).

Через P_n будем обозначать многочлен степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1}, такой что $D_n(x)=P_n(\cos x)$. Из (2.5) по лемме 2.1 выводим, что $P_n(\cos z_n)=D_n(z_n)$, $P_n'(\cos z_n)\sin z_n=-D_n'(z_n)=0$, $P_n(\cos x)-P_n(\cos z_n)>0$ при всех $x\in[0,\pi]$, $x\neq z_n$. По (2.6) при $n\geqslant 2$ имеем $P_n''(\cos z_n)\sin^2 z_n = D_n''(z_n)>0$. Следовательно, функция $\big(P_n(\cos x)-P_n(\cos z_n)\big)/(\cos x-\cos z_n)^2$ является положительным при всех $x\in[0,\pi]$ многочленом от $\cos x$, а это означает, что функция (2.21) положительна на всей прямой и является чётным тригонометрическим полиномом степени $n-2$. Лемма 2.2 доказана. □

При натуральных n будем использовать обозначение

$$h_n(x)=\frac{D_n(x)-D_n(\pi)}{\cos x+1}=\frac{P_n(\cos x)-P_n(-1)}{\cos x+1}. \tag{2.23}$$

Функция (2.23) является чётным тригонометрическим полиномом степени $n-1$.

Лемма 2.3. *При любом нечётном натуральном $n\geqslant 3$ для чётного тригонометрического полинома*

$$h_n(x)=\frac{D_n(x)+1/2}{\cos x+1}=\frac{P_n(\cos x)+1/2}{\cos x+1} \tag{2.24}$$

существует единственная точка

$$\delta_n\in\left(\frac{\pi}{n},\frac{3\pi}{2n+1}\right), \tag{2.25}$$

обладающая следующими свойствами:

$$h_n'(\delta_n)=0,$$
$$\delta_n>z_n,$$

$$h_n'(x) < 0 \quad \textit{при всех} \quad x \in (0, \delta_n), \tag{2.26}$$

$$h_n'(x) > 0 \quad \textit{при} \quad x \in \left(\delta_n, \frac{2\pi}{n+1}\right], \tag{2.27}$$

$$h_n(x) > h_n(\delta_n) \quad \textit{при всех} \quad x \in [0, \pi], \quad x \neq \delta_n. \tag{2.28}$$

Доказательство. Из нечётности n следует, что $D_n(\pi) = -1/2$, и из (2.23) вытекает (2.24). Из (2.1) и (2.24) выводим, что

$$2\sin x \cos\left(\frac{x}{2}\right) h_n(x) = \sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right).$$

Отсюда следует, что на интервале $(0, \pi)$ функция (2.24) имеет $n-1$ корней $2\pi k/(n+1)$ и $\pi(2k-1)/n$, $k = 1, \dots, (n-1)/2$. Заметим, что

$$\frac{\pi(2k-1)}{n} < \frac{2\pi k}{n+1} < \frac{\pi(2k+1)}{n}$$

при $k = 1, \dots, (n-1)/2$. Пусть

$$Q_n(t) = \frac{P_n(t) + 1/2}{t+1} \; -$$

многочлен степени $n-1$. Поскольку $h_n(x) = Q_n(\cos x)$, то

$$Q_n(t) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left(\left(t - \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{n}\right)\right)\left(t - \cos\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right)\right)\right).$$

Поэтому многочлен $Q_n'(t)$ имеет $n-2$ простых корней, т. е. существуют единственные точки $0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{n-2} < \pi$, такие что

$$Q_n'(t) = (n-1)2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} (t - \cos\varphi_k),$$

причём

$$\varphi_k \in \left(\frac{\pi k}{n}, \frac{\pi(k+1)}{n+1}\right)$$

при нечётном k и

$$\varphi_k \in \left(\frac{\pi k}{n+1}, \frac{\pi(k+1)}{n}\right)$$

при чётном k. Пусть $\delta_n = \varphi_1$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_{n-1} = \pi$. Тогда на интервале $(\varphi_{k-1}, \varphi_k)$, $k = 1, \dots, n-1$, производная $h_n'(x) = -Q_n'(\cos x)\sin x$ отрицательна при нечётных k и положительна при чётных k, причём $h_n'(\varphi_k) = 0$ при $k = 1, \dots, n-1$. В частности, верны (2.26) и (2.27). В силу (2.24)

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right) h_n'\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right) = \frac{(1-s)(1+2s)}{4s(1+s)} > 0, \quad \text{где} \quad s = \sin\left(\frac{3\pi}{2(2n+1)}\right),$$

и значит, справедливо (2.25). Так как

$$(1+\cos z_n)^2 h_n'(z_n) = \sin z_n \left(D_n(z_n) + \frac{1}{2}\right) < 0,$$

то $z_n < \delta_n$. Из (2.26) и (2.27) вытекает, что $h_n(x) > h_n(\delta_n)$ при $x \in [0, 2\pi/(n+1)]$, $x \neq \delta_n$. При $x \in (2\pi/(n+1), \pi)$

$$h_n(x) \geqslant \frac{\sin(x/2)-1}{2\sin x\cos(x/2)} = \frac{-1}{4\sin(x/2)(1+\sin(x/2))} > \frac{-1}{4s(1+s)} = h_n\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right).$$

Значит,

$$h_n(x) \geqslant h_n\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right) > h_n(\delta_n)$$

при всех $x \in [2\pi/(n+1), \pi]$. Следовательно, верно (2.28), и лемма 2.3 доказана. □

Например,

$$h_3(x) = 2\cos(2x) - 2\cos x + 2 = \left(2\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, \quad \delta_3 = \arccos\left(\frac{1}{4}\right).$$

При натуральном n обозначим (см. (2.12))

$$g_n(x) = \frac{D_n'(x)}{\sin x} = \frac{l_n(x)}{2\sin x(1-\cos x)}. \tag{2.29}$$

Напомним, что P_n обозначает многочлен степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1}, такой что $D_n(x) = P_n(\cos x)$. Тогда $D_n'(x) = -\sin x P_n'(\cos x)$, и из (2.29) получаем

$$g_n(x) = -P_n'(\cos x). \tag{2.30}$$

Отсюда следует, что g_n — чётный тригонометрический полином степени $n-1$. В частности,

$$g_1(x) = -1, \quad g_2(x) = -1 - 4\cos x, \quad g_3(x) = -4 - 4\cos x - 6\cos(2x).$$

Лемма 2.4. *Для каждого натурального $n \geqslant 3$ существует единственная точка*

$$\theta_n \in \left(\frac{2\pi}{2n+1}, \pi\right),$$

такая что

$$g_n'(\theta_n) = 0,$$
$$g_n'(x) > 0 \quad \text{при всех} \quad x \in (0, \theta_n), \tag{2.31}$$

причём верны оценки

$$\theta_n > z_n, \quad \theta_n > \frac{3\pi}{2n}, \quad \theta_n < \frac{4\pi}{2n+1}, \tag{2.32}$$

$$g_n'(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in \left(\theta_n, \frac{4\pi}{2n+1}\right], \tag{2.33}$$

$$\theta_n < \frac{2\pi}{n+1} \quad \textit{при} \quad n \geqslant 7, \tag{2.34}$$

$$\theta_n > \frac{2\pi}{n+1} \quad \textit{при} \quad n = 3,4,5,6. \tag{2.35}$$

Более того, все $n-2$ корней многочлена $P''_n(t)$ простые, находятся на интервале $(-1,1)$ и существует единственная точка

$$\zeta_n \in \left(\pi - \frac{\pi}{n}, \pi - \frac{2\pi}{2n+1}\right),$$

такая что

$$g_n(\zeta_n) = 0,$$
$$(-1)^n g_n(x) > 0 \quad \textit{при} \quad x \in (\zeta_n, \pi],$$
$$(-1)^n g'_n(x) > 0 \quad \textit{при} \quad x \in \left[\pi - \frac{\pi}{n}, \pi\right). \tag{2.36}$$

Доказательство. Пусть n натуральное, $n \geqslant 3$. Из (2.1) имеем

$$P_n(t) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \left(t - \cos\left(\frac{2\pi k}{2n+1}\right)\right).$$

Следовательно, существуют единственные точки

$$\xi_k^n \in \left(\frac{2\pi k}{2n+1}, \frac{2\pi(k+1)}{2n+1}\right), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

такие что

$$P'_n(t) = n2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (t - \cos\xi_k^n),$$

и существуют единственные точки

$$\theta_k^n \in (\xi_k^n, \xi_{k+1}^n), \quad k = 1, \dots, n-2,$$

такие что

$$P''_n(t) = n(n-1)2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} (t - \cos\theta_k^n).$$

Таким образом, все $n-2$ корней многочлена $P''_n(t)$ простые и лежат на интервале $(-1,1)$. Обозначим $\theta_n = \theta_1^n$. Тогда $\theta_n > \xi_1^n > 2\pi/(2n+1)$ и $\theta_n < \pi$. Пусть $\zeta_n = \xi_{n-1}^n$. По (2.30) $g_n(\xi_1^n) = 0$, $g_n(\zeta_n) = 0$ и $g_n(x) < 0$ при $x \in (0, \xi_1^n)$, $(-1)^n g_n(x) > 0$ при $x \in (\zeta_n, \pi]$. По лемме 2.1 $\xi_1^n = z_n$ и верна первая оценка (2.32). Из (2.12) и (2.29) вытекает, что $(-1)^n g_n\bigl(\pi - 2\pi/(2n+1)\bigr) > 0$ и $(-1)^n g_n(\pi - \pi/n) < 0$. Поскольку $\xi_{n-2}^n < \pi - \pi/n$, то в силу (2.30) $\zeta_n < \pi - 2\pi/(2n+1)$ и $\zeta_n > \pi - \pi/n$. По (2.30)

$$g'_n(x) = \sin x P''_n(\cos x). \tag{2.37}$$

Поэтому $g'_n(\theta_n)=0$, верно (2.31) и $g'_n(x)<0$ при $x\in(\theta_n,\xi_2^n)$. Подставляя (2.12) в (2.29) и дифференцируя, получим

$$4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\sin^2(x)g'_n(x)=l'_n(x)\sin x-l_n(x)(2\cos x+1), \tag{2.38}$$

где, напомним,

$$l_n(x)=n\sin\bigl((n+1)x\bigr)-(n+1)\sin(nx),\quad l'_n(x)=n(n+1)\bigl(\cos\bigl((n+1)x\bigr)-\cos(nx)\bigr).$$

В частности, при

$$x=u=\frac{4\pi}{2n+1}$$

имеем

$$4\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin^2(u)g'_n(u)=-(2n+1)(2\cos u+1),$$

т. е. $g'_n(u)<0$, и поскольку $\xi_2^n>u$, то верны третья оценка (2.32) и оценка (2.33). При

$$x=u_0=\frac{3\pi}{2n}$$

получаем

$$8\sin^2\left(\frac{u_0}{2}\right)\sin^2(u_0)g'_n(u_0)=$$
$$=(1+\cos u_0)\left(2n(2n-1)\sin^2\left(\frac{u_0}{2}\right)-3\right)+(1-\cos u_0)(n+1-n\cos u_0)>0,$$

поскольку

$$2n(2n-1)\sin^2\left(\frac{u_0}{2}\right)>(2n-1)\frac{9}{2n}>3.$$

Отсюда и из (2.31) и (2.33) следует второе неравенство (2.32). Аналогично при

$$x=u_1=\frac{2\pi}{n+1}$$

имеем

$$4\sin^2\left(\frac{u_1}{2}\right)\sin(u_1)g'_n(u_1)=(n+1)(n-1-(n+2)\cos u_1).$$

Поскольку при $n\geqslant 7$ из оценок

$$n-1-(n+2)\cos u_1=2(n+2)\sin^2\left(\frac{u_1}{2}\right)-3<\frac{2(n+2)\pi^2}{(n+1)^2}-3<\frac{20(n+2)}{(n+1)^2}-3<0$$

вытекает, что $g'_n(u_1)<0$, то из (2.33) и (2.31) следует (2.34). Так как

$$5-8\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)>0,$$

то неравенство $n-1-(n+2)\cos u_1>0$ верно при $n=6$, а при $n=3,4,5$ оно очевидно. Отсюда и из (2.31) и (2.33) следует (2.35). Так как

$$\theta_{n-2}^n<\xi_{n-1}^n<\frac{2\pi n}{2n+1}$$

и $(-1)^n P_n''(\cos x) > 0$ при $x \in (\theta_{n-2}^n, \pi)$, то из (2.30) и (2.37) вытекает справедливость оценки (2.36) при всех $x \in (\theta_{n-2}^n, \pi)$. Из (2.38) при

$$x = u_2 = \frac{\pi(n-1)}{n}$$

получаем

$$4\sin^2\left(\frac{u_2}{2}\right)\sin^2(u_2)(-1)^n g_n'(u_2) = n\sin(u_2)\big((n-1)(1-\cos u_2)+3\big) > 0.$$

Следовательно, $\theta_{n-2}^n < u_2$, и (2.36) верно. Лемма 2.4 доказана. □

Лемма 2.5. *При любом чётном натуральном n тригонометрический полином*

$$h_n(x) = \frac{D_n(x) - 1/2}{\cos x + 1} = \frac{P_n(\cos x) - 1/2}{\cos x + 1} \tag{2.39}$$

обладает свойством

$$|h_n(x)| < -h_n(\pi) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{при всех} \quad x \in [0, \pi). \tag{2.40}$$

Доказательство. Так как $|\sin(mx)| \leqslant \big|\sin\big((m-1)x\big)\big| + |\sin x|$, то $|\sin(mx)| \leqslant m|\sin x|$ при всех x и натуральном m. Поэтому

$$|\sin(mx)| \leqslant |\sin((m-2)x)| + |\sin(2x)| \leqslant (m-2+2|\cos x|)|\sin x| < m|\sin x|$$

при всех $x \in (0, \pi)$ и натуральном $m \geqslant 2$. По (2.39) при чётном n имеем

$$h_n(\pi - v) = \frac{-\sin(nv/2)}{\sin v}\,\frac{\sin((n+1)v/2)}{\sin(v/2)}.$$

Поэтому

$$h_n(\pi) = -\frac{n(n+1)}{2}$$

и

$$|h_n(\pi - v)| \leqslant \frac{n}{2}\left|\frac{\sin((n+1)v/2)}{\sin(v/2)}\right| < \frac{n(n+1)}{2}$$

при $v \in (0, \pi]$, т. е. (2.40) верно. Лемма 2.5 доказана. □

3. О некоторых тригонометрических полиномах, связанных с ядром Дирихле

При всех $z \in [0, \pi)$ и натуральных $n > 1$ будем изучать чётный тригонометрический полином степени n

$$\begin{aligned} U_n(z; x) &= g_n(z)\cos x + D_n(x) - g_n(z)\cos z - D_n(z) = \\ &= \left(\frac{1}{2} - g_n(z)\cos z - D_n(z)\right) + \big(1 + g_n(z)\big)\cos x + \sum_{k=2}^{n}\cos(kx), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где используются обозначения (2.1) и (2.29). Из этого определения следует, что $U_n(z;z)=0$ и

$$\big(U_n(z;x)\big)'_x = \sin x\big(g_n(x)-g_n(z)\big), \tag{3.2}$$

$$\big(U_n(z;x)\big)'_z = (\cos x-\cos z)g'_n(z). \tag{3.3}$$

Например,

$$\begin{aligned}
&U_2(z;x) = \cos(2x) - 4\cos z\cos x + 2 + \cos(2z) = 2(\cos x-\cos z)^2,\\
&U_3(z;x) = \cos(3x) + \cos(2x) + \big(-3-4\cos z-6\cos(2z)\big)\cos x +\\
&\quad + 2 + 6\cos z + \cos(2z) + 2\cos(3z) = 2(\cos x-\cos z)^2(2\cos x+4\cos z+1).
\end{aligned}$$

Согласно (2.29) и (2.4) $g_n(z_n)=0$ и

$$g_n(z)>0 \quad \text{при} \quad x\in\left(z_n, \frac{4\pi}{2n+1}\right]. \tag{3.4}$$

Из (3.1), (3.2) и (2.21) вытекает, что функция

$$\frac{U_n(z;x)}{(\cos x-\cos z)^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\cos x-\cos z)}\left(\frac{\cos(kx)-\cos(kz)}{\cos x-\cos z} - \frac{k\sin(kz)}{\sin z}\right) \tag{3.5}$$

является чётным тригонометрическим полиномом степени $n-2$, причём

$$\frac{U_n(z_n;x)}{(\cos x-\cos z_n)^2} = \frac{D_n(x)-D_n(z_n)}{(\cos x-\cos z_n)^2} > 0 \quad \text{при всех} \quad x. \tag{3.6}$$

Лемма 3.1. *Для каждого натурального $n\geqslant 3$ при фиксированном $x\in[0,\theta_n]$ полином $U_n(z;x)$ как функция от z строго убывает при $z\in[0,x]$ и строго возрастает при $z\in[x,\theta_n]$, причём*

$$U_n(z;x)>0 \quad \textit{при} \quad x\in[0,\theta_n], \quad z\in[0,\theta_n], \quad z\neq x. \tag{3.7}$$

Более того, при любом фиксированном $x\in[\theta_n,\pi]$ полином $U_n(z;x)$ как функция от z строго убывает при $z\in[0,\theta_n]$.

Доказательство. Зафиксируем $x\in[0,\theta_n]$. Тогда из (3.3) и (2.31) следует, что производная $\big(U_n(z;x)\big)'_z$ отрицательна при $z\in(0,x)$ и положительна при $z\in(x,\theta_n)$. Значит, функция $U_n(z;x)$ строго убывает при $z\in[0,x]$, строго возрастает при $z\in[x,\theta_n]$ и принимает нулевое значение при $z=x$. Отсюда вытекает (3.7). Теперь зафиксируем $x\in[\theta_n,\pi]$. Тогда из (3.3) и (2.31) следует, что $\big(U_n(z;x)\big)'_z<0$ при $z\in(0,\theta_n)$. Лемма 3.1 доказана. □

Лемма 3.2. *Для каждого натурального $n\geqslant 2$ функция* (3.5) *как функция от x является чётным тригонометрическим полиномом степени $n-2$ с коэффициентами, непрерывно зависящими от z. Более того, полином* (3.5) *положителен при всех $x\in[0,\theta_n]$, $z\in[0,\theta_n)$.*

Доказательство. При натуральных k верно равенство

$$\frac{\cos(kx)-\cos(kz)}{\cos x-\cos z}=\sum_{j=1}^{k-1}2\frac{\sin((k-j)z)}{\sin z}\cos(jx)+\frac{\sin(kz)}{\sin z}.$$

которое легко доказать по индукции, поскольку

$$\frac{\cos(kx)-\cos(kz)}{\cos x-\cos z}=2\cos\bigl((k-1)x\bigr)+ \\ +2\cos z\frac{\cos((k-1)x)-\cos((k-1)z)}{\cos x-\cos z}-\frac{\cos((k-2)x)-\cos((k-2)z)}{\cos x-\cos z}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\cos x-\cos z}\left(\frac{\cos(kx)-\cos(kz)}{\cos x-\cos z}-\frac{k\sin(kz)}{\sin z}\right) \\ =\sum_{\nu=1}^{k-1}2\frac{\sin((k-\nu)z)}{\sin z}\left(\sum_{j=1}^{\nu-1}2\frac{\sin((\nu-j)z)}{\sin z}\cos(jx)+\frac{\sin(\nu z)}{\sin z}\right),$$

и из представления (3.5) получаем непрерывность коэффициентов полинома (3.5). Согласно (2.30) и (3.1)

$$U_n(z;x)=P_n(\cos x)-P_n(\cos z)-P_n'(\cos z)(\cos x-\cos z).$$

Поэтому полином (3.5) при $x=z\in[0,\theta_n)$ в силу (2.30) и (2.31) принимает значение $P_n''(\cos z)/2>0$. Отсюда и из (3.7) получаем последнее утверждение леммы 3.2, чем и завершается её доказательство. □

Лемма 3.3. *При любом нечётном натуральном* $n\geqslant 3$

$$\frac{U_n(z;x)}{(\cos x-\cos z)^2}>0 \quad \text{при всех} \quad x\in[0,\pi), \quad z\in[0,\delta_n], \tag{3.8}$$

$$U_n(z;\pi)>0 \quad \text{при всех} \quad z\in[0,\delta_n), \tag{3.9}$$

$$U_n(\delta_n;\pi)=0, \tag{3.10}$$

$$U_n(z;\pi)<0 \quad \text{при всех} \quad z\in\left(\delta_n,\frac{2\pi}{n+1}\right], \tag{3.11}$$

$$\frac{U_n(\delta_n;x)}{1+\cos x}>0 \quad \text{при всех} \quad x\in[0,\pi], \quad x\neq\delta_n. \tag{3.12}$$

Доказательство. Согласно (2.25) и (2.32)

$$z_n<\delta_n<\frac{3\pi}{2n+1}<\frac{2\pi}{n+1}, \quad \delta_n<\frac{3\pi}{2n}<\theta_n<\frac{4\pi}{2n+1}. \tag{3.13}$$

С учётом (3.1) и (2.24) имеем

$$U_n(z;\pi)=-g_n(z)(1+\cos z)+D_n(\pi)-D_n(z)= \\ =-(1+\cos z)\bigl(g_n(z)+h_n(z)\bigr)=-\frac{(1+\cos z)^2}{\sin z}h_n'(z).$$

Отсюда и из (2.26) и (2.27) по лемме 2.3 получаем (3.9), (3.11) и (3.10) и равенство $g_n(\delta_n)+h_n(\delta_n)=0$. Поэтому из (3.1), (3.10) и (2.23) выводим, что

$$U_n(\delta_n;x)=g_n(\delta_n)(\cos x+1)+D_n(x)-D_n(\pi)=$$
$$=(\cos x+1)\big(g_n(\delta_n)+h_n(x)\big)=(\cos x+1)\big(h_n(x)-h_n(\delta_n)\big).$$

Ввиду (2.28) верно (3.12). По лемме 3.1 согласно (3.13) при $x\in[\theta_n,\pi)$ и $z\in[0,\delta_n]$ получаем, что $U_n(z;x)\geqslant U_n(\delta_n;x)>0$. Если $x\in[0,\theta_n]$, то полином (3.5) положителен при $z\in[0,\delta_n]$. Значит, и (3.8) верно. Лемма 3.3 доказана. □

Лемма 3.4. *Для каждого чётного $n\geqslant 4$ существуют единственные точки*

$$\delta_n\in\left(z_n,\frac{3\pi}{2n+1}\right),\quad \beta_n\in\left(\frac{\pi(2n-1)}{2n+1},\pi\right),\tag{3.14}$$

такие что

$$\frac{U_n(z;x)}{(\cos x-\cos z)^2}>0 \ \textit{ при всех } \ x,\quad z\in[0,\delta_n),\tag{3.15}$$

$$U_n(\delta_n;\beta_n)=0,\tag{3.16}$$

$$U_n(\delta_n;x)>0 \ \textit{ при всех } \ x\in[0,\pi],\quad x\neq\delta_n,\quad x\neq\beta_n,\tag{3.17}$$

$$g_n(\beta_n)=g_n(\delta_n),\tag{3.18}$$

$$U_n(z;\beta_n)<0 \ \textit{ при } \ z\in(\delta_n,\theta_n].\tag{3.19}$$

Более того,

$$\frac{U_n(\delta_n;x)}{(\cos x-\cos\delta_n)^2(\cos x-\cos\beta_n)^2}>0 \ \textit{ при всех } \ x.\tag{3.20}$$

Доказательство. Пусть $n\geqslant 4$ является чётным числом. Из (3.6) следует, что $U_n(z_n;\pi)>0$. Из (3.1), (2.39) и (2.29) вытекает, что

$$U_n(z;\pi)=-g_n(z)(1+\cos z)+D_n(\pi)-D_n(z)=-(1+\cos z)\big(g_n(z)+h_n(z)\big).$$

Отсюда и из (2.29), обозначая

$$s=\sin\left(\frac{3\pi}{2(2n+1)}\right),$$

выводим, что

$$U_n\left(\frac{3\pi}{2n+1};\pi\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2s}-\frac{1-s^2}{4s^3}=\frac{(1+s)^2(2s-1)}{4s^3}\leqslant 0.$$

По лемме 3.1 полином $U_n(z;\pi)$ строго убывает при $z\in[0,\theta_n]$. Поэтому существует единственная точка

$$\delta_n^*\in\left(z_n,\frac{3\pi}{2n+1}\right],$$

такая что $U_n(\delta_n^*;\pi)=0$. Тогда $g_n(\delta_n^*)+h_n(\delta_n^*)=0$. Поэтому из (3.1) получаем, что

$$
\begin{aligned}
U_n(\delta_n^*;x)&=D_n(x)-D_n(\pi)+g_n(\delta_n^*)(\cos x+1)=\\
&=(\cos x+1)\bigl(h_n(x)+g_n(\delta_n^*)\bigr)=(\cos x+1)\bigl(h_n(x)-h_n(\delta_n^*)\bigr).
\end{aligned}
$$

Но по лемме 2.5 $h_n(\pi)-h_n(\delta_n^*)<0$. Следовательно существует такая точка $x^*\in(0,\pi)$, что $U_n(\delta_n^*;x)<0$ при $x\in(x^*,\pi)$. По лемме 3.1 существуют единственные точки $\delta_n\in(z_n,\delta_n^*)$ и $\beta_n\in[\theta_n,\pi)$, такие что $U_n(z;x)>0$ при $z\in[z_n,\delta_n)$ и $x\in[\theta_n,\pi]$ и $U_n(\delta_n;\beta_n)=0$, т. е. справедливо (3.16). По лемме 3.2 верно (3.15) и $U_n(\delta_n;x)\geqslant 0$ при всех x. Поэтому производная от полинома $U_n(\delta_n;x)$ в точке $x=\beta_n$ равна нулю, и в силу (3.2) выполнено (3.18). Из (3.1), (3.16) и (3.18) следует, что $U_n(\delta_n;x)=U_n(\beta_n;x)$ при всех x. По лемме 3.1 справедливо (3.19). Из неотрицательности полинома $U_n(\delta_n;x)$ следует, что его свободный член не меньше 1, т. е. $-g_n(\delta_n)\cos\delta_n-D_n(\delta_n)\geqslant 1/2$, и

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)U_n(\delta_n;x)=p_n\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)+\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\geqslant 0$$

при всех $x\in[0,\pi]$, где

$$p_n(t)=2\bigl(-g_n(\delta_n)\cos\delta_n-D_n(\delta_n)\bigr)t+g_n(\delta_n)(2t-4t^3).$$

Тогда в силу (3.4) производная

$$p_n'(t)=2\bigl(-g_n(\delta_n)\cos\delta_n-D_n(\delta_n)\bigr)+g_n(\delta_n)(2-12t^2)$$

строго убывает на отрезке $[0,1]$. Поэтому функция $p_n(t)$ выпукла вверх на $[0,1]$. Из (3.7) следует, что

$$U_n\left(\delta_n;\frac{3\pi}{2n+1}\right)>0.$$

Так как

$$U_n\left(\delta_n;\frac{\pi(2n-1)}{2n+1}\right)\geqslant 0,$$

то

$$p_n\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)\right)-1>0$$

и

$$p_n\left(\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2n+1}\right)\right)-1\geqslant 0.$$

Следовательно,

$$p_n\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)>1,$$

а значит,

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)U_n(\delta_n;x)\geqslant p_n\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)-1>0$$

при всех $x\in\bigl[3\pi/(2n+1),\pi(2n-1)/(2n+1)\bigr)$. По (3.7) $U_n(\delta_n;x)>0$ при всех $x\in\bigl(\delta_n,\pi(2n-1)/(2n+1)\bigr)$. Поэтому $\beta_n\geqslant\pi(2n-1)/(2n+1)$.

Предположим, что
$$\beta_n = \frac{\pi(2n-1)}{2n+1},$$
и пусть
$$s_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2n+1}\right).$$
Тогда
$$g_n(\beta_n) = \frac{1}{8s_1^3},$$
и в силу (3.16) и (3.18)
$$U_n(\delta_n; x) = U_n(\beta_n; x) \leqslant \frac{1}{8s_1^3}(1-\cos\beta_n) + D_n(x) - D_n(\beta_n).$$
Поэтому
$$U_n\left(\delta_n; \frac{3\pi}{2n+1}\right) \leqslant \frac{1}{8s_1^3}\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right) - \frac{1}{2s} + \frac{1}{2s_1} = \frac{3}{4s_1} - \frac{1}{2s} < 0.$$
Значит,
$$\beta_n > \frac{\pi(2n-1)}{2n+1},$$
и верно (3.14). Но в силу (3.2) $\big(U_n(\delta_n; x)\big)'_x = \sin x\big(g_n(x) - g_n(\delta_n)\big)$, и ввиду (3.18) и (2.36) по лемме 2.4 получаем, что $\big(U_n(\delta_n; x)\big)'_x > 0$ при $x \in (\beta_n, \pi)$ и $\big(U_n(\delta_n; x)\big)'_x < 0$ при $x \in (\pi(n-1)/n, \beta_n)$, причём вторая производная от полинома $U_n(\delta_n; x)$ в точке $x = \beta_n$ равна $\sin\beta_n g'_n(\beta_n)$ и согласно (2.36) положительна. Поэтому по лемме 3.2 верно (3.20) и (3.17). Лемма 3.4 доказана. □

Условия (3.16) и (3.18) образуют систему из двух уравнений, которая позволяет найти значения δ_n и β_n, причём эта система заменится на эквивалентную, если в (3.16) и (3.18) поменять местами δ_n и β_n. Но для нахождения значений δ_n и β_n проще заметить, что согласно (3.5) полином (3.5) равен $Y_{n-2}(\cos x, \cos z)$, где $Y_{n-2}(u, v)$ — многочлен от двух переменных, причём как многочлен от u он имеет степень $n-2$.

Обозначим через $Z(v)$ дискриминант многочлена $Y_{n-2}(u, v)$ при заданном v. Тогда $\cos\delta_n$ и $\cos\beta_n$ — корни многочлена $Z(v)$, т. е. $Z(\cos\delta_n) = 0$ и $Z(\cos\beta_n) = 0$. Условия (3.14) позволяют выбрать подходящие корни.

4. О некоторых вспомогательных последовательностях

Далее пусть n — натуральное число. Через $\mathbb{T}_n^+$ будем обозначать множество всех чётных неотрицательных тригонометрических полиномов вида
$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx). \tag{4.1}$$

Говорят, что коэффициенты полинома (4.1) монотонны, если

$$2a_0 \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0.$$

Через $\mathbb{W}_n$ обозначим совокупность всех неотрицательных тригонометрических полиномов T_n вида (4.1), таких что $a_k \geqslant 1$ при всех $k = 1, \ldots, n$. Через $\mathbb{W}_n^{\downarrow}$ будем обозначать множество всех полиномов вида (4.1), которые принадлежат $\mathbb{T}_n^+$ и коэффициенты которых удовлетворяют условию $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 1$. Для любого полинома (4.1) из $\mathbb{T}_n^+$ справедлива оценка $2a_0 \geqslant a_1$. Поэтому полином из $\mathbb{W}_n^{\downarrow}$ всегда имеет монотонные коэффициенты.

Далее будем использовать обозначение

$$c_k = 2^{-2k}(k!)^{-2}(2k)! \quad \text{при всех} \quad k \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Так как $2kc_k = (2k-1)c_{k-1}$ при $k \geqslant 1$, то последовательность (4.2) положительна и строго убывает. Квадратные скобки далее обозначают целую часть. При всех натуральных n пусть

$$M(n) = \frac{1}{2}\biggl(\sum_{k=0}^{[n/2]} c_k^2 + \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} c_k^2\biggr), \tag{4.3}$$

$$\psi(n) = \frac{1}{2}\biggl(\sum_{k=0}^{[n/2]} c_k + \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} c_k\biggr)^2 - M(n). \tag{4.4}$$

При натуральных n положим (см. [1])

$$V_n(x) = \frac{1}{2}\biggl|\sum_{k=0}^{n} c_{\min\{k,n-k\}} e^{ikx}\biggr|^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k^n \cos(kx). \tag{4.5}$$

Полином V_n принадлежит $\mathbb{W}_n^{\downarrow}$, и, более того,

$$2a_0^n > a_1^n > \ldots > a_m^n = a_{m+1}^n = \ldots = a_n^n = 1,$$

где $m = n-[n/2]$, $a_0^n = M(n)$, и для каждого натурального n и любого полинома $T_n \in \mathbb{W}_n$ вида (4.1), который отличен от полинома V_n, справедливо неравенство $a_0 > M(n)$. Таким образом, полином V_n является единственным экстремальным полиномом экстремальной задачи

$$M(n) = \min\{a_0 \colon T_n \in \mathbb{W}_n\}.$$

Из (4.4) и (4.5) следует, что

$$\psi(n) = V_n(0) - M(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k^n. \tag{4.6}$$

Основная цель этого раздела — изучение последовательностей (4.3) и (4.4).

Из (4.6) следует, что $\psi(n) \geqslant n$ при всех натуральных n. Формулы (4.2)—(4.4) позволяют легко вычислять значения последовательностей (4.3) и (4.4) при небольших n. Например, для дальнейшего изложения полезно знать, что

$$M(1)=1,\quad M(2)=\frac{9}{8},\quad M(3)=\frac{5}{4},\quad M(4)=1+\frac{41}{128},$$
$$M(5)=1+\frac{25}{64},\quad M(6)=1+\frac{7}{16}+\frac{1}{512},\quad M(7)=1+\frac{31}{64}+\frac{1}{256};\tag{4.7}$$

$$\psi(1)=1,\quad \psi(2)=2,\quad \psi(3)=3+\frac{1}{4},\quad \psi(4)=4+\frac{3}{8},$$
$$\psi(5)=5+\frac{41}{64},\quad \psi(6)=7-\frac{3}{16},\quad \psi(7)=8+\frac{5}{64}+\frac{1}{256}.\tag{4.8}$$

Индукцией по натуральным ν легко доказывается равенство

$$\sum_{k=1}^{\nu-1} c_k = 2\nu c_\nu \quad \text{при всех} \quad \nu \geqslant 1.\tag{4.9}$$

Это равенство полезно при вычислении по формуле (4.4). В [4, теорема 3] изучается поведение последовательностей $V_n(0)$, $M(n)$, $\psi(n)$, $n=1,2,\dots$. Следующая лемма дополняет и частично повторяет полученные в [4] оценки.

Лемма 4.1. *При всех натуральных n справедливы оценки*

$$1 \leqslant \psi(n+1)-\psi(n) < \frac{4}{\pi},\tag{4.10}$$

$$\frac{\psi(n+1)}{n+1} > \frac{\psi(n)}{n} \quad \textit{при} \quad n \geqslant 2,\tag{4.11}$$

$$\psi(n) > n \quad \textit{при} \quad n \geqslant 3,\tag{4.12}$$

$$\psi(n) > n+1 \quad \textit{при} \quad n \geqslant 7,\tag{4.13}$$

$$n \leqslant \psi(n) < n+1 \quad \textit{при} \quad n \leqslant 6,\tag{4.14}$$

$$\psi(n) < \frac{4}{\pi}(n-2)+2 \quad \textit{при} \quad n \geqslant 3,\tag{4.15}$$

$$M(n+1)-M(n) = \frac{1}{2}c^2_{[(n+1)/2]} < \frac{2}{\pi(2n+1)},\tag{4.16}$$

$$\psi(n+1)-\psi(n) > \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{2}{4n+5}\right).\tag{4.17}$$

Доказательство. По (4.3) при любом натуральном m имеем

$$M(2m-1)=\sum_{k=0}^{m-1} c_k^2,\quad M(2m)=\sum_{k=0}^{m-1} c_k^2+\frac{1}{2}c_m^2,$$
$$M(2m)-M(2m-1)=\frac{1}{2}c_m^2,\quad M(2m+1)-M(2m)=\frac{1}{2}c_m^2.$$

Отсюда вытекает первое равенство (4.16). Так как

$$mc_m^2 > (m-1)c_{m-1}^2,\quad (4m+1)c_m^2 > (4m-3)c_{m-1}^2$$

и по известной формуле Стирлинга $(4m+1)c_m^2 \to 4/\pi$ при $m\to\infty$, то

$$(m+1)c_{m+1}^2 > mc_m^2 \geqslant \frac{1}{4},\quad (4m+1)c_m^2 < \frac{4}{\pi}\tag{4.18}$$

при всех натуральных m. Поэтому $\pi(2n+1)c^2_{[(n+1)/2]} < 4$ при всех натуральных n, и неравенство (4.16) доказано. Из (4.5) и (4.9) при натуральных m следуют равенства

$$V_{2m-1}(0) = 8m^2 c_m^2, \quad V_{2m}(0) = \left(8m^2 + 4m + \frac{1}{2}\right) c_m^2,$$

$$V_{2m}(0) - V_{2m-1}(0) = \left(4m + \frac{1}{2}\right) c_m^2, \quad V_{2m+1}(0) - V_{2m}(0) = \left(4m + \frac{3}{2}\right) c_m^2.$$

Отсюда и из (4.6) выводим

$$\psi(2m) - \psi(2m-1) = 4mc_m^2, \quad \psi(2m+1) - \psi(2m) = (4m+1)c_m^2. \tag{4.19}$$

Из (4.19) и (4.18) вытекает (4.10), причём $\psi(n+1) - \psi(n) > 1$ при $n \geqslant 2$. В частности, $\psi(n+1) - (n+1) \geqslant \psi(n) - n$ при всех натуральных n. Поэтому из соотношений $\psi(3) - 3 > 0$ и $\psi(7) - 7 > 1$ следуют (4.12) и (4.13). Оценки (4.14) проверяются непосредственно по (4.8). Из (4.10) при $n \geqslant 3$ имеем

$$\psi(n) - 2 = \sum_{k=2}^{n-1} \bigl(\psi(k+1) - \psi(k)\bigr) < \frac{4}{\pi}(n-2),$$

и (4.15) доказано. Из (4.6) получаем

$$\psi(2m-1) = 8m^2 c_m^2 - \sum_{k=0}^{m-1} c_k^2, \quad \psi(2m) = (8m^2 + 4m)c_m^2 - \sum_{k=0}^{m-1} c_k^2.$$

Отсюда следует, что

$$(2m-1)\psi(2m) - 2m\psi(2m-1) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k^2 - 4mc_m^2,$$

$$2m\psi(2m+1) - (2m+1)\psi(2m) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k^2 - 2mc_m^2.$$

Но по индукции легко доказывается, что

$$\sum_{k=0}^{m-1} c_k^2 - 4mc_m^2 = \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) c_k^2.$$

Поэтому верно (4.11).

Так как

$$\frac{4m(8m+1)}{8m-1} c_m^2 > \frac{(8m+9)(2m+1)^2}{(8m+7)(m+1)} c_m^2 = \frac{4(m+1)(8m+9)}{8m+7} c_{m+1}^2$$

и последняя величина по формуле Стирлинга стремится к $4/\pi$ при m, стремящемся к бесконечности, то

$$\frac{4m(8m+1)}{8m-1} c_m^2 > \frac{4}{\pi}$$

при всех натуральных m. Поэтому

$$\psi(2m)-\psi(2m-1)=4mc_m^2>\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{2}{8m+1}\right)$$

и (4.17) верно при $n=2m-1$,

$$\psi(2m+1)-\psi(2m)=(4m+1)c_m^2>\frac{(4m+1)}{\pi m}\left(1-\frac{2}{8m+1}\right)>\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{2}{8m+5}\right)$$

и (4.17) верно при $n=2m$. Лемма 4.1 доказана. □

5. Об одной экстремальной задаче на множестве неотрицательных тригонометрических полиномов

Пусть n — натуральное число. Для каждого $\gamma\geqslant n$ рассмотрим (см. [5]) экстремальную задачу

$$K_n(\gamma)=\min\left\{a_0\colon T_n\in\mathbb{W}_n,\ \sum_{k=1}^{n}a_k=\gamma\right\},\tag{5.1}$$

т. е. задачу о минимуме свободного члена неотрицательного тригонометрического полинома при указанных условиях на коэффициенты (см. [3]). В [5] доказано, что для каждого натурального числа n экстремальный полином в задаче (5.1) существует для любого числа $\gamma\geqslant n$, причём функция $K_n(\gamma)$ непрерывна и выпукла вниз на всём промежутке $[n,+\infty)$. Более того, на промежутке $[\psi(n),+\infty)$ функция $K_n(\gamma)$ строго возрастает, имеет неубывающую непрерывную производную $K_n'(\gamma)$ и экстремальный полином V_n^γ единствен и имеет монотонные коэффициенты, а при $n\geqslant 3$ и $\gamma\in[n,\psi(n)]$ функция $K_n(\gamma)$ строго убывает. Если $\gamma=n$, то единственный экстремальный полином задачи (5.1) имеет вид

$$V_n^n(x)=K_n(n)+\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=D_n(x)-D_n(z_n)=U_n(z_n;x).\tag{5.2}$$

Из (5.2) следует, что

$$K_n(n)=\frac{1}{2}-D_n(z_n).\tag{5.3}$$

Отметим также, что $K_n\bigl(\psi(n)\bigr)=M(n)$ при всех натуральных n. Для каждого n при всех $j=0,\dots,[n/2]$ положим

$$\gamma_j^n=c_j^2\left(\frac{(n+1)n}{2}+1+j(2n+3)+2j^2\right)-\sum_{k=0}^{j}c_k^2.\tag{5.4}$$

Тогда

$$\psi(n) = \gamma^n_{[n/2]} < \ldots < \gamma^n_0 = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{5.5}$$

Пусть функция $h_n(\gamma)$ определена на сегменте $[\psi(n), n(n+1)/2]$ следующим образом: для каждого $s = 1, \ldots, [n/2]$ и $\gamma \in [\gamma^n_s, \gamma^n_{s-1}]$

$$h_n(\gamma) = \frac{2\Big(\gamma - 8(sc_s)^2 + \sum\limits_{k=0}^{s-1} c_k^2\Big)(n+1-2s)^{-1/2}}{4sc_s\sqrt{n+1-2s} + \sqrt{2(n-2s)\Big(\gamma + \sum\limits_{k=0}^{s-1} c_k^2\Big) + 16(sc_s)^2}} \tag{5.6}$$

Тогда при $s = 1, \ldots, [n/2]$ и $\gamma \in [\gamma^n_s, \gamma^n_{s-1}]$ верны равенства

$$K_n(\gamma) = \sum_{k=0}^{s-1} c_k^2 + \frac{1}{2}(n+1-2s)h_n^2(\gamma) \tag{5.7}$$

и

$$V^\gamma_n(x) = \frac{1}{2}\bigg|\sum_{k=0}^{n} \max\{c_k, c_{n-k}, h_n(\gamma)\}e^{ikx}\bigg|^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k(n;\gamma)\cos(kx), \tag{5.8}$$

причём

$$\begin{aligned} 2a_0(n;\gamma) > a_1(n;\gamma) > \ldots > a_{n-s}(n;\gamma) = \\ = 1 + 2(h_n(\gamma) - c_s) \geqslant 1 = a_{n-s+1}(n;\gamma) = \ldots = a_n(n;\gamma). \end{aligned}$$

В случае $\gamma \geqslant n(n+1)/2$ экстремальный полином задаётся формулой

$$V^\gamma_n(x) = \frac{\gamma}{n} + \frac{2\gamma}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\cos(kx) = \frac{\gamma\sin^2((n+1)x/2)}{n(n+1)\sin^2(x/2)}, \tag{5.9}$$

и

$$K_n(\gamma) = \frac{\gamma}{n}. \tag{5.10}$$

Отметим, что

$$h_n(\gamma^n_j) = c_j, \quad K'_n(\gamma^n_j) = \frac{1}{n+2j} \quad \text{при всех} \quad j = 0, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right], \tag{5.11}$$

и на отрезке $[\psi(n), n(n+1)/2]$ функция $h_n(\gamma)$ и производная $K'_n(\gamma)$ строго возрастают, причём $K'_n(\gamma) = 1/n$ при $\gamma \geqslant n(n+1)/2$. Отсюда и из (5.10), (5.11) следует, что

$$\frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{n+2[n/2]} \leqslant K'_n(\gamma) \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{при} \quad \gamma \in [\psi(n), +\infty). \tag{5.12}$$

Таким образом, при $\gamma \geqslant \psi(n)$ экстремальная задача (5.1) полностью решена в [5]. Доказано, что найденный единственный экстремальный полином (5.8) (или (5.9)) имеет монотонные коэффициенты. Согласно (4.8) при $n = 1$ и $n = 2$ задача (5.1) решена также при $\gamma \geqslant n$. В [5] при $n = 3$ и $n = 4$ задача (5.1) также решена при $\gamma \geqslant n$, и экстремальный полином и в этом случае единствен и имеет монотонные коэффициенты. Как будет видно далее, задача (5.1) тесно связана с задачей (1.2). Мы остановимся на некоторых свойствах функции (5.7), но основная цель этого раздела состоит в нахождении точного решения задачи (5.1) в окрестности точки $\gamma = n$. При этом наше изложение не ограничится утверждениями, требующимися для доказательства теоремы 1.1, Это связано с тем, что задача (5.1) представляет самостоятельный интерес.

Лемма 5.1. *Функция $K_n(\gamma)/\gamma$ строго убывает на отрезке $[n, n(n+1)/2]$ и $K_n(\gamma)/\gamma = 1/n$ при $\gamma \geqslant n(n+1)/2$.*

Доказательство. При $\gamma \in [n, \psi(n)]$ функция $K_n(\gamma)$, а значит, и функция $K_n(\gamma)/\gamma$ строго убывает. Если $\gamma \geqslant n(n+1)/2$, то утверждение леммы вытекает из (5.10). Пусть

$$\psi(n) \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 \leqslant \frac{n(n+1)}{2}.$$

Тогда (см. (5.8)) $(\gamma_2/\gamma_1)V_n^{\gamma_1} \in \mathbb{W}_n^{\downarrow}$ и $(\gamma_2/\gamma_1)\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(n;\gamma_1) = \gamma_2$. Поскольку экстремальный полином $V_n^{\gamma_2}$ единствен и $a_n(n;\gamma_2) = 1 < (\gamma_2/\gamma_1)a_n(n;\gamma_1)$, то свободный член полинома $(\gamma_2/\gamma_1)V_n^{\gamma_1}$ больше свободного члена полинома $V_n^{\gamma_2}$, т. е. $(\gamma_2/\gamma_1)K_n(\gamma_1) > K_n(\gamma_2)$, и функция $K_n(\gamma)/\gamma$ строго убывает на отрезке $[\psi(n), n(n+1)/2]$. Лемма 5.1 доказана. □

Лемма 5.2. *При натуральных $n \geqslant 4$ справедливы оценки*

$$\gamma_1^n < \frac{n(n-1)}{2} \tag{5.13}$$

и

$$K_n\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) < \frac{n}{2}. \tag{5.14}$$

Доказательство. Из (5.4) при $n \geqslant 2$ имеем $8\gamma_1^n = n^2 + 5n + 2$. Поэтому при $n \geqslant 4$ получаем

$$4(n(n-1) - 2\gamma_1^n) = 3n(n-3) - 2 \geqslant 10.$$

Отсюда следует (5.13). При $n \geqslant 4$ и $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_0]$ из (5.6) и (5.7) при $s = 1$ имеем

$$K_n(\gamma) = 1 + \frac{1}{2(n-2)^2}\bigl(\sqrt{2(n-2)\gamma + 2n} - 2\sqrt{n-1}\,\bigr)^2$$

Отсюда по (5.13) и (5.5) получаем, что

$$K_n\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2(n-2)^2}\bigl(\sqrt{n(n^2-3n+4)} - 2\sqrt{n-1}\,\bigr)^2.$$

Поэтому неравенство (5.14) эквивалентно неравенству

$$\bigl(\sqrt{n(n^2-3n+4)} - 2\sqrt{n-1}\,\bigr)^2 < (n-2)^3,$$

т. е. неравенству

$$\sqrt{(n-2)^3 + 3(n-2)^2 + 4(n-1)} < 2\sqrt{n-1} + (n-2)\sqrt{n-2},$$

которое после возведения обеих частей в квадрат становится при $n \geqslant 4$ очевидным. Лемма 5.2 доказана. □

Лемма 5.3. *При всех натуральных $n \geqslant 2$ верны оценки*

$$K_{n+1}(n+1) > K_n(n), \tag{5.15}$$

$$\frac{K_n(n)}{2n+1} > \frac{K_{n+1}(n+1)}{2n+3}, \tag{5.16}$$

$$K_n(n) > \frac{1}{2} + \cos v_\infty \left(n + \frac{1}{2}\right), \tag{5.17}$$

$$\frac{K_n(n)}{n+1/2} \to \cos v_\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{5.18}$$

Доказательство. Из (5.3) и (2.16) следует (5.15), из (2.18) вытекает (5.16), из (2.22) выводим (5.17), а из (2.20) получаем (5.18). Лемма 5.3 доказана. □

Из (5.3) находим, что

$$\begin{gathered} K_1(1) = 1, \quad K_2(2) = \frac{9}{8}, \quad K_3(3) = \frac{17+7\sqrt{7}}{27} = 1{,}31556515\ldots, \\ K_4(4) = 1{,}51955788\ldots, \quad K_5(5) = 1{,}728768207\ldots, \\ K_6(6) = 1{,}94058921\ldots. \end{gathered} \tag{5.19}$$

Лемма 5.4. *При $n = 3, 4, 5, 6$ имеют место оценки*

$$K_{n+1}(n+1) > M(n) + \frac{n+1-\psi(n)}{n}.$$

Доказательство. Пусть $G_n = M(n) + (n+1-\psi(n))/n$. Из (4.7) и (4.8) получаем

$$G_3 = \frac{3}{2}, \quad G_4 = 1 + \frac{61}{128}, \quad G_5 = 1 + \frac{37}{80}, \quad G_6 = 1 + \frac{15}{32} + \frac{1}{512},$$

т. е. при $n = 3, 4, 5, 6$ в силу (5.15) и (5.19) справедливы оценки

$$G_n \leqslant \frac{3}{2} < K_4(4) \leqslant K_{n+1}(n+1),$$

и лемма 5.4 доказана. □

Теорема 5.1. *Для каждого натурального $n \geqslant 3$ при всех $\gamma \in [\sigma_0^n, \sigma_1^n]$, где $\sigma_0^n = n$, $\sigma_1^n = n + g_n(\delta_n)$, экстремальная задача* (5.1) *имеет единственный экстремальный полином*

$$V_n^\gamma(x) = U_n(z_\gamma; x) = K_n(\gamma) + (\gamma - n + 1)\cos x + \sum_{k=2}^{n} \cos(kx), \tag{5.20}$$

где

$$K_n(\gamma) = \frac{1}{2} - g_n(z_\gamma)\cos z_\gamma - D_n(z_\gamma), \tag{5.21}$$

а $z_\gamma \in [z_n, \delta_n]$ *является единственным решением уравнения*

$$g_n(z_\gamma) = \gamma - n. \tag{5.22}$$

Более того,

$$K'_n(\gamma) = -\cos z_\gamma \quad \textit{при} \quad \gamma \in [n, n + g_n(\delta_n)]. \tag{5.23}$$

Доказательство. По леммам 2.3 и 3.4

$$\delta_n \in \left(z_n, \frac{3\pi}{2n+1}\right). \tag{5.24}$$

Так как по лемме 2.4 $g'_n(z) > 0$ при всех $z \in (0, 3\pi/(2n)]$ и в силу (2.29) $g_n(z_n) = 0$, то уравнение (5.22) имеет единственное решение, причём z_γ как функция от γ имеет непрерывную производную

$$(z_\gamma)'_\gamma = \frac{1}{g'_n(z_\gamma)}.$$

По леммам 3.3 и 3.4 полином (5.20) $U_n(z_\gamma; x)$ неотрицателен и имеет монотонные коэффициенты, причём сумма всех коэффициентов, кроме свободного члена, равна γ. Заметим, что при $\gamma \in [\sigma_0^n, \sigma_1^n]$ в силу (5.24) числа $\rho_k = \cos(kz_\gamma)$ обладают свойством

$$\rho_k - \rho_1 = -2\sin\left(\frac{k-1}{2} z_\gamma\right) \sin\left(\frac{k+1}{2} z_\gamma\right) < 0 \quad \text{при} \quad k = 2, \ldots, n. \tag{5.25}$$

Для любого полинома $T_n \in \mathbb{W}_n$ вида (4.1), коэффициенты которого удовлетворяют условию $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \gamma$, получаем

$$0 \leqslant T_n(z_\gamma) = a_0 + \sum_{k=2}^{n} a_k(\rho_k - \rho_1) + \gamma\rho_1 \leqslant a_0 + \sum_{k=1}^{n} (\rho_k - \rho_1) + \gamma\rho_1,$$

т. е.

$$a_0 \geqslant -\gamma\rho_1 - \sum_{k=1}^{n} (\rho_k - \rho_1),$$

причём равенство возможно только для полинома, который удовлетворяет условиям $T_n(z_\gamma) = 0$ и $a_k = 1$ при всех $k = 2, \ldots, n$. Но тогда из неотрицательности полинома $T_n(x)$ следует, что $T'_n(z_\gamma) = 0$, и значит, полином $T_n(x)$ совпадает с $U_n(z_\gamma; x)$. В частности, из (3.1) получаем (5.21). Из (5.21) и (2.29) выводим, что

$$K'_n(\gamma) = -g'_n(z_\gamma) \cos z_\gamma (z_\gamma)'_\gamma = -\cos z_\gamma,$$

т. е. справедливо (5.23). Теорема 5.1 доказана. □

Примеры конкретных решений задачи (5.1) позволяет получать следующая лемма.

Лемма 5.5. *Пусть $n \geqslant 3$ — натуральное число и для некоторого $\tau = 1, \ldots, [(n+1)/2]$ существуют точки*

$$0 < z_1^* < \ldots < z_\tau^* \leqslant \pi, \tag{5.26}$$

числа

$$\lambda_1^* > 0, \ldots, \lambda_\tau^* > 0, \quad \sum_{k=1}^{\tau} \lambda_k^* = 1, \tag{5.27}$$

и полином

$$T_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^* \cos(kx), \tag{5.28}$$

такие что $T_n^* \in \mathbb{W}_n$, $a_k^* = 1$ при $k = \tau+1, \ldots, n$, $T_n^*(z_k^*) = 0$ при $k = 1, \ldots, \tau$ и числа

$$\rho_k = \sum_{j=1}^{\tau} \lambda_j^* \cos(kz_j^*) \tag{5.29}$$

обладают следующими свойствами: $\rho_0 = 1$ и

$$\rho_k - \rho_1 = 0 \text{ при } k = 1, \ldots, \tau, \quad \rho_k - \rho_1 < 0 \text{ при } k = \tau+1, \ldots, n. \tag{5.30}$$

Тогда полином (5.28) является единственным экстремальным полиномом задачи (5.1) для случая $\gamma = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^*$.

Доказательство. Для любого полинома $T_n \in \mathbb{W}_n$ вида (4.1), который удовлетворяет условию $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \gamma$, имеем

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{\tau} \lambda_j^* T_n(z_j^*) = a_0 + \sum_{k=\tau+1}^{n} a_k(\rho_k - \rho_1) + \gamma\rho_1 \leqslant a_0 + \sum_{k=1}^{n} (\rho_k - \rho_1) + \gamma\rho_1.$$

Значит,

$$a_0 \geqslant -\gamma\rho_1 - \sum_{k=1}^{n} (\rho_k - \rho_1), \tag{5.31}$$

причём в силу (5.27) и (5.30) равенство в (5.31) возможно только для полинома $T_n(x)$, который удовлетворяет условиям $T_n(z_j^*) = 0$ при $j = 1, \ldots, \tau$ и $a_k = 1$ при всех $k = \tau+1, \ldots, n$. Но в этом случае из равенства в (5.31) вытекает, что $a_0 = a_0^*$, а из неотрицательности полинома $T_n(x)$ следует, что $T_n'(z_j^*) = 0$ при $j = 1, \ldots, \tau$. Значит, полином $T_n(x) - T_n^*(x)$ является чётным полиномом степени не выше τ, вместе с производными обращающимся в нуль в точках (5.26). Следовательно, он нулевой. Поэтому в случае равенства в (5.31) полиномы $T_n(x)$ и $T_n^*(x)$ совпадают. Это означает, что в задаче (5.1) экстремальный полином единствен, совпадает с полиномом (5.28) и

$$K_n(\gamma) = a_0^* = -\gamma\rho_1 - \sum_{k=1}^{n} (\rho_k - \rho_1).$$

Лемма 5.5 доказана. $\square$

Заметим, что лемму 5.5 можно применить в случае теоремы 5.1. Тогда $\tau = 1$, $z_1^* = z_\gamma$, полином (5.28) совпадает с $U_n(z_\gamma; x)$, $\lambda_1^* = 1$ и (5.25) означает, что числа (5.29) удовлетворяют условию (5.30).

Отметим также, что при $n = 3$ из (2.24) выводим, что $h_3(x) = 4\cos^2(x) - 2\cos x$, и по лемме 2.3 $\cos\delta_3 = 1/4$, а уравнение (5.22) переходит в уравнение $-4 - 4\cos z_\gamma - 6\cos(2z_\gamma) = \gamma - 3$. Полагая $t_\gamma = \cos z_\gamma$, получаем, что $t_\gamma = (\sqrt{16-3\gamma} - 1)/6$, $\sigma_1^3 = 3 + g_3(\delta_3) = 3 + 1/4 = \psi(3)$. Значит, если $3 \leqslant \gamma \leqslant \psi(3) = 3 + 1/4$, то из (5.21) следует, что

$$V_3^\gamma(x) = 2(\cos x - t_\gamma)^2(2\cos x + 4t_\gamma + 1) = K_3(\gamma) + (\gamma-2)\cos x + \cos(2x) + \cos(3x),$$

где

$$K_3(\gamma) = 1 + 2t_\gamma^2 + 8t_\gamma^3 = \frac{\gamma+1}{6} + \frac{1}{27}\big((16-3\gamma)\sqrt{16-3\gamma} - 1\big).$$

Аналогичным образом теорема 5.1 позволяет полностью решить задачу (5.1) при $n = 4$ (см. [5]). В этом случае при $4 \leqslant \gamma \leqslant \psi(4) = 4 + 3/8$ имеем

$$-4 - 12\cos z_\gamma - 6\cos(2z_\gamma) - 8\cos(3z_\gamma) = \gamma - 4.$$

Обозначая $t_\gamma = \cos z_\gamma$, получаем, что

$$t_\gamma = \frac{3}{4}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{35-8\gamma}{27}\right)\right) - \frac{1}{8},$$

$\sigma_1^4 = 4 + g_4(\delta_4) = 4 + 3/8 = \psi(4)$,

$$V_4^\gamma(x) = (\cos x - t_\gamma)^2\left(2\left(2\cos x + 2t_\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4t_\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{27}{4}\right) =$$
$$= K_4(\gamma) + (\gamma-3)\cos x + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x),$$

где $K_4(\gamma) = 24t_\gamma^4 + 8t_\gamma^3 - 6t_\gamma^2$. В частности (см. (5.19)), $K_4(4) = 24t_4^4 + 8t_4^3 - 6t_4^2$, где

$$t_4 = \frac{3}{4}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{9}\right)\right) - \frac{1}{8}.$$

Теорема 5.2. *Пусть $n \geqslant 5$ — нечётное натуральное число. При всех $z \in [\delta_n, 3\pi/(2n+1)]$ положим*

$$a_1^*(z) = 1 + \frac{(1-\cos z)g_n(z) - 2\cos z\, h_n(z)}{1+\cos z}, \quad a_2^*(z) = 1 + \frac{g_n(z) + h_n(z)}{2(1+\cos z)}, \tag{5.32}$$

$$\lambda_1^* = \frac{2}{(1+\cos z)(3-2\cos z)}, \quad \lambda_2^* = \frac{\cos z - \cos(2z)}{(1+\cos z)(3-2\cos z)}, \tag{5.33}$$

$$\rho_k = \lambda_1^*\cos(kz) + \lambda_2^*\cos(k\pi), \quad k = 0, \dots, n, \quad \theta^* = \frac{2\cos z - 1}{3 - 2\cos z}. \tag{5.34}$$

Тогда

$$\lambda_1^* > 0, \quad \lambda_2^* > 0, \quad \lambda_1^* + \lambda_2^* = 1, \quad \theta^* > 0, \quad a_1^*(z) > 1, \quad a_2^*(z) \geqslant 1, \tag{5.35}$$

$$\rho_k < \rho_1 = \rho_2 = \theta^* \quad \text{при} \quad k = 3, \ldots, n. \tag{5.36}$$

Более того, если число $\Delta_n \in [\delta_n, 3\pi/(2n+1)]$ *наибольшее из возможных таких, что при всех* $z \in [\delta_n, \Delta_n]$ *полином*

$$S_n(z;x) = (a_1^*(z) - a_2^*(z) + 1) + a_1^*(z)\cos x + a_2^*(z)\cos(2x) + \sum_{k=3}^{n}\cos(kx) \tag{5.37}$$

неотрицателен, то $\Delta_n > \delta_n$ *и при всех* $z \in [\delta_n, \Delta_n]$ *полином* $S_n(z;x)$ *является единственным экстремальным полиномом задачи* (5.1) *для*

$$\gamma = a_1^*(z) + a_2^*(z) + n - 2, \tag{5.38}$$

т. е. $V_n^\gamma(x) = S_n(z;x)$, *причём* $a_1^*(z) > a_2^*(z)$ *и функция* (5.38) *как функция от* z *строго возрастает при* $z \in [\delta_n, \Delta_n]$.

Доказательство. Из (5.32), (5.37), (2.24) и (2.29) следует, что при $x = z$ полиномы $S_n(z;x)$ и $(S_n(z;x))'_x$ обращаются в нуль. Из (2.25), (2.4), (2.29), (2.31), (2.32) и (2.27) (см. также доказательство леммы 2.3) выводим, что

$$g_n'(z) > 0, \quad g_n(z) > 0, \quad h_n(z) < 0 \;\; \text{при всех} \;\; z \in \left[\delta_n, \frac{3\pi}{2n+1}\right]. \tag{5.39}$$

Заметим также, что $(\cos z + 1)h_n'(z) = \sin z\big(g_n(z) + h_n(z)\big)$. Отсюда и из (2.27), (5.32), (5.39) и (5.33) получаем, что

$$g_n(z) + h_n(z) > 0, \quad a_1^*(z) > 1, \quad a_2^*(z) > 1 \;\; \text{при} \;\; z \in \left(\delta_n, \frac{3\pi}{2n+1}\right], \tag{5.40}$$

$a_1^*(\delta_n) > a_2^*(\delta_n) = 1$, $S_n(\delta_n;x) = U_n(\delta_n;x)$ при всех x. Поэтому при $z \in [\delta_n, 3\pi/(2n+1)]$ верны условия (5.35), $\rho_1 = \rho_2 = \theta^*$, и из (5.34) выводим, что

$$\rho_k - \theta^* = \rho_k - \rho_1 = \lambda_1^*(\cos(kz) - \cos z) < 0$$

при нечётном $k = 3, \ldots, n$ и

$$\rho_k - \theta^* = \rho_k - \rho_2 = \lambda_2^*(\cos(kz) - \cos(2z)) < 0$$

при чётном $k = 3, \ldots, n$. Отсюда следует (5.36). Из (3.8) и (3.12) выводим, что чётный тригонометрический полином

$$\frac{S_n(\delta_n;x)}{(\cos x - \cos\delta_n)^2(\cos x + 1)} = \frac{U_n(\delta_n;x)}{(\cos x - \cos\delta_n)^2(\cos x + 1)}$$

положителен на всей прямой и чётный тригонометрический полином

$$\frac{S_n(z;x)}{(\cos x - \cos z)^2(\cos x + 1)}$$

имеет коэффициенты, непрерывно зависящие от z (см. доказательство леммы 3.2). Значит,

$$\frac{S_n(z;x)}{(\cos x - \cos z)^2(\cos x + 1)} > 0 \;\; \text{при всех} \;\; x \;\; \text{и} \;\; z \in [\delta_n, \Delta_n^*), \tag{5.41}$$

где число $\Delta_n^* \in (\delta_n, 3\pi/(2n+1)]$ наибольшее из возможных, при которых верно (5.41). Тогда полином (5.37) будет неотрицательным при всех $z \in [\delta_n, \Delta_n]$, где $\Delta_n \in [\Delta_n^*, 3\pi/(2n+1)]$ наибольшее из возможных, которое обладает таким свойством. Из (5.37) следует, что

$$S_n(z;x) = (1+\cos x)(a_1^*(z) - 1 - 2(a_2^*(z)-1)\bigl(1-\cos x) + h_n(x)\bigr).$$

Беря здесь

$$x = x_* = \frac{\pi(n-1)}{n+1} > \frac{\pi}{2}$$

и замечая, что $h_n(x_*) = 0$, из неотрицательности полинома (5.37) при $z \in \in (\delta_n, \Delta_n]$ в силу (5.40) получаем, что

$$a_1^*(z) - 1 \geqslant 2(a_2^*(z)-1)(1-\cos x_*) \geqslant 2(a_2^*(z)-1) > a_2^*(z) - 1,$$

т. е. $a_1^*(z) > a_2^*(z) > 1$ при $z \in (\delta_n, \Delta_n]$. По лемме 5.5, где $z_1^* = z$, $z_2^* = \pi$, полином (5.37) является единственным экстремальным полиномом задачи (5.1) для γ, указанного в (5.38). Поэтому при $z \in [\delta_n, \Delta_n]$ функция (5.38) как функция от z не может принимать два одинаковых значения и не может по теореме 5.1 принимать значения меньше, чем при $z = \delta_n$, т. е. меньше $\sigma_1^n = n + g_n(\delta_n)$. Следовательно, она строго возрастает при $z \in [\delta_n, \Delta_n]$. Значит, при $\gamma \in [\sigma_1^n, \sigma_2^n]$, где $\sigma_2^n = a_1^*(\Delta_n) + a_2^*(\Delta_n) + n - 2$, уравнение (5.38) имеет единственное решение $z_\gamma \in [\delta_n, \Delta_n]$ и $V_n^\gamma(x) = S_n(z_\gamma; x)$ — единственный экстремальный полином задачи (5.1), причём он имеет монотонные коэффициенты. Теорема 5.2 доказана. □

Для примера рассмотрим случай $n = 5$. Из (2.24) и (2.29) имеем

$$h_5(x) = 16\cos^4 x - 8\cos^3 x - 8\cos^2 x + 2\cos x + 1,$$
$$g_5(x) = -80\cos^4 x - 32\cos^3 x + 48\cos^2 x + 12\cos x - 3.$$

По лемме 2.3

$$-32\cos^3\delta_5 + 12\cos^2\delta_5 + 8\cos\delta_5 - 1 = 0.$$

Следовательно, $\delta_5 \in (\pi/4, 3\pi/11)$, и по теореме 5.1 при $\gamma \in [5, 5 + g_5(\delta_5)]$ единственный экстремальный полином задачи (5.1)

$$\begin{aligned} V_5^\gamma(x) &= K_5(\gamma) + (\gamma-4)\cos x + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) + \cos(5x) = \\ &= 2(\cos x - t_\gamma)^2(8\cos^3 x + (16t_\gamma + 4)\cos^2 x + (24t_\gamma^2 + 8t_\gamma - 8)\cos x + \\ &+ 32t_\gamma^3 + 12t_\gamma^2 - 16t_\gamma - 3), \end{aligned}$$

где $t_\gamma = \cos z_\gamma$, $z_\gamma \in [z_5, \delta_5]$, $g_5(z_\gamma) = \gamma - 5$, т. е. $-80t_\gamma^4 - 32t_\gamma^3 + 48t_\gamma^2 + 12t_\gamma + 2 = \gamma$, $K_5(\gamma) = 64t_\gamma^5 + 24t_\gamma^4 - 32t_\gamma^3 - 6t_\gamma^2$. Продолжая обозначения (5.4) и (5.5), удобно положить $\sigma_0^5 = 5$, $\sigma_1^5 = 5 + g_5(\delta_5)$, $\gamma_2^5 = \psi(5)$. При $\gamma \in [\sigma_1^5, \sigma_2^5]$ и $z_\gamma \in [\delta_5, \Delta_5]$, используя обозначение $t_\gamma = \cos z_\gamma$ из теоремы 5.2, имеем

$$a_1^*(z_\gamma) = 48t_\gamma^4 - 80t_\gamma^3 + 16t_\gamma^2 + 16t_\gamma - 2,$$
$$a_2^*(z_\gamma) = -32t_\gamma^3 + 12t_\gamma^2 + 8t_\gamma.$$

Далее,

$$\begin{aligned} V_5^\gamma(x) = S_5(z_\gamma;x) = \\ &+ K_5(\gamma) + a_1^*(z_\gamma)\cos x + a_2^*(z_\gamma)\cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) + \cos(5x) = \\ &= 4(\cos x + 1)(\cos x - t_\gamma)^2\bigl(4\cos^2 x + 2(4t_\gamma - 1)\cos x + 2(6t_\gamma^2 - 2t_\gamma - 1)\bigr), \end{aligned}$$

где

$$K_5(\gamma) = a_1^*(z_\gamma) - a_2^*(z_\gamma) + 1 = 48t_\gamma^4 - 48t_\gamma^3 + 4t_\gamma^2 + 8t_\gamma - 1,$$
$$\gamma = a_1^*(z_\gamma) + a_2^*(z_\gamma) + 3 = 48t_\gamma^4 - 112t_\gamma^3 + 28t_\gamma^2 + 24t_\gamma + 1,$$
$$K_5'(\gamma) = \frac{2t_\gamma - 1}{2t_\gamma - 3} = -\theta^*.$$

Из неотрицательности полинома $S_5(z_\gamma;x)$ имеем

$$t_\gamma \geqslant \frac{1+\sqrt{19}}{8} = \cos\Delta_5,$$

и $t_\gamma = \cos\Delta_5$ при $\gamma = \sigma_2^5 = \psi(5)$. Из теоремы 5.2 следует, что единственный экстремальный полином задачи (5.1) при $n = 5$ имеет монотонные коэффициенты.

Производя вычисления по приведённым формулам, находим, что

$$\cos\delta_5 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{19}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3}{19}\sqrt{\frac{3}{19}}\right)\right) = 0{,}67632585\ldots,$$

$$\frac{z_5}{\pi} = 0{,}260782508\ldots, \quad \frac{\delta_5}{\pi} = 0{,}2635711394\ldots, \quad \frac{\Delta_5}{\pi} = 0{,}2663530934\ldots,$$
$$\sigma_1^5 = 5{,}4339032631\ldots.$$

Таким образом, при $n = 5$ теоремы 5.1 и 5.2 позволяют найти полное решение задачи (5.1).

По аналогии с леммой 3.3, используя формулы (5.32), можно изучить более подробно полином (5.37) и, в частности, получить, что

$$\Delta_n = \Delta_n^* < \frac{3\pi}{2n+1}$$

в доказательстве теоремы 5.2. Отметим также, что аналог теоремы 5.2 можно доказать и при чётных n. Используя лемму 5.5, можно выписать экстремальный полином задачи (5.1) и при $n = 6,7,8$. В связи с этим заметим, что все изученные нами примеры имеют следующий вид. Находятся числа $n = \sigma_0^n < \ldots < \sigma_{[(n-1)/2]}^n = \psi(n)$, и для каждого $\tau = 1,\ldots,[(n-1)/2]$ при всех $\gamma \in [\sigma_{\tau-1}^n, \sigma_\tau^n]$ по лемме 5.5 находятся числа (5.26), (5.27) и коэффициенты полинома (5.38), которые, конечно, зависят от γ, так что выполнены все условия леммы 5.5. При этом оказывается, что $K_n'(\gamma) = -\rho_1 = -\rho_1(\gamma)$ и число $\sigma_{\tau-1}^n$ является корнем уравнения $a_\tau^*(\gamma) = 1$. Обсуждение всех этих утверждений и примеров выходит за пределы данной статьи, но приведённая краткая информация о них объясняет использованные нами в статье обозначения.

6. О взаимном расположении функций $K_n(\gamma)$ и $K_{n-1}(\gamma)$

Если n — натуральное число, $n \geqslant 2$, то обе функции $K_n(\gamma)$ и $K_{n-1}(\gamma)$ определены при $\gamma \geqslant n$. Цель этого раздела — изучить их взаимное расположение.

Теорема 6.1. *При всех натуральных $n \geqslant 2$ справедлива оценка*

$$K_n(\gamma) < K_{n-1}(\gamma) \quad \text{при} \quad \gamma \geqslant \psi(n), \tag{6.1}$$

причём $K_3(\gamma) < K_2(\gamma)$ при всех $\gamma \geqslant 3$.

Доказательство. Заметим (см. [5]), что $K_1(\gamma) = \gamma$ при $\gamma \geqslant \psi(1) = 1$, $K_2(\gamma) = 1 + (\gamma - 1)^2/8$,

$$K_1(\gamma) - K_2(\gamma) = 2 - \frac{(5-\gamma)^2}{8} \geqslant \frac{7}{8}$$

при $\gamma \in [2, 3]$; $K_2(\gamma) = \gamma/2$,

$$K_1(\gamma) - K_2(\gamma) = \frac{\gamma}{2} \geqslant \frac{3}{2}$$

при $\gamma \geqslant 3$. Значит, $K_1(\gamma) > K_2(\gamma)$ при всех $\gamma \geqslant \psi(2) = 2$. Поскольку

$$K_3(\gamma) = \frac{\gamma+1}{6} + \frac{1}{27}\big((16-3\gamma)\sqrt{16-3\gamma} - 1\big)$$

и функция

$$K_2(\gamma) - K_3(\gamma) = \frac{2\gamma - 1}{6} - \frac{1}{27}\big((16-3\gamma)\sqrt{16-3\gamma} - 1\big)$$

строго возрастает и положительна при $\gamma \in [3, 3 + 1/4]$,

$$K_3(\gamma) = 1 + \big(\sqrt{\gamma+3} - 2\big)^2$$

и функция

$$K_2(\gamma) - K_3(\gamma) = 4\sqrt{\gamma+3} - 8 - \frac{\gamma}{2}$$

строго возрастает и положительна при $\gamma \in [3 + 1/4, 6]$,

$$K_3(\gamma) = \frac{\gamma}{3}$$

и функция

$$K_2(\gamma) - K_3(\gamma) = \frac{\gamma}{6}$$

строго возрастает и положительна при $\gamma \geqslant 6$, то $K_2(\gamma) > K_3(\gamma)$ при всех $\gamma \geqslant 3$. Так как $\psi(3) = 3 + 1/4$, то (6.1) верно при $n = 2$ и $n = 3$.

Пусть теперь $n \geqslant 4$. В силу (5.10)

$$K_{n-1}(\gamma) - K_n(\gamma) = \frac{\gamma}{n(n-1)} > 0$$

при $\gamma \geqslant n(n+1)/2$. По леммам 5.1 и 5.2 в силу (5.14) функция $1/(n-1) - K_n(\gamma)/\gamma$ строго возрастает на отрезке $[n(n-1)/2, n(n+1)/2]$ и положительна при $\gamma = n(n-1)/2$. Поэтому

$$K_n(\gamma) < \frac{\gamma}{n-1} = K_{n-1}(\gamma) \quad \text{при} \quad \gamma \geqslant \frac{n(n-1)}{2}. \tag{6.2}$$

Предположим противное, т. е. что $K_n(\gamma) \geqslant K_{n-1}(\gamma)$ при некотором $\gamma \geqslant \psi(n)$. Тогда в силу (6.2)

$$\gamma < \frac{n(n-1)}{2}$$

и

$$K_n\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) < K_{n-1}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right).$$

Поэтому существует такая точка $\gamma_0 < n(n-1)/2$, $\gamma_0 \geqslant \gamma \geqslant \psi(n)$, что $K_n(\gamma_0) = K_{n-1}(\gamma_0)$. В силу (5.5) найдётся такое $s = 1, \dots, [n/2]$, что $\gamma_0 \in [\gamma_s^n, \gamma_{s-1}^n)$, и найдётся такое $\nu = 1, \dots, [(n-1)/2]$, что $\gamma_0 \in [\gamma_\nu^{n-1}, \gamma_{\nu-1}^{n-1})$. Тогда по (5.7) и (5.8) имеем

$$\begin{aligned}2\sum_{k=0}^{s-1} c_k^2 + (n+1-2s)h_n^2(\gamma_0) = 2K_n(\gamma_0) = \\ = 2K_{n-1}(\gamma_0) = 2\sum_{k=0}^{\nu-1} c_k^2 + (n-2\nu)h_{n-1}^2(\gamma_0),\end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}\left|2\sum_{k=0}^{s-1} c_k + (n+1-2s)h_n(\gamma_0)\right|^2 = 2V_n^{\gamma_0}(0) = 2\bigl(\gamma_0 + K_n(\gamma_0)\bigr) = \\ = 2\bigl(\gamma_0 + K_{n-1}(\gamma_0)\bigr) = 2V_{n-1}^{\gamma_0}(0) = \left|2\sum_{k=0}^{\nu-1} c_k + (n-2\nu)h_{n-1}(\gamma_0)\right|^2,\end{aligned}$$

и значит,

$$2\sum_{k=0}^{s-1} c_k + (n+1-2s)h_n(\gamma_0) = 2\sum_{k=0}^{\nu-1} c_k + (n-2\nu)h_{n-1}(\gamma_0), \tag{6.4}$$

причём в силу (5.11)

$$h_n(\gamma_0) \in [c_s, c_{s-1}), \quad h_{n-1}(\gamma_0) \in [c_\nu, c_{\nu-1}). \tag{6.5}$$

Если бы выполнялось $h_n(\gamma_0) \geqslant h_{n-1}(\gamma_0)$, то было бы справедливо $s \leqslant \nu$ и в силу (6.5)

$$\begin{aligned}2\sum_{k=0}^{\nu-1} c_k + (n-2\nu)h_{n-1}(\gamma_0) < \sum_{k=0}^{n} \max\{c_k, c_{n-k}, h_{n-1}(\gamma_0)\} \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=0}^{n} \max\{c_k, c_{n-k}, h_n(\gamma_0)\} = 2\sum_{k=0}^{s-1} c_k + (n+1-2s)h_n(\gamma_0),\end{aligned}$$

что противоречит (6.4). Значит, $h_n(\gamma_0) < h_{n-1}(\gamma_0)$. Поэтому $s \geqslant \nu$, и из (6.3) и (6.4) получаем, что

$$2\sum_{k=\nu}^{s-1} c_k^2 + (n+1-2s)h_n^2(\gamma_0) = (n-2\nu)h_{n-1}^2(\gamma_0),$$
$$2\sum_{k=\nu}^{s-1} c_k + (n+1-2s)h_n(\gamma_0) = (n-2\nu)h_{n-1}(\gamma_0).$$

Тогда в силу (6.5)

$$\begin{aligned}
h_n^2(\gamma_0) &= (n-2s)\big(h_{n-1}^2(\gamma_0) - h_n^2(\gamma_0)\big) + 2\sum_{k=\nu}^{s-1}(h_{n-1}^2(\gamma_0) - c_k^2) \geqslant \\
&\geqslant (n-2s)\big(h_{n-1}(\gamma_0) + h_n(\gamma_0)\big)\big(h_{n-1}(\gamma_0) - h_n(\gamma_0)\big) + \\
&+ 2\sum_{k=\nu}^{s-1}(h_{n-1}(\gamma_0) + c_{s-1})(h_{n-1}(\gamma_0) - c_k) \geqslant \\
&\geqslant \big(h_{n-1}(\gamma_0)+h_n(\gamma_0)\big)\left((n-2s)\big(h_{n-1}(\gamma_0) - h_n(\gamma_0)\big)+2\sum_{k=\nu}^{s-1}(h_{n-1}(\gamma_0)-c_k)\right) = \\
&= \big(h_{n-1}(\gamma_0) + h_n(\gamma_0)\big)\left((n-2\nu)h_{n-1}(\gamma_0) - (n-2s)h_n(\gamma_0) - 2\sum_{k=\nu}^{s-1} c_k\right) = \\
&= \big(h_{n-1}(\gamma_0) + h_n(\gamma_0)\big)h_n(\gamma_0).
\end{aligned}$$

Поскольку последняя величина больше $h_n^2(\gamma_0)$, мы получили противоречие. Это и доказывает теорему 6.1. □

Теорема 6.2. *Для каждого натурального $n \geqslant 2$ верны оценки*

$$K_{n-1}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\gamma\right) \leqslant K_n(\gamma) \quad \textit{при} \quad \gamma \geqslant n, \tag{6.6}$$

$$(n-1)K_{n-1}(\gamma) < nK_n(\gamma) \quad \textit{при} \quad \gamma \in \left[n, \frac{n(n+1)}{2}\right), \tag{6.7}$$

$$(n-1)K_{n-1}(\gamma) = nK_n(\gamma) \quad \textit{при} \quad \gamma \geqslant \frac{n(n+1)}{2}, \tag{6.8}$$

$$K_{n-1}(\gamma) < K_n(\gamma) \quad \textit{при} \quad \gamma \in \left[n, \left(1-\frac{1}{n}\right)\psi(n)\right], \quad n \geqslant 8, \tag{6.9}$$

$$K_{n-1}(\gamma) < K_n(\gamma) \quad \textit{при} \quad \gamma \in [n, \psi(n-1)], \quad n \geqslant 8. \tag{6.10}$$

Доказательство. Пусть

$$T_n^*(x) = K_n(\gamma) + \sum_{k=1}^{n} a_k^* \cos(kx) -$$

экстремальный полином задачи (5.1), т. е. $T_n^*(x) \geqslant 0$ при всех x, $a_1^* \geqslant 1, \ldots, a_n^* \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^* = \gamma$. Тогда (см. [7, теорема 3]) полином

$$T_{n-1}(x) = K_n(\gamma) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}(a_k^*(n-k) + a_{k+1}^* k)\cos(kx)$$

также неотрицателен на прямой, для его коэффициентов выполнено соотношение

$$\frac{1}{n}(a_k^*(n-k) + a_{k+1}^* k) \geqslant 1$$

при $k = 1, \ldots, n-1$, а для суммы его коэффициентов справедливо

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}(a_k^*(n-k) + a_{k+1}^* k) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} a_k^* = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\gamma.$$

Значит, $T_{n-1} \in \mathbb{W}_{n-1}$, и поэтому верно (6.6). По лемме 5.1 при $\gamma \in [n, n(n+1)/2)$ получаем

$$(n-1)K_n\left(\frac{n}{n-1}\gamma\right) < nK_n(\gamma)$$

и из (6.6), где вместо γ взято $\big(n/(n-1)\big)\gamma$, выводим

$$K_{n-1}(\gamma) \leqslant K_n\left(\frac{n}{n-1}\gamma\right) < \frac{n}{n-1}K_n(\gamma);$$

т. е. справедливо (6.7). Если $\gamma \geqslant n(n+1)/2$, то $K_n(\gamma) = \gamma/n$, $K_{n-1}(\gamma) = \gamma/(n-1)$, и верно (6.8). По (4.10) функция $\psi(n) - n$, а значит, и функция $\psi(n) - n - 1 - 1/(n-1)$ не убывает и при $n = 8$ положительна, что легко следует из (4.19), (4.8) и (4.2). Значит,

$$\psi(n) > n + 1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n^2}{n-1}$$

при $n \geqslant 8$. Если $n \geqslant 8$ и $\gamma \in [n, (1 - 1/n)\psi(n)]$, то согласно (6.6) получаем, что

$$K_{n-1}(\gamma) \leqslant K_n\left(\frac{n}{n-1}\gamma\right) < K_n(\gamma),$$

т. е. верно (6.9). Наконец, если $n \geqslant 8$ и $\gamma \in [n, \psi(n-1)]$, то в силу (4.11) $\psi(n-1) < (1 - 1/n)\psi(n)$, и из (6.9) вытекает (6.10). Теорема 6.2 доказана. $\square$

Из теорем 6.1 и 6.2 вытекает следствие.

Следствие 6.1. *Если $\gamma \in [\psi(q), \psi(q+1)]$ при некотором натуральном q, то*

$$K_1(\gamma) > \ldots > K_q(\gamma). \tag{6.11}$$

Если к тому же $\gamma \geqslant q + 1$, то

$$K_{q+1}(\gamma) < \ldots < K_{[\gamma]}(\gamma). \tag{6.12}$$

Доказательство. Если натуральное n не больше q, то $\gamma \geqslant \psi(q) \geqslant \psi(n)$ и из (6.1) получаем (6.11). Если же натуральное n не меньше $q+2$, то $\gamma \leqslant \psi(q+1) \leqslant \psi(n)$ и из (6.10) выводим (6.12). Заметим, что в силу (4.8) только при $q \geqslant 6$ и $\gamma \geqslant q+2$ в (6.12) имеются хотя бы два элемента сравнения. Следствие 6.1 доказано. □

Положим
$$K^*(\gamma) = \min_{n=1,\ldots,[\gamma]} K_n(\gamma) \quad \text{при всех} \quad \gamma \geqslant 1. \tag{6.13}$$

Следствие 6.2. *При каждом натуральном $q \geqslant 3$ существует единственная точка*
$$y_q \in \bigl(\psi(q), \psi(q+1)\bigr), \tag{6.14}$$
такая что
$$y_q > q+1,$$
$$K_q(y_q) = K_{q+1}(y_q), \tag{6.15}$$
$$K_q(\gamma) < K_{q+1}(\gamma) \quad \textit{при} \quad \gamma \in [q+1, y_q), \tag{6.16}$$
$$K_q(\gamma) > K_{q+1}(\gamma) \quad \textit{при} \quad \gamma > y_q. \tag{6.17}$$

Доказательство. По теореме 6.1 $K_{q+1}(\gamma) < K_q(\gamma)$ при всех $\gamma \geqslant \psi(q+1)$. Если $q \geqslant 7$, то в силу (4.13) $\psi(q) > q+1$, и по теореме 6.2 из (6.10) вытекает, что $K_q(\gamma) < K_{q+1}(\gamma)$ при $\gamma \in \bigl[q+1, \psi(q)\bigr)$. На отрезке $[\psi(q), \psi(q+1)]$ функция $K_q(\gamma)$ строго возрастает, а $K_{q+1}(\gamma)$ строго убывает. Поэтому существует единственная точка y_q, которая удовлетворяет (6.14)—(6.17). В этом случае $y_q > \psi(q) > q+1$. Если же $q = 3, 4, 5, 6$, то в силу (4.14) и (4.12) $\psi(q) < q+1 < \psi(q+1)$. Отсюда и из (5.12) следует, что
$$K_q(q+1) - M(q) = K_q(q+1) - K_q\bigl(\psi(q)\bigr) \leqslant \frac{1}{q}\bigl(q+1-\psi(q)\bigr).$$
Поэтому по лемме 5.4
$$K_q(q+1) \leqslant M(q) + \frac{1}{q}\bigl(q+1-\psi(q)\bigr) < K_{q+1}(q+1).$$
Поскольку в этом случае на отрезке $[q+1, \psi(q+1)]$ функция $K_q(\gamma)$ строго возрастает, а $K_{q+1}(\gamma)$ строго убывает, то существует единственная точка $y_q \in \bigl(q+1, \psi(q+1)\bigr)$, которая удовлетворяет условиям (6.15)—(6.17) и, очевидно, (6.14). Следствие 6.2 доказано. □

Следующая теорема подытоживает результаты о взаимном расположении величин, среди которых в (6.13) находится минимум.

Теорема 6.3. *Для каждого натурального $q \geqslant 3$ и $\gamma \in [\psi(q), \psi(q+1)]$ верны оценки*
$$K_{[\gamma]}(\gamma) > \ldots > K_{q+1}(\gamma) > K^*(\gamma) = K_q(\gamma) < \ldots < K_1(\gamma)$$
$$\textit{при} \quad \gamma \in [\psi(q), y_q), \tag{6.18}$$

$$K_{[\gamma]}(\gamma) > \ldots > K_{q+1}(\gamma) = K^*(\gamma) = K_q(\gamma) < \ldots < K_1(\gamma) \quad \text{при} \quad \gamma = y_q, \tag{6.19}$$

$$K_{[\gamma]}(\gamma) > \ldots > K_{q+1}(\gamma) = K^*(\gamma) < K_q(\gamma) < \ldots < K_1(\gamma) \quad \text{при} \quad \gamma \in (y_q, \psi(q+1)]. \tag{6.20}$$

В частности, при $\gamma \in (y_q, y_{q+1})$ *среди величин*

$$K_1(\gamma), \ldots, K_{[\gamma]}(\gamma) \tag{6.21}$$

только одно наименьшее $K_{q+1}(\gamma) = K^*(\gamma)$, *причём* $K_1(\gamma) > \ldots > K_{q+1}(\gamma)$ *и* $K_{q+1}(\gamma) < \ldots < K_{[\gamma]}(\gamma)$, *а при* $\gamma = y_q$ *среди величин* (6.21) *ровно два наименьших* $K_q(\gamma) = K_{q+1}(\gamma) = K^*(\gamma)$, *и в этом случае имеют место соотношения* (6.11) *и* (6.12). *Более того,*

$$K^*(\gamma) = K_{[\gamma]}(\gamma) = K_1(\gamma) = \gamma \quad \text{при} \quad \gamma \in [1, 2), \tag{6.22}$$

$$K^*(\gamma) = K_{[\gamma]}(\gamma) < \ldots < K_1(\gamma) \quad \text{при} \quad \gamma \in [2, 4). \tag{6.23}$$

Доказательство. Из следствий 6.1 и 6.2 и (6.13) сразу выводятся (6.18)—(6.20), а (6.22) и (6.23) вытекают из следствия 6.1. Теорема 6.3 доказана. □

Представление о поведении функции (6.13) даёт следствие 6.3.

Следствие 6.3. *При всех* $\gamma \geqslant 1$ *справедливы следующие равенства*: $K^*(\gamma) = K_1(\gamma) = \gamma$ *при* $\gamma \in [1, 2)$, $K^*(\gamma) = K_2(\gamma) = 1 + (\gamma - 1)^2/8$ *при* $\gamma \in [2, 3)$, $K^*(\gamma) = K_3(\gamma)$ *при* $\gamma \in [3, y_3)$, $K^*(\gamma) = K_{q+1}(\gamma)$ *при* $\gamma \in [y_q, y_{q+1}]$, $q \geqslant 3$.

Доказательство. Следствие 6.3 сразу вытекает из теоремы 6.3. □

Оценку функции (6.13) даёт следствие 6.4.

Следствие 6.4. *Для каждого натурального* n *при*

$$\gamma \in [\psi(n), \psi(n+1)] \tag{6.24}$$

верны оценки

$$M(n) \leqslant K^*(\gamma) \leqslant K_n(\gamma) \leqslant M(n) + \frac{1}{n}\bigl(\gamma - \psi(n)\bigr) \leqslant \leqslant M(n) + \frac{1}{n}\bigl(\psi(n+1) - \psi(n)\bigr) < M(n) + \frac{4}{\pi n}. \tag{6.25}$$

Доказательство. При условии (6.24) в силу следствия 6.3 $K^*(\gamma)$ равно либо $K_n(\gamma)$, либо, если $\gamma \geqslant n+1$, $K_{n+1}(\gamma)$. В любом случае по лемме 4.1 $K_n(\gamma) \geqslant K_n\bigl(\psi(n)\bigr) = M(n)$ или $K_{n+1}(\gamma) \geqslant M(n+1) > M(n)$, т. е. верна первая оценка (6.25). Из (6.24) следует, что $\gamma \geqslant n$, и из (6.13) получаем вторую оценку (6.25). При условии (6.24) из (5.12) выводим, что

$$K_n(\gamma) - M(n) = K_n(\gamma) - K_n\bigl(\psi(n)\bigr) \leqslant \frac{1}{n}\bigl(\gamma - \psi(n)\bigr),$$

а это третья оценка (6.25). Четвёртая оценка (6.25) очевидна, а пятая следует из (4.10). Следствие 6.4 доказано. □

7. Об экстремальной задаче (1.2)

Пусть n — натуральное число. Для каждого $\gamma \geqslant n$ будем рассматривать экстремальную задачу

$$K_n^{\downarrow}(\gamma) = \min\left\{a_0 \colon T_n \in \mathbb{W}_n^{\downarrow},\ \sum_{k=1}^{n} a_k = \gamma\right\} \tag{7.1}$$

(см. раздел 4), т. е. задачу о минимуме свободного члена чётного неотрицательного тригонометрического полинома вида (4.1), коэффициенты которого удовлетворяют условиям $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 1$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \gamma$. Эта задача тесно связана с задачами (5.1) и (1.2), так как

$$K^{\downarrow}(\gamma) = \min_{n=1,\ldots,[\gamma]} K_n^{\downarrow}(\gamma) \quad \text{при всех} \quad \gamma \geqslant 1. \tag{7.2}$$

Очевидно, что экстремальный полином в задаче (7.1) существует для каждого натурального числа n и любого числа $\gamma \geqslant n$. Ввиду (5.1) и (7.1)

$$K_n(\gamma) \leqslant K_n^{\downarrow}(\gamma) \quad \text{при всех} \quad \gamma \geqslant n, \tag{7.3}$$

и если экстремальный полином задачи (5.1) имеет монотонные коэффициенты, то он является и экстремальным полиномом задачи (7.1). Так как при $\gamma \geqslant \psi(n)$ единственный экстремальный полином V_n^{γ} задачи (5.1) имеет монотонные коэффициенты (см. раздел 5), то он является и единственным экстремальным полиномом задачи (7.1) и

$$K_n^{\downarrow}(\gamma) = K_n(\gamma) \quad \text{при всех} \quad \gamma \geqslant \psi(n). \tag{7.4}$$

По теореме 5.1 для каждого $\gamma \in [n, \sigma_1^n]$, $n \geqslant 3$, единственный экстремальный полином задачи (5.1) также имеет монотонные коэффициенты. Поэтому и в этом случае он является единственным экстремальным полиномом задачи (7.1), причём

$$K_n^{\downarrow}(\gamma) = K_n(\gamma) \quad \text{при всех} \quad \gamma \in [n, \sigma_1^n], \quad n \geqslant 3. \tag{7.5}$$

В частности, из (7.5) и теоремы 5.2 следует, что

$$K_n^{\downarrow}(\gamma) = K_n(\gamma) \quad \text{при всех} \quad \gamma \geqslant n, \quad n = 1, \ldots, 5. \tag{7.6}$$

Неудивительно, что свойства функции (7.1) и их доказательства аналогичны свойствам функции (5.1) и их доказательствам. Возможно, что утверждение (7.6) имеет место при всех натуральных n, но поскольку это не доказано, приведём нужные для дальнейшего изложения свойства функции (7.1).

Теорема 7.1. *Для каждого натурального n функция $K_n^{\downarrow}(\gamma)$ непрерывна и выпукла вниз на всем промежутке $[n, +\infty)$, причём на промежутке $[\psi(n), +\infty)$ верно (7.4) и функция $K_n^{\downarrow}(\gamma)$ строго возрастает, а при $n \geqslant 3$ и $\gamma \in [n, \psi(n)]$ функция $K_n^{\downarrow}(\gamma)$ строго убывает.*

Доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы 7 из [5], но вместо задачи (5.1) берётся задача (7.1), и на коэффициенты экстремального полинома налагается дополнительное условие монотонности. □

Теорема 7.2. *Для каждого натурального* $n \geqslant 2$ *функция* $K_n^{\downarrow}(\gamma)/\gamma$ *строго убывает на отрезке* $[n, n(n+1)/2]$ *и верны оценки*

$$K_{n-1}^{\downarrow}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\gamma\right) \leqslant K_n^{\downarrow}(\gamma) \quad \text{при} \quad \gamma \geqslant n, \tag{7.7}$$

$$(n-1)K_{n-1}^{\downarrow}(\gamma) < nK_n^{\downarrow}(\gamma) \quad \text{при} \quad \gamma \in \left[n, \frac{n(n+1)}{2}\right), \tag{7.8}$$

$$K_{n-1}^{\downarrow}(\gamma) < K_n^{\downarrow}(\gamma) \quad \text{при} \quad \gamma \in \left[n, \left(1-\frac{1}{n}\right)\psi(n)\right], \quad n \geqslant 8, \tag{7.9}$$

$$K_{n-1}^{\downarrow}(\gamma) < K_n^{\downarrow}(\gamma) \quad \text{при} \quad \gamma \in \big[n, \psi(n-1)\big), \quad n \geqslant 8, \tag{7.10}$$

Доказательство. При $\gamma \in [n, \psi(n)]$ функция $K_n^{\downarrow}(\gamma)$, а значит, и функция $K_n^{\downarrow}(\gamma)/\gamma$ строго убывает, а при $\gamma \in [\psi(n), n(n+1)/2]$ первое утверждение теоремы вытекает из леммы 5.1 и (7.4). Доказательство оценок (7.7)—(7.10) повторяет доказательство соответствующих оценок из теоремы 6.2, только коэффициенты полинома $T_n^*(x)$ предполагаются монотонными. В этом случае коэффициенты полинома $T_{n-1}(x)$ также будут монотонными, поскольку

$$a_k^*(n-k) + a_{k+1}^*k \geqslant na_{k+1}^* \geqslant a_{k+1}^*(n-k-1) + a_{k+2}^*(k+1)$$

при всех $k = 1, \ldots, n-2$. Теорема 7.2 доказана. □

Следствие 7.1. *При каждом натуральном* $q \geqslant 3$ *существует единственная точка*

$$y_q^{\downarrow} \in \big(\psi(q), \psi(q+1)\big), \tag{7.11}$$

такая что

$$y_q^{\downarrow} > q+1,$$
$$K_q^{\downarrow}(y_q^{\downarrow}) = K_{q+1}^{\downarrow}(y_q^{\downarrow}),$$
$$K_q^{\downarrow}(\gamma) < K_{q+1}^{\downarrow}(\gamma) \quad \text{при} \quad \gamma \in [q+1, y_q^{\downarrow}),$$
$$K_q^{\downarrow}(\gamma) > K_{q+1}^{\downarrow}(\gamma) \quad \text{при} \quad \gamma > y_q^{\downarrow}.$$

Более того, $y_q^{\downarrow} \geqslant y_q$.

Доказательство повторяет доказательство следствия 6.2 с заменой функции (5.1) на (7.1). Из (6.14), (7.11), (7.3) и (7.4) вытекает, что $y_q^{\downarrow} \geqslant y_q$ при всех $q \geqslant 3$. Следствие 7.1 доказано. □

Заметим, что из (7.2), (7.3) и (6.13) следует, что

$$K^*(\gamma) \leqslant K^{\downarrow}(\gamma) \quad \text{при всех} \quad \gamma \geqslant 1. \tag{7.12}$$

Конечно, справедливы соответствующие аналоги следствий 6.1, 6.3, 6.4 и теоремы 6.3 с заменой функции (5.1) на (7.1), а функции (6.13) на (7.2). В частности, аналогом следствия 6.4 будет следующее утверждение.

Следствие 7.2. *Для каждого натурального n при $\gamma \in [\psi(n), \psi(n+1)]$ верны оценки*

$$M(n) \leqslant K^*(\gamma) \leqslant K^{\downarrow}(\gamma) \leqslant K_n(\gamma) \leqslant M(n) + \frac{1}{n}\big(\psi(n+1) - \psi(n)\big) < M(n) + \frac{4}{\pi n}.$$

Доказательство повторяет доказательство следствия 6.4 с заменой функции (6.13) на (7.2) и последующим применением (7.4), (6.25) и (7.12). Следствие 7.2 доказано. □

8. Доказательство теоремы 1.1

Обозначим (см. (1.7))

$$g(\gamma) = \frac{1}{\pi}\ln\gamma + \frac{1}{\pi^2}\frac{\ln\gamma}{\gamma} + \frac{C_0 + \ln 2 + \ln\pi}{\pi} \quad \text{при} \quad \gamma \geqslant 1. \tag{8.1}$$

Тогда

$$g'(\gamma) = \frac{\pi\gamma + 1 - \ln\gamma}{\pi^2\gamma^2} \quad \text{при} \quad \gamma \geqslant 1.$$

Функция $\pi\gamma + 1 - \ln\gamma$ имеет положительную производную и строго возрастает при $\gamma \geqslant 1$. Поэтому $g'(\gamma) \geqslant (\pi+1)/(\pi^2\gamma^2)$ и функция (8.1) строго возрастает при $\gamma \geqslant 1$. Производная функции $\pi^2\gamma g'(\gamma)$ равна $(\ln\gamma - 2)/\gamma^2$, и поэтому функция $\pi^2\gamma g'(\gamma)$ строго убывает на $[1, e^2]$ и строго возрастает при $\gamma \geqslant e^2$, стремясь к π. Значит, $2\gamma g'(\gamma) \leqslant 2\pi^{-1} + 2\pi^{-2} < 1$ при $\gamma \geqslant 1$. Таким образом,

$$0 < 2\gamma g'(\gamma) < 1 \quad \text{при} \quad \gamma \geqslant 1. \tag{8.2}$$

Лемма 8.1. *Для каждого натурального n и любого $\gamma \in [\psi(n), \psi(n+1)]$ верны оценки*

$$n \leqslant \gamma \leqslant \psi(n+1) \leqslant 2n, \quad \frac{1}{n}\big(\psi(n+1) - \psi(n)\big)\psi(n+1) < \frac{8}{\pi}, \tag{8.3}$$

$$M(n) \leqslant K^*(\gamma) \leqslant K^{\downarrow}(\gamma) \leqslant K_n(\gamma) \leqslant M(n) + \frac{1}{n}\big(\psi(n+1) - \psi(n)\big) < M(n) + \frac{8}{\pi\gamma}. \tag{8.4}$$

Доказательство. Из (4.12), (4.15) и (4.10) следует, что $n \leqslant \psi(n)$, $\psi(n+1) \leqslant (4/\pi)(n-1) + 2 \leqslant 2n$ и

$$\big(\psi(n+1) - \psi(n)\big)\psi(n+1) \leqslant \big(\psi(n+1) - \psi(n)\big)2n < \frac{8n}{\pi}.$$

Это доказывает (8.3). По следствию 7.2 получаем первые четыре оценки (8.4). По (8.3) имеем

$$\frac{1}{n}\big(\psi(n+1) - \psi(n)\big) < \frac{8}{\pi\psi(n+1)} \leqslant \frac{8}{\pi\gamma}.$$

Лемма 8.1 доказана. □

Лемма 8.2. *Справедливы оценки*

$$K^*(\gamma) \leqslant K^{\downarrow}(\gamma) < K^*(\gamma) + \frac{8}{\pi\gamma} \quad \text{при всех} \quad \gamma \geqslant 1. \tag{8.5}$$

Доказательство. Если $\gamma \geqslant 1$, то существует такое натуральное n, что $\gamma \in [\psi(n), \psi(n+1)]$. Тогда из (8.4) выводим (8.5). Лемма 8.2 доказана. □

Лемма 8.3. *Существует такая положительная постоянная C_3, что*

$$n\bigl|M(n) - g\bigl(\psi(n)\bigr)\bigr| \leqslant C_3 \quad \text{при всех} \quad n = 1, 2, \dots . \tag{8.6}$$

Доказательство. В [6, теорема 3] доказано, что при $n \to \infty$ справедливы соотношения

$$M(n) = \frac{\ln(2n+1)}{\pi} + \frac{C_0 + 2\ln 2}{\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$\psi(n) = \frac{2(2n+1)}{\pi} - \frac{\ln(2n+1)}{\pi} - \frac{C_0 + 2\ln 2}{\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right);$$

где (см. (1.7)) C_0 — постоянная Эйлера. Из (8.2) вытекает, что

$$g(\psi(n)) = g\left(\frac{2(2n+1)}{\pi} - \frac{\ln(2n+1)}{\pi} - \frac{C_0 + 2\ln 2}{\pi}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$
$$= \frac{\ln(2n+1)}{\pi} + \frac{C_0 + 2\ln 2}{\pi} - \frac{C_0 + \ln 2 + \ln\pi}{2\pi(2n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Значит, при $n \to \infty$

$$n\Bigl(M(n) - g\bigl(\psi(n)\bigr)\Bigr) = \frac{C_0 + \ln 2 + \ln\pi}{4\pi} + o(1).$$

Отсюда вытекает (8.6). Лемма 8.3 доказана. □

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $\gamma \geqslant 1$. Тогда существует такое натуральное n, что $\gamma \in [\psi(n), \psi(n+1)]$. Поэтому из (8.4), (8.2), (1.2) и (8.3) по лемме 8.3 следует, что

$$K^*(\gamma) - g(\gamma) \leqslant K^{\downarrow}(\gamma) - g(\gamma) \leqslant K^{\downarrow}(\gamma) - g\bigl(\psi(n)\bigr) <$$
$$< M(n) - g\bigl(\psi(n)\bigr) + \frac{8}{\pi\gamma} < \frac{2C_3}{2n} + \frac{8}{\pi\gamma} \leqslant \frac{2C_3}{\gamma} + \frac{8}{\pi\gamma},$$

$$g(\gamma) - K^{\downarrow}(\gamma) \leqslant g(\gamma) - K^*(\gamma) \leqslant \Bigl(g\bigl(\psi(n+1)\bigr) - g\bigl(\psi(n)\bigr)\Bigr) +$$
$$+ g\bigl(\psi(n)\bigr) - M(n) < \frac{\psi(n+1) - \psi(n)}{2\psi(n)} + g\bigl(\psi(n)\bigr) - M(n) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\psi(n+1) - \psi(n)}{2n} + \frac{C_3}{n} < \frac{4}{\pi\psi(n+1)} + \frac{2C_3}{2n} \leqslant \frac{4}{\pi\gamma} + \frac{2C_3}{\gamma}.$$

Следовательно,

$$|K^{\downarrow}(\gamma) - g(\gamma)| < \frac{2C_3 + 3}{\gamma}, \quad |K^{*}(\gamma) - g(\gamma)| < \frac{2C_3 + 3}{\gamma}.$$

Ввиду (8.1) теорема 1.1 доказана. □

Конечно, при написании статьи возникли новые вопросы. Обратим особое внимание на вопрос о взаимоотношении функций (1.1) и (1.2) и равенство (1.3): не известно ни одного значения γ, при котором функции (1.1) и (1.2) принимают различные значения. То же самое можно сказать и о функциях (6.13) и (1.1).

Литература

[1] Белов А. С. Об одной экстремальной задаче о минимуме тригонометрического полинома // Изв. РАН. Сер. мат. — 1993. — Т. 57, № 6. — С. 212—226.

[2] Белов А. С. Тригонометрические ряды и полиномы с неотрицательными частными суммами: Дис.. . . докт. физ.-мат. наук. — М., 2003.

[3] Белов А. С. Об экстремальных задачах на множестве неотрицательных тригонометрических полиномов // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тез. докл. 12-й Саратовской зимней школы (27 января — 3 февраля 2004 г.). — Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2004. — С. 19—21.

[4] Белов А. С. Об одной последовательности неотрицательных тригонометрических полиномов // Вестн. Иванов. гос. ун-та. Сер. Биология. Химия. Физика. Математика. — 2011. — Вып. 2. — С. 104—114.

[5] Белов А. С. Об экстремальной задаче о минимуме свободного члена неотрицательного тригонометрического полинома // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2011. — Т. 17, № 3. — С. 105—121.

[6] Белов А. С. О локализации нулей некоторых тригонометрических полиномов // Вестн. Иванов. гос. ун-та. Сер. Биология. Химия. Физика. Математика. — 2012. — Вып. 2. — С. 92—106.

[7] Белов А. С. О положительно определённых ломаных функциях и их применениях // Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова. — 2013. — Т. 280. — С. 11—40.

[8] Конягин С. В. О проблеме Литтлвуда // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1981. — Т. 45, № 2. — С. 243—265.

[9] McGehee O. C., Pigno L., Smith B. Hardy's inequality and the L^1-norm of exponential sums // Ann. Math. Ser. 2. — 1981. — Vol. 113, no. 3. — P. 613—618.

[10] Odlyzko A. M. Minima of cosine sums and maxima of polynomials on the unit circle // J. London Math. Soc. — 1982. — Vol. 26, no. 3. — P. 412—420.